

01;07

Применение обобщенного метода собственных колебаний в теории лазеров

© В.Ю. Петрунькин, Б.В. Львов

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 25 января 1996 г.)

Рассматривается возможность применения в теории лазеров обобщенного метода собственных колебаний, используемого в стационарных задачах дифракции. Применение этого метода позволяет при рассмотрении открытых лазерных резонаторов избежать трудностей, связанных с экспоненциальным ростом поля на бесконечности. Развитый ранее для решения стационарных дифракционных задач обобщенный метод распространяется на случай нестационарного узкополосного процесса, что позволяет составить обычным образом уравнения, описывающие работу лазера. Различие здесь только в том, что разложение поля производится по собственным функциям ортогональным в области, занимаемой активным телом. При этом исключаются трудности, связанные с поведением поля моды на бесконечности. Кроме того, в ряде случаев обобщенные собственные функции (моды) значительно лучше соответствуют распределению поля в генерирующем лазере.

В теории лазеров используют разложение поля по собственным колебаниям (модам) [1]. Применение этого метода к лазерам, имеющим открытые резонаторы, связано с определенными трудностями, заключающимися в том, что поле собственных колебаний открытой системы экспоненциально растет на бесконечности. В настоящей работе показано, как это затруднение можно преодолеть, применяя обобщенный метод собственных колебаний [2]. Непосредственное применение этого метода затруднено тем, что он развит для решения стационарных задач дифракции, а теория лазеров формируется в виде дифференциальных уравнений. Требуется от стационарной задачи перейти к нестационарной. Суть обобщенного метода поясним на примере скалярного волнового уравнения. Рассматриваются две области v_1 и v_2 . Область v_1 — внешняя и замыкается сферой, радиус которой стремится к бесконечности, область v_2 расположена внутри и заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . В области v_1 поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta u^{(1)} + k^2 \epsilon u^{(1)} = f, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (1)$$

в области v_2 — уравнению

$$\Delta u^{(2)} + k^2 u^{(2)} = 0. \quad (2)$$

На поверхности раздела s_1 выполняются граничные условия

$$(u^{(1)} - u^{(2)})|_{s_1} = 0; \quad \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial N} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial N} \right) \Big|_{s_1} = 0, \quad (3)$$

где N — нормаль к поверхности.

На s_2 выполняются условия излучения. Собственные функции, по которым производится разложение искомого поля, находятся из решения следующей однородной

вспомогательной задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_n^{(1)} + k^2 \epsilon_n u_n^{(1)} &= 0 \quad \text{внутри } v_1, \\ \Delta u_n^{(2)} + k^2 u_n^{(2)} &= 0 \quad \text{внутри } v_2 \end{aligned} \quad (4)$$

при сохранении прежних граничных условий. Здесь собственными значениями являются ϵ_n (параметр среды), а $k = \omega/c$ задано частотой сторонних сил. Как показано в [2], функции u_n ортогональны в объеме v_1

$$\int_{v_1} u_n^{(1)} u_m^{(1)} dv = 0, \quad (5)$$

если $\epsilon_n \neq \epsilon_m$.

Решение исходной задачи (1)–(3) дается разложением по этим функциям

$$u = \sum_{(n)} b_n u_n^{(1)} \quad (6)$$

внутри v_1 , где

$$b_n = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_n} \frac{1}{k^2} \frac{\int_{v_1} u_n^{(1)} f dv}{\int_{v_1} (u_n^{(1)})^2 dv}. \quad (7)$$

Теория лазеров формулируется в виде нелинейных дифференциальных уравнений. Для применения обобщенного метода к лазерным задачам, нужно распространить его на нестационарный случай. Уравнения (1), (2), являются преобразованными по Фурье волновыми уравнениями

$$\Delta u^{(1)}(t) - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = f(t); \quad \Delta u^{(2)}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

где

$$u(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, r) e^{i\omega t} d\omega;$$

$$f(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, r) e^{i\omega t} d\omega. \quad (9)$$

Граничные условия сохраняются. Отсюда следует, что решение уравнений (8) получается из решения (1), (2) обратным преобразованием Фурье

$$u(t, r) = \sum_{(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(\omega) u_n(\omega, r) e^{i\omega t} d\omega. \quad (10)$$

