

01;04;10

Релятивистская частица в квадрупольном волноводе

© Ю.Г. Павленко, Н.Д. Наумов, А.И. Торопова

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 121357 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 20 декабря 1995 г.)

Получено решение уравнений движения частицы в поле бегущей электромагнитной волны, распространяющейся между двумя парами металлических поверхностей гиперболической формы. Рассмотрено движение частицы при возбуждении волновода монохроматическим и импульсным источниками напряжения. Исследована возможность применения квадрупольного волновода для фокусировки пучка и сепарации частиц по удельному заряду и продольной скорости.

Введение

В настоящее время известно ограниченное число интегрируемых задач релятивистской механики, связанных с движением заряженных частиц в поле электромагнитной волны. Для частицы в поле плоской волны решение найдено в [1]; более сложная задача для частицы в поле волны круговой поляризации, распространяющейся вдоль однородного магнитного поля, решена в работе [2]. В работе [3] получено точное решение задачи о движении релятивистской частицы в поле плоской волны в среде с коэффициентом преломления $n > 1$.

В настоящей работе получено новое аналитическое решение уравнений движения частицы в поле поперечной электромагнитной (*ТЕМ*) волны, распространяющейся в квадрупольном волноводе. Исследовано устойчивое движение частиц как в случае монохроматической волны, так и при возбуждении волновода импульсным источником напряжения. В первом случае решение представлено аperiодическими ограниченными функциями Матье, во втором — кусочно-непрерывными ограниченными функциями. Полученные решения позволили определить условия прохождения пучка частиц через волновод, а также рассмотреть режимы фокусировки и сепарации частиц по удельному заряду и продольной скорости. Особый интерес представляет движение релятивистских частиц при их инжекции в направлении, противоположном направлению распространения волны. В этом случае появляется возможность подавить в амплитуде колебаний вклад, связанный с разбросом поперечных скоростей частиц пучка.

Электромагнитное поле волновода

Электродинамическая система образована двумя парами металлических поверхностей $y^2 = x^2 - R^2$, $y^2 = x^2 + R^2$. В этой системе можно возбудить основную *ТЕМ*-волну, критическая частота которой равна нулю. Эта волна будет распространяться в волноводе со скоростью света при любой частоте источника возбуждения поля. Уникальная особенность рассматриваемой открытой системы состоит в том,

что конфигурации поля основной волны и поля в статическом случае совпадают [4].

Решение уравнений Максвелла для напряженности электрического поля и магнитной индукции представим в терминах потенциалов

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1)$$

Для поперечно-электромагнитной волны эти потенциалы определяются потенциалом Герца $G(t, \mathbf{x})$

$$A_0 = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \mathbf{A} = \left(0, 0, -\frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Функция $G(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет скалярному волновому уравнению и граничным условиям на поверхности волновода. Для основной волны

$$G(t, \mathbf{x}) = -\frac{\sigma}{R^2} (x^2 - y^2) \int f(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где $\xi = t - \sigma z/c$, $f(\xi)$ — произвольная функция; значение $\sigma = 1$ соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси z ; значение $\sigma = -1$ — волне, бегущей в противоположном направлении.

Из (1)–(3) найдем

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{R^2} (-x, y, 0) f(\xi), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = -\frac{2\sigma}{R^2} (y, x, 0) f(\xi).$$

Далее ограничимся классом периодических функций $f(\xi)$. Тогда интенсивность волны, распространяющейся в волноводе, определяется средним значением z -компоненты вектора Пойнтинга

$$P_z = \sigma I, \quad I = \frac{c}{2\pi R^2} \oint dS (x^2 - y^2) \langle f^2 \rangle.$$

Разделение переменных в уравнениях движения

В релятивистской механике уравнение траектории удобно задавать в параметрической форме $t = t(\tau)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, где τ — собственное время частицы. Уравнения движения частицы заряда e , массы m имеют вид [5,6]

$$mc^2 \dot{t} = e \dot{\mathbf{x}} \mathbf{E}, \quad m \dot{\mathbf{x}} = e i \mathbf{E} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}} \mathbf{B}], \quad (4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по собственному времени.

