

Краткие сообщения

01,07,12

Автоколебания в параболической системе с нелинейной внешней связью

© А.С. Рудый

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 14 марта 1995 г. В окончательной редакции 30 августа 1995 г.)

Температура является одним из наиболее трудно управляемых и в то же время наиболее важных термодинамических параметров. Регулирование температуры какого-либо объекта, будь то промышленная установка или интегральная микросхема, связано с определенными трудностями общего характера. Одна из них состоит в том, что при увеличении глубины обратной связи, необходимом для повышения точности активного термостатирования, система стабилизации температуры может терять устойчивость. Таким образом, возникает проблема определения предела устойчивости систем стабилизации и регулирования температуры. Ниже рассматривается бифуркация рождения цикла в классе систем пропорционального регулирования температуры.

1. Независимо от устройства и назначения таких систем, их всегда можно условно разделить на нелинейную внешнюю цепь обратной связи, имеющую сосредоточенные параметры, и распределенный объект управления (рис. 1). Математическую модель такой системы можно представить в виде записанной в безразмерных переменных краевой задачи теплопроводности с нелокальным граничным условием [1]

$$\dot{T}(x, t) = T''(x, t), \quad T(0, t) = 0, \quad (1)$$

$$T'(x, t)|_{x=1} = f[1 - T(x_0, t)]\sigma[1 - T(x_0, t)], \quad (2)$$

где $x_0 \in]0, 1[$, f — некоторая гладкая функция температуры; σ — функция Хевисайда, отсекающая от f ветвь положительной обратной связи.

В работе [1] рассматривался частный случай квадратичной нелинейности вида $f = [1 - T(0, 5; t)]^2$. Поскольку f может содержать кубические члены, влияющие на режим бифуркации рождения предельного цикла, то необходимо исследовать более общий случай (2) нелинейной обратной связи.

2. Рассмотрим стационарные и периодические решения краевой задачи (1), (2). Ее стационарное решение имеет вид $\bar{T}(x) = Cx$, где C — корень нелинейного уравнения

$$C = f(1 - Cx_0). \quad (3)$$

Практически для всех систем пропорционального регулирования температуры f — положительная, вогнутая

во всей области определения функция

$$\left. \begin{aligned} f[1 - T(x_0, t)] &> 0 \\ \partial f / \partial C &\equiv A < 0 \\ \partial^2 f / \partial T^2 &> 0 \end{aligned} \right\} \forall T \in [0, 1],$$

такая что $f'(0) = 0$. В силу этих условий уравнение (3) имеет единственный корень, для которого $A < 0$ и соответствующее стационарное решение устойчиво.

3. Пусть теперь на стационарном решении $\bar{T} = Cx$ установились такие автоколебания $T(x, t) = \bar{T}(x) + u(x, t)$, что $|u(x_0, t)| \ll |\bar{T}(x_0)|$. Тогда f можно разложить в ряд Тейлора по степеням нестационарной температуры $u(x_0, t)$

$$\begin{aligned} f[1 - \bar{T}(x_0) - u(x_0, t)] &= C + \frac{A}{x_0}u(x_0, t) \\ &+ f'' \frac{u^2(x_0, t)}{2!} + f''' \frac{u^3(x_0, t)}{3!} \dots +, \end{aligned} \quad (4)$$

где $f^{(n)}$ — n -я производная при $T = \bar{T}(x_0)$.

4. Рассмотрим линеаризованную на стационаре краевую задачу

$$\dot{u}(x, t) = u''(x, t),$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u'(x, t)|_{x=1} = \frac{A}{x_0}u(x_0, t). \quad (5)$$

Ее периодическим решением будет функция

$$u(x, t) = \xi \operatorname{sh}(\sqrt{i\omega x}) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

и комплексно сопряженная к ней. Условие, налагаемое обратной связью на комплексную амплитуду колебаний температуры в точках x_0 , позволяет определить критическое значение $A_c = A(\omega_c)$

$$A_c = \operatorname{Re} \sqrt{i\omega_c x_0} \operatorname{ch} \sqrt{i\omega_c} / \operatorname{sh} \sqrt{i\omega_c x_0}, \quad (7)$$