В лазерных задачах $b_n(\omega)$ имеет чрезвычайно узкий спектр вблизи от ω_0 — частоты генерации, $u_n(\omega, r)$ от частоты зависят слабо. Тогда, вынося слабо зависящий множитель из-под интеграла, можно написать

$$u(t, r) \cong \sum_{(n)} u_n(\omega_0, r) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \sum_{(n)} u_n(\omega_0, r) b_n(t), \quad (11)$$

$b_n(t)$ получается обратным фурье-преобразованием выражения (7)

$$b_n(\omega) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_n(\omega)} \frac{1}{k^2} \int_{v_1} u_n(\omega, r) f(\omega, r) dv, \quad (12)$$

где u_n предполагаются нормированными

$$\int_{v_1} (u_n)^2 dv = 1.$$

Рассмотрим поведение множителя $1/(k^2(\varepsilon - \varepsilon_n(\omega)))$ от частоты. В работе [2] показано, что при $\omega \rightarrow 0$ это выражение стремится к постоянной, а при $\omega \rightarrow \infty$ убывает как $1/k^2$. При $\varepsilon - \varepsilon_n(\bar{\omega}_n) = 0$ выражение имеет особенность. Частота $\bar{\omega}_n$ для открытых систем является комплексной, корень уравнения единственный. Помножим правую и левую части равенства (12) на $\omega - \bar{\omega}_n$

$$(\omega - \bar{\omega}_n) b_n(\omega) = \frac{\omega - \bar{\omega}_n}{\varepsilon - \varepsilon_n(\omega)} \frac{1}{k^2} \int_{v_1} u_n(\omega, r) f(\omega, r) dv \quad (13)$$

и произведем обратное преобразование Фурье. При этом учтем, что $f(t)$ — узкополосная функция со спектром вблизи ω_0 , а остальные множители слабо зависят от частоты и их можно вынести из-под интеграла. Таким образом, получим

$$\frac{db_n}{dt} - i\bar{\omega}_n b_n = i \frac{\omega_0 - \bar{\omega}_n}{\varepsilon - \varepsilon_n(\omega_0)} \frac{1}{k^2} \int_{v_1} u_n(\omega_0, r) f(t, r) dv. \quad (14)$$

Учитывая еще, что $f(t)$ можно представить в виде комплексного сигнала $f(t) = F(t)e^{i\omega_0 t}$ и соответственно $b_n(t) = B_n(t)e^{i\omega_0 t}$, где $F(t)$, $B_n(t)$ медленно меняющиеся амплитуды. Подставляя это в (14), получим уравнения для комплексных амплитуд

$$\frac{dB_n}{dt} + i(\omega_0 - \bar{\omega}_n)B_n = i \frac{\omega_0 - \bar{\omega}_n}{\varepsilon - \varepsilon_n(\omega_0)} \frac{1}{k^2} \int_{v_1} u_n(\omega_0, r) F(t, r) dv. \quad (15)$$

Уравнения (14), (15) позволяют найти коэффициенты разложения для нестационарной задачи (при оговоренных ограничениях) и при помощи (10) написать решение. При постоянной амплитуде, когда $dB_n/dt = 0$, получаем прежнюю формулу (7).

Все сказанное здесь для скалярного волнового уравнения годится и для системы уравнений Максвелла [2]. По-прежнему рассматриваем две области. Область v_1 ограничена поверхностью s_1 и заполнена диэлектриком с диэлектрической постоянной ε . Вторая область v_2 — свободное пространство. Нужно найти электромагнитное поле, создаваемое заданными источниками \mathbf{j} . Внутри областей поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{H}^{(1)} - ik\varepsilon\mathbf{E}^{(1)} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \text{rot}\mathbf{E}^{(1)} + ik\mathbf{H}^{(1)} = 0 \text{ внутри } v_1;$$

$$\text{rot}\mathbf{H}^{(2)} - ik\mathbf{E}^{(2)} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{E}^{(2)} + ik\mathbf{H}^{(2)} = 0 \text{ внутри } v_2. \quad (16)$$