Согласно определению 4-скорости,

$$(ct)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 = c^2. \quad (5)$$

Начальные условия выберем в виде $t(0) = 0$, $\mathbf{x}(0) = (x_0, y_0, 0)$, $\dot{t}(0) = \gamma$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \gamma(v_1, v_2, v_3)$, $v_3 > 0$, где $\gamma = (1 - v_i v_i / c^2)^{-1/2}$. Подставляя выражения для полей в (4), получим систему уравнений

$$m\dot{c}\dot{t} = -(x\dot{x} - y\dot{y})F(\xi), \quad m\dot{z} = -\sigma(x\dot{x} - y\dot{y})F(\xi), \quad (6a)$$

$$m\ddot{x} = -cx\dot{\xi}F(\xi), \quad m\ddot{y} = cy\dot{\xi}F(\xi), \quad (6б)$$

где $F = 2ef/cR^2$.

Для интегрирования системы (6) в квадратурах необходимо произвести разделение переменных. Благодаря симметрии поля из уравнений (6a) следует первый интеграл

$$\dot{t} - \frac{\sigma}{c}\dot{z} = g, \quad g = \gamma \left(1 - \frac{\sigma}{c}v_3\right). \quad (7)$$

Следовательно, на траектории частицы

$$t - \frac{\sigma}{c}z = g\tau. \quad (8)$$

Учитывая соотношения (7), (8), получим из (6б) уравнения

$$\ddot{x} + \varkappa(\tau)x = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{y} - \varkappa(\tau)y = 0, \quad (10)$$

где $\varkappa(\tau) = gF(g\tau)$.

Из первых интегралов (5), (7) находим

$$\dot{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right) + \frac{1}{2gc^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (11)$$

$$\frac{\sigma}{c}\dot{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right) + \frac{1}{2gc^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (12)$$

Таким образом, после интегрирования линейных уравнений (9), (10) функции $t(\tau)$, $z(\tau)$ определяются из (11), (12). Преобразуя (11), (12), получим эквивалентные соотношения

$$\dot{t} = \gamma + \frac{1}{2gc^2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \gamma^2(v_1^2 + v_2^2) \right], \quad \dot{z} = \gamma v_3 + \sigma c(t - \gamma).$$

Из (11), (12) следует, что при значениях $|\dot{x}/c|$, $|\dot{y}/c| \gg \sqrt{2\gamma g}$ кинетическая энергия частицы $T = mc^2(t - 1) \gg \gamma mc^2$. В этом случае компоненты скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}/\dot{t}$ принимают значения $|v_x/c|$, $|v_y/c| \ll \sqrt{g/2\gamma}$, $v_z \sim \sigma c$. При значениях $|\dot{x}/c|$, $|\dot{y}/c| \ll \sqrt{2\gamma g}$ кинетическая энергия $T \sim \gamma mc^2$.

Частица в поле монохроматической волны

Пусть функция $f(\xi)$ имеет вид $f = V \cos \omega \xi$, где величина V определяет интенсивность волны. Переходя в (9), (10) к безразмерным величинам $s = \omega g \tau / 2$, $b = 4eV/mg\omega^2 R^2$, получим уравнения

$$\frac{d^2x}{ds^2} + 2b \cos 2sx = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - 2b \cos 2sy = 0, \quad (14)$$

которые представляют собой частные случаи уравнения Матье

$$\frac{d^2u}{ds^2} + (\mu + 2q \cos 2s)u = 0.$$

Из теории функций Матье известно, что плоскость параметров (μ, q) содержит области, соответствующие ограниченными и неограниченными решениями [7–9]. В области устойчивости решение представляет собой аperiodическую функцию. При $\mu = 0$ решения устойчивы в интервалах $0 < b \leq 0.92$, $7.51 \leq b \leq 7.58$, $21.309 \leq b \leq 21.312, \dots$. Эти условия будут выполняться при соответствующем выборе параметров волны; представляя b в виде $b = (eV/mgc^2)(\lambda/\pi R)^2$, найдем, что в случае пучка электронов длина волны равна $\lambda \simeq 2.22 \cdot 10^3 R \sqrt{bg/V}$, а для пучка ионов с массовым числом A имеем $\lambda \simeq 10^5 R \sqrt{bgA/V}$, где λ, V — числовые значения в единицах СИ.

а) Рассмотрим вначале область $0 < b \leq b_0$, $b_0 = 0.92$. Первая область устойчивости в плоскости (μ, q) лежит справа от кривой $\mu_{c0} = -q^2/2 + 7q^4/128 + \dots$ и ограничена кривыми $\mu_{c1}(q) = 1 - q - q^2/8$ при $q > 0$ и $\mu_{s1}(q) = \mu_{c1}(-q)$ при $q < 0$. Для получения равномерно пригодного разложения решения уравнения Матье применим метод усреднения в гамильтоновой форме [6]. В окрестности переходной кривой $\mu_{c0}(q)$ получим

$$u(s) = U \left(1 + \frac{q}{2} \cos 2s\right) - \frac{q}{2} W \sin 2s + \dots,$$

$$\frac{du}{ds} = W \left(1 - \frac{q}{2} \cos 2s\right) - Uq \sin 2s + \dots \quad (15)$$

Здесь эволюция переменных U, W определяется усредненным движением

$$U = A \cos \Theta s + \frac{B}{\Theta} \sin \Theta s, \quad W = \frac{dU}{ds},$$

где $\Theta = \sqrt{\mu - \mu_{c0}}$; A, B — постоянные.

В соответствии с [9] на переходной кривой $\mu_{c0}(q)$ одно из линейно независимых решений содержит множитель s . Отметим, что решение уравнения Матье методом градиентных потенциалов Гапонова–Миллера [10,11] или методом Капицы [12] содержит только первый член из (15) $u(s) = U(s)$, $\mu_{c0} = -q^2/2$. Полагая в (15) $\mu = 0$, $q = b$, получим решение уравнения (13);

при $\mu = 0$, $q = -b$ имеем решение уравнения (14) с коэффициентами A' , B' . Учитывая начальные условия, найдем

$$A = x_0 \left(1 + \frac{b}{2}\right)^{-1}, \quad B = \frac{2\gamma v_1}{\omega g} \left(1 - \frac{b}{2}\right)^{-1},$$

$$A' = y_0 \left(1 - \frac{b}{2}\right)^{-1}, \quad B' = \frac{2\gamma v_2}{\omega g} \left(1 + \frac{b}{2}\right)^{-1}.$$

Для реализации устойчивого движения необходимо, чтобы для всех частиц пучка выполнялись неравенства $|x(\tau)| < R$, $|y(\tau)| < R$. В ультрарелятивистском случае, т. е. при $v_3 \sim c$, $|v_1|, |v_2| \ll v_3$, величина g сильно зависит от значения σ : $g(\sigma = 1) \simeq 1/2\gamma$, $g(\sigma = -1) \simeq 2\gamma$. Поэтому в случае волны, распространяющейся навстречу пучку, появляется возможность подавить в амплитуде колебаний вклад, обусловленный разбросом поперечных скоростей. Из неравенств $|B|/\Theta_0 < |A| < R$, $|B'|/\Theta_0 < |A'| < R$ ($\Theta_0 \simeq b\sqrt{2}$) можно получить оценки для верхней границы начальных значений поперечных компонент скорости

$$\left|\frac{v_1}{c}\right| < 2\pi b(2-b)|x_0| \left[\lambda(2+b)\sqrt{2}\right]^{-1},$$

$$\left|\frac{v_2}{c}\right| < 2\pi b(2+b)|y_0| \left[\lambda(2-b)\sqrt{2}\right]^{-1},$$

где $|x_0|, |y_0| < R$.

Полагая $R = 10^{-3}$ м, $V = 10^3$ В, $b = 0.125$, для электронов станфордского линейного коллайдера с энергией 50 ГэВ получим $\lambda \simeq 11$ м, $|v_1/c|, |v_2/c| \leq 5 \cdot 10^{-5}$.