На границе раздела требуется непрерывность касательных составляющих полей

$$(\mathbf{E}_\tau^{(1)} - \mathbf{E}_\tau^{(2)})|_{s_1} = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau^{(1)} - \mathbf{H}_\tau^{(2)})|_{s_1} = 0. \quad (17)$$

На бесконечности должны удовлетворяться условия излучения. Если есть еще какие-либо поверхности, то на них должны удовлетворяться нулевые или импедансные условия. Собственные функции \mathbf{e}_n и \mathbf{h}_n находятся из однородной системы уравнений

$$\text{roth}_n^{(1)} - ik\varepsilon_n\mathbf{e}_n^{(1)} = 0, \quad \text{rote}_n^{(1)} + ik\mathbf{h}_n^{(1)} = 0 \text{ внутри } v_1; \quad (18)$$

$$\text{roth}_n^{(2)} - ik\mathbf{e}_n^{(2)} = 0, \quad \text{rote}_n^{(2)} + ik\mathbf{h}_n^{(2)} = 0 \text{ внутри } v_2. \quad (19)$$

Граничные условия на поверхности раздела сохраняются. Параметр ε_n является собственным числом задачи. Решение системы (18), (19) должно дать набор собственных значений и собственных функций. Как показано в [2], функции \mathbf{e}_n , \mathbf{h}_n ортогональны в объеме v_1

$$\int_{v_1} (\mathbf{e}_n \mathbf{e}_m) dv = 0, \quad \int_{v_1} (\mathbf{h}_n \mathbf{h}_m) dv = 0, \quad \text{если } \varepsilon_n \neq \varepsilon_m. \quad (20)$$

Решение задачи дается равенствами

$$\mathbf{E} = \sum_n b_n \mathbf{e}_n, \quad b_n = \frac{4\pi}{ikc} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_n} \frac{\int_{v_1} (\mathbf{j}, \mathbf{e}_n) dv}{\int_{v_1} (\mathbf{e}_n)^2 dv}. \quad (21)$$

Если повторить все рассуждения и выкладки, проделанные для скалярного волнового уравнения, получим аналогичные результаты, которые в данном случае будут иметь вид

$$\mathbf{E}(t, r) = \sum_{(n)} \mathbf{e}_n^{(n)}(\omega_0, r) B_n(t) e^{i\omega_0 t},$$

$$\frac{dB_n}{dt} + i(\omega_0 - \bar{\omega}_n) B_n = \frac{\omega_0 - \bar{\omega}_n}{\varepsilon - \varepsilon_n(\omega_0)} \frac{4\pi}{kc} \int_{v_1} (\mathbf{J}(t, r) \mathbf{e}_n^{(n)}(\omega_0, r) dv. \tag{22}$$

Здесь функция \mathbf{e}_n предполагается нормированной $\int_{v_1} (\mathbf{e}_n)^2 dv = 1$.

Уравнения (22) позволяют обычным образом сформулировать систему уравнений, описывающих работу лазера. Различие только в том, что разложение ведется по функциям, ортогональным в области, занятой активным телом. Для того чтобы уравнения (22) описывали работу лазера, необходимо обычным образом выразить $\mathbf{J}(t, r)$ через параметры активной среды и поле в резонаторе.

Применение обобщенного метода в теории лазеров является в некотором смысле более естественным, так как при этом в линейном приближении учитывается влияние активной среды на распределение поля моды. В некоторых случаях влияние усиления на удержание поля в активном теле может быть определяющим. Также

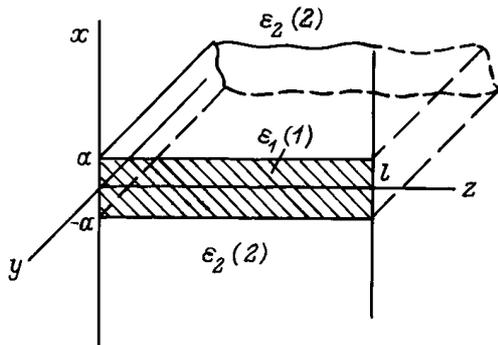


Рис. 1.