б) Найдем теперь методом усреднения решения уравнения Матве в окрестности кривых $\mu_{s1}(q)$, $\mu_{c1}(q)$ при значениях параметра $b \sim b_0$. Равномерно пригодное разложение общего решения имеет вид

$$u(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[(Ar^{1/2} + iBr^{-1/2})(\alpha_1 F + \alpha_2 F^*) \exp(ins) \right]. \quad (16)$$

Здесь A, B — постоянные; $\delta = \mu - 1$; $r = n/(l+k)$; $n = \sqrt{l^2 - k^2}$ — характеристический показатель,

$$2l = -\delta + \frac{\delta^2}{4} + \frac{q^2}{8} + \dots, \quad 2k = q \left(1 - \frac{\delta}{2} + \dots\right),$$

$$\alpha_{1,2} = r^{-1/2} \pm r^{1/2},$$

$$F = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \exp(-is) - \frac{q}{4} \exp(is) + \frac{q}{8} \exp(-3is) + \dots$$

Решение в области неустойчивости следует из (16) после замены $n \rightarrow -i\sqrt{k^2 - l^2}$. В этом же приближении производная равна

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[(Ar^{1/2} + iBr^{-1/2})(\alpha_1 G + \alpha_2 G^*) \exp(ins) \right],$$

$$G = \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \exp(-is) - \frac{q}{4} \exp(is) + \frac{3q}{8} \exp(-3is) + \dots$$

На переходной кривой $\mu = \mu_{s1}$ величина $l+k=0$; на кривой $\mu = \mu_{c1}$ значение $l-k=0$. Полагая в (16) $\mu = 0$, $q = b$, получим решение уравнения (13)

$$x(\tau) = \left(A \cos ns - \frac{B}{r} \sin ns\right) F_1 - \left(Ar \sin ns + B \cos ns\right) F_2, \quad (17)$$

где $F_1 = \operatorname{Re} F$, $F_2 = \operatorname{Im} F$ — периодические функции с периодом π .

Если в выражении (16) положить $\mu = 0$, $q = -b$, $r \Rightarrow r' = n/(l-k)$, то оно переходит в решение уравнения (14). Важно отметить, что величина экстремальных значений $x(\tau)$, $y(\tau)$ возрастает в окрестности точки $b \sim b_0$, поскольку в этом случае $n \sim r \sim \sqrt{b-b_0}$, $r' \sim 1/\sqrt{b-b_0}$. Постоянные находятся из начальных условий

$$A = 4x_0 \left(5 - \frac{b}{2}\right)^{-1}, \quad B = \frac{8\gamma v_1}{\omega g} \left(3 + \frac{b}{2}\right)^{-1},$$

$$A' = 4y_0 \left(5 + \frac{b}{2}\right)^{-1}, \quad B' = \frac{8\gamma v_2}{\omega g} \left(3 - \frac{b}{2}\right)^{-1}.$$

Для реализации устойчивого движения необходимо обеспечить выполнение условий $|B|/r < |A| < R$, $|A'|/r' < |B'| < R$.

В рассматриваемой области устойчивости возможен режим ограничения пучка по скоростям. Если $|v_1/c|, |v_2/c| \ll 1$, то пучок ионов заряда Ze_0 , прошедший через волновод в случае $\sigma = 1$, будет состоять из частиц, начальные продольные скорости которых удовлетворяют условию $v_3 \leq c\beta(\omega)$, $\beta = (\omega^4 - \Omega^4)/(\omega^4 + \Omega_0^4)^{-1}$, где $\Omega^2 = 4Ze_0V/mbR^2$, $\Omega_0^2 = 4Ze_0V/mb_0R^2$, $\Omega > \Omega_0$. При увеличении частоты в интервале $\Omega_0 \leq \omega \leq \Omega_0(2/\varepsilon - 1)^{1/4}$ величина β принимает значения $0 \leq \beta \leq 1 - \varepsilon$. Если этот пучок пропустить через второй волновод, где частота $\omega' \geq \omega$ и $\sigma = -1$, то на выходе окажутся ионы, для которых $v_3 \geq c\beta(\omega')$.

в) В области устойчивости $b_L \leq b \leq b_R$, $b_L = 7.51$, $b_R = 7.58$ при фиксированной частоте волновода в случае $\sigma = 1$ пропускает частицы, для которых начальные значения продольных скоростей удовлетворяют условию

$$\beta_1(\omega) \leq \frac{v_3}{c} \leq \beta_2(\omega),$$

где $\beta_i = (\omega^4 - \Omega_i^4)/(\omega^4 + \Omega_i^4)$, $\Omega_{1,2}^2 = 4Ze_0V/mR^2 b_{L,R}$, $\omega \geq \Omega_1$.

Величину β_2 можно представить в виде $\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta$,

$$\Delta\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b_L^2}{b_R^2}\right) (1 - \beta_1^2) \simeq 5 \cdot 10^{-3} (1 - \beta_1^2).$$

Отметим, что при $\omega = \Omega_1(2/\varepsilon - 1)^{1/4}$ имеем $\beta_1 = 1 - \varepsilon$.

Движение при импульсном возбуждении волновода

Рассмотрим теперь движение частицы в волне, структура которой формируется периодической последовательностью импульсов противоположной полярности с

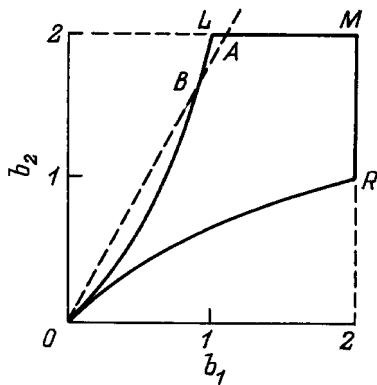


Рис. 1. Область устойчивости.

амплитудами V_1, V_2 и длительностью t_1 и t_2 . Пусть $t_1, t_2 \ll T, T = 2\pi/\omega$ — период волны. В этом наиболее простом случае функция $f(\xi)$ может быть представлена в терминах δ -функции Дирака

$$f(\xi) = f_1 \sum_{n=1}^N \delta[\xi - (n-1)T] - f_2 \sum_{n=1}^N \delta[\xi - (n-\frac{1}{2})T],$$

где $f_i = t_i V_i$.

Тогда в уравнениях (9), (10)

$$\begin{aligned} x(\tau) = & \frac{2e}{mR^2} \left(f_1 \sum_{n=1}^N \delta[\tau - (n-1)T_0] \right. \\ & \left. - f_2 \sum_{n=1}^N \delta[\tau - (n-\frac{1}{2})T_0] \right), \end{aligned}$$

где $T_0 = T/g$.

Решение уравнения (9) представляет собой кусочно-непрерывную функцию. Величина разрыва производной определяется интегрированием уравнения в окрестности точек $(n-1)T_0$ и $(n-1/2)T_0$. Учитывая граничные условия, находим для $n \geq 1$

$$x(\tau) = A_i^{(n-1)} u_i(\tau, n-1), \quad \left(n - \frac{3}{2}\right) T_0 \leq \tau \leq (n-1) T_0,$$

$$x(\tau) = \alpha_{ik} A_k^{(n-1)} u_i(\tau, n), \quad (n-1) T_0 \leq \tau \leq \left(n - \frac{1}{2}\right) T_0,$$

$$x(\tau) = A_i^{(n)} u_i(\tau, n), \quad \left(n - \frac{1}{2}\right) T_0 \leq \tau \leq n T_0. \quad (18)$$

Здесь $u_1(\tau, n) = 1, u_2(\tau, n) = \tau/T_0 - n + 1, A_i^{(n)} = M_{ik} A_k^{(n-1)}$, матрица $M_{ik} = \beta_{ij} \alpha_{jk}, \alpha_{11} = \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} = -2b_1, \alpha_{22} = 1 - 2b_1, \beta_{11} = 1 - b_2, \beta_{12} = -(b_2/2), \beta_{21} = 2b_2, \beta_{22} = 1 + b_2, b_i = 4e\pi^2 V_i / mgs_i \omega^2 R^2$ — постоянные величины, где $s_i = T/t_i$ — скважность. В силу начальных условий $A_1^{(0)} = x_0, A_2^{(0)} = \gamma v_1 / T_0$.