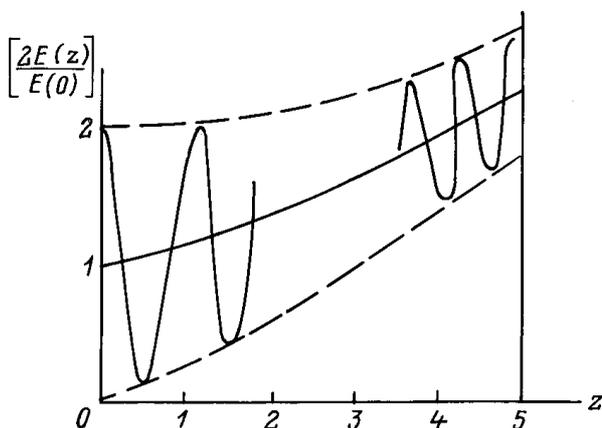


Рис. 2.

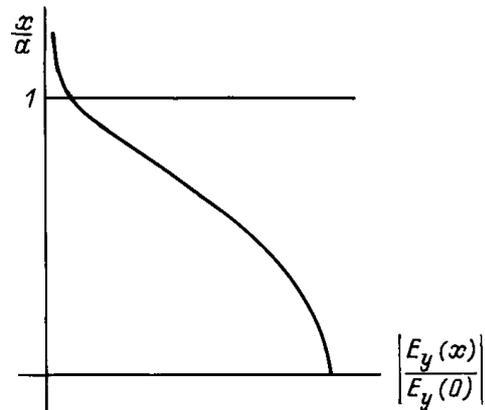


Рис. 3.

более естественно рассматривать неустойчивые резонаторы с учетом усиливающей среды внутри них. Применение изложенного метода для решения различных лазерных задач будет опубликовано в дальнейшем. Здесь только в качестве примера, показывающего существенное влияние активной среды, приведем вид основной собственной функции обобщенного метода для задачи, представленной на рис. 1. Резонатор представляет собой планарный волновод, зажатый между двумя параллельными зеркалами. Левое зеркало считается глухим, а правое — импедансное, обеспечивающее коэффициент отражения Γ . Задача плоская, т.е. поля не зависят от y . Собственные функции для этой системы можно найти, используя результаты, изложенные в [3], где рассматриваются планарные волноводы с комплексной диэлектрической проницаемостью. Расчеты проводились для следующих параметров резонатора: $a = 0.1$ см, $l = 5$ см, $\varepsilon_2 = 1$, $|\Gamma| = 0.2$, ε_1 изменялось, $\lambda_0 = 10^{-4}$ см.

На рис. 2,3 представлены результаты расчета для наиболее показательного случая $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 = 1$, когда концентрация поля в активном теле определяется только усилением среды. Рассматривался для определенности случай TE -волн. Случай TM -волн рассматривается аналогично. На рис. 2 представлена зависимость поля от продольной координаты z . Видно, что среднее поле растет в направлении к выходному зеркалу, а осцилляции, связанные с интерференцией падающей и отраженной волн, уменьшаются при удалении от глухого зеркала. Период осцилляций для наглядности увеличен. На рис. 3 представлено распределение поля в поперечном направлении (от координаты x). Видно, что, несмотря на отсутствие скачка диэлектрической проницаемости, поле концентрируется в активном теле (из-за комплексности собственного числа $\bar{\varepsilon}_n = 1 + i\varepsilon_n''$). В нашем примере $\varepsilon_n'' = 0.5 \cdot 10^{-5}$. Из рисунков видно, что действительно в некоторых случаях собственные функции обобщенного метода значительно лучше соответствуют распределению поля в генерирующем лазере, чем при использовании традиционного метода. В нашем примере частота $\bar{\omega}_n$, входящая в (22), равна $\bar{\omega}_n = 2\pi(3 \cdot 10^{14} + i0.5 \cdot 10^9) \text{ c}^{-1}$.

Список литературы

- [1] Лэмб У. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. Теория оптических лазеров. М.: Мир, 1966. С. 283–376.
- [2] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.Э., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
- [3] Karary N.S., Burke J.J. Optical Waveguides. New York; London: Academic Press, 1972.