Очевидно, что $A_k^{(n)} = C_{kj} A_j^{(0)}$, где матрица $C = M^n, \det M = 1$. Для вычисления матрицы C и исследования

поведения решения найдем собственные значения λ матрицы M

$$M_{11} = 1 + b_1 b_2 - b_2, \quad M_{12} = 1 + b_1 b_2 - \frac{3}{2} b_2,$$

$$M_{21} = -2(b_2 - b_1 - b_1 b_2), \quad M_{22} = 1 - 2b_1 + 3b_2 - 2b_1 b_2.$$

Аналогичная задача возникает при нахождении областей пропускания оптического излучения многослойными средами [13]. Из уравнения $\det(M - \lambda I) = 0$ получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} SpM \pm i \left[1 - \left(\frac{1}{2} SpM \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Условие ограниченности функции $x(\tau)$ имеет вид $|SpM| \leq 2$. Полагая $SpM = 2 \cos \delta$, имеем $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\delta)$. Введем далее проекционные операторы

$$P_1 = (M - \lambda_2 I)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}, \quad P_2 = (M - \lambda_1 I)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1},$$

удовлетворяющие условиям $P_i^2 = P_i, P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0, P_1 + P_2 = I$ [14]. Так как $M = \lambda_i P_i$, то $C = M^n = \lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2$ или

$$C_{11} = \frac{1}{\sin \delta} [M_{11} \sin n\delta - \sin(n-1)\delta], \quad C_{12} = M_{12} \frac{\sin n\delta}{\sin \delta},$$

$$C_{21} = M_{21} \frac{\sin n\delta}{\sin \delta}, \quad C_{22} = \frac{1}{\sin \delta} [M_{22} \sin n\delta - \sin(n-1)\delta]. \quad (19)$$

Решение уравнения (10) следует из выражений (18) после замен $A_k^{(n)} \Rightarrow B_k^{(n)} = C'_{kj} A_j^{(0)}, B_1^{(0)} = y_0, B_2^{(0)} = \gamma v_2 / T_0$. Элементы матрицы $C' = (M')^n$ определяются соотношениями (19), где матрица M' представляет собой матрицу M , в которой произведена замена $b_1 \Rightarrow -b_1, b_2 \Rightarrow -b_2$; соответственно $\delta \Rightarrow \delta', 2 \cos \delta' = SpM$.

Общая область устойчивости решений уравнений (9), (10), определяемая системой неравенств

$$\left| 1 - b_1 + b_2 - \frac{1}{2} b_1 b_2 \right| \leq 1, \quad \left| 1 + b_1 - b_2 - \frac{1}{2} b_1 b_2 \right| \leq 1,$$

представляют собой в плоскости (b_1, b_2) криволинейный четырехугольник $OLMR$ (рис. 1), ограниченный прямыми

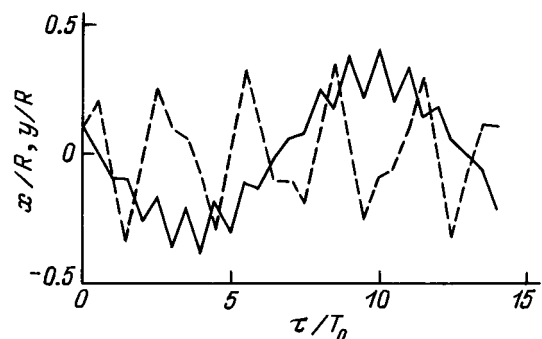


Рис. 2. Зависимости $x(\tau)$ (сплошная линия) и $y(\tau)$ (штриховая) при $b_1 = 1, b_2 = 1.75$.

$b_1 = 2$, $b_2 = 2$ и кривыми $b_2 = h(b_1)$, $b_2 = 2b_1/(2 + b_1)$, где $h(b_1) = 2b_1/(2 - b_1)$. Интересно отметить, что при $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$ параметр $\delta = \pi/2$, а решения уравнений (9), (10) являются периодическими функциями с периодом $4T/g$.

В радиочастотной масс-спектропии импульсный режим рассматривался в работе [15] для нерелятивистских ионов. Для прямой $b_2 = kb_1$ имеем $k = f_2/f_1$, т.е. угол наклона рабочей прямой определяется только параметрами прямоугольных импульсов. Оптимальный режим работы реализуется в окрестностях точек L и R . При $k = 2 - \varepsilon$ прямая отсекает от диаграммы устойчивости в окрестности точки L область ABL . Из уравнений $h(b_1) = kb_1$, $2 = kb_1$ находим координаты точек A и B : $b_{1A} = 2/k \simeq 1 + \varepsilon/2$, $b_{1B} = 2(k - 1)/k \simeq 1 - \varepsilon/2$, определяющие диапазон допустимых значений b_1 . Экстремальные значения x_m , y_m функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ зависят от величины параметров δ , δ' . При $b_1 = b_{1A}$ имеем $\delta \simeq \sqrt{2\varepsilon}$, $\delta' = \pi$. Поэтому при одних и тех же начальных условиях в случае $b_1 \sim b_{1A}$ получим $|y_m| \gg |x_m|$. На другой границе области устойчивости при $b_1 = b_{1B}$ находим $\delta = 0$, $\delta' \simeq \pi + \sqrt{6\varepsilon}$. Здесь для $b_1 \sim b_{1B}$ имеем $|y_m| \ll |x_m|$. На рис. 2 приведены зависимости $x(\tau)/R$ (сплошная линия) и $y(\tau)/R$ (штриховая линия) для средней точки $b_1 = 1$ при $\varepsilon = 0.25$, $x_0 = y_0 = 0.1R$, $v_1 = v_2 = 0$.

Пусть для заданной частоты волны величины b_{1A} и b_{1B} соответствуют значениям параметра $\eta_A = 4\pi^2 V_1/s_1 b_{1A} \omega^2 R^2$ и $\eta_B = \eta_A + \Delta\eta$. Тогда в коллектор могут попасть все ионы, для которых выполняется условие $\Delta\eta/\eta_A \leq (2 - k)/(k - 1) \simeq \varepsilon$. Для разделения ионов по параметру $\eta = mg/e$ необходимо, чтобы все ионы с различными значениями η последовательно попадали в область устойчивости. Пересечение этой области по рабочей прямой можно осуществить изменением частоты при сохранении скважности. Выберем частоту волны $\omega = \omega_A$ так, что $b_1 = b_{1A}$, т.е. $\omega_A^2 = 4\pi^2 V_1/\eta s_1 b_{1A} R^2$. Тогда при изменении частоты волны в интервале $\omega_A \leq \omega \leq \omega_B$, где $\omega_B^2 = 4\pi^2 V_1/\eta s_1 b_{1B} R^2$, ионы с соответствующим значением параметра η пересекут область устойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] Волков Д.М. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 1286.
- [2] Redmond R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 1163.
- [3] Дементьев А.С., Павленко Ю.Г. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 161.
- [4] Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1956. С. 517.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [6] Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
- [7] Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе. М.: ИЛ, 1953.
- [8] Стретт М.Д. Функции Ляме, Матъе и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: ГНТИ Украины, 1935.
- [9] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [10] Миллер М.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. Вып. 1. С. 110.
- [11] Гапонов А.В., Миллер М.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 1. С. 242.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Механика М.: ГИФМЛ, 1958. С. 119.
- [13] Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волновое распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989. С. 153.
- [14] Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1973. С. 13.
- [15] Шеретов Э.П., Терентьев В.И. // ЖТФ. 1972. Т. 52. Вып. 2. С. 953.