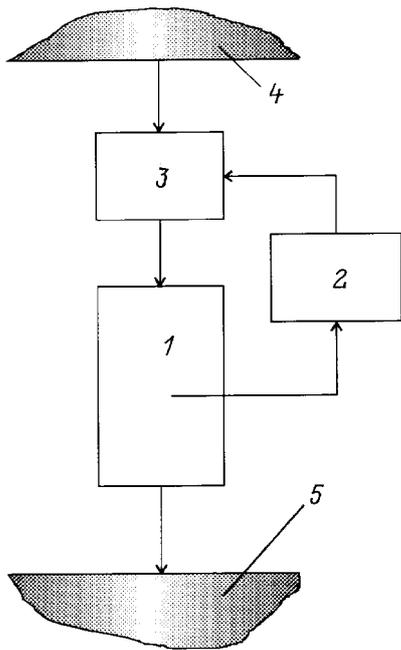


Рис. 1. Схема системы стабилизации температуры. 1 — распределенный объект управления, 2 — цепь обратной связи, 3 — регулятор, 4 — источник энергии, 5 — термостат.

где ω_c — тот из корней уравнения

$$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \sin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\operatorname{sh} (x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}) \cos (x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})} = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \sin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\operatorname{ch} (x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}) \sin (x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})}, \quad (8)$$

для которого $A(\omega_c) > A(\omega_n)$ при любых n .

5. При $A > A_c$ нулевое состояние равновесия краевой задачи (1), (2) локально экспоненциально устойчиво, а при $A < A_c$ оно теряет устойчивость колебательным образом. Пусть

$$A = A_c(1 + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (9)$$

тогда при ограничении (9) для доказательства существования и устойчивости автоколебаний у нелинейной краевой задачи (1), (2) применима бифуркационная теорема Андронова–Хопфа [2].

Введем обозначения

$$\Theta(x, t) = \frac{f''}{2} u(x, t); \quad \gamma = \frac{f'''}{(f'')^2} \quad (10)$$

и преобразуем краевую задачу (1), (2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(x, t) &= \Theta''(x, t), \quad \Theta(0, t) = 0, \\ \Theta'(x, t)|_{x=1} &= \frac{A_c(1+\varepsilon)}{x_0} \Theta(x_0, t) + \Theta^2(x_0, t) + \frac{4}{3} \gamma \Theta^3(x_0, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Полагая

$$t = (1+c)\tau; \quad c = c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + \dots; \quad \varepsilon = b_2 \xi^2 + b_4 \xi^4 + \dots,$$

$$\Theta(x, \tau) = \xi \Theta_1(x, \tau) + \xi^2 \Theta_2(x, \tau) + \dots, \quad (12)$$

получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач для определения $\Theta_1, \Theta_2, \dots$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1(x, \tau) &= \Theta_1''(x, \tau), \\ \Theta_1(0, \tau) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Theta_1'(x, \tau)|_{x=1} = \frac{A_c}{x_0} \Theta_1(x_0, \tau),$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_2(x, \tau) &= \Theta_2''(x, \tau), \\ \Theta_2(0, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

$$\Theta_2'(x, \tau)|_{x=1} = \frac{A_c}{x_0} \Theta_2(x_0, \tau) + \Theta_1^2(x_0, \tau); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_3(x, \tau) &= \Theta_3''(x, \tau) + c_2 \Theta_1''(x, \tau), \\ \Theta_3(0, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_3'(x, \tau)|_{x=1} &= \frac{A_c}{x_0} [\Theta_3(x_0, \tau) + b_2 \Theta_1(x_0, \tau)] \\ &+ 2\Theta_1(x_0, \tau)\Theta_2(x_0, \tau) + \frac{4}{3} \gamma \Theta_1^3; \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

первая из которых совпадает с задачей (5). Решение задачи (14) имеет вид

$$\Theta_2 = 2 \frac{|V_1(x_0)|^2}{1 - A_c} x + V_2(x) e^{i2\omega\tau} + V_2^*(x) e^{-i2\omega\tau}, \quad (16)$$

где

$$V_2(x) = \frac{V_1^2(x_0)}{\sqrt{i2\omega} \operatorname{ch} \sqrt{i2\omega} - (A_c/x_0) \operatorname{sh} \sqrt{i2\omega} x_0} \operatorname{sh} \sqrt{i2\omega} x, \quad (17)$$

$V_1(x)$ — решение задачи Штурма–Лиувилля для краевой задачи (5).

Из условия разрешимости

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{2} \left\{ i\omega \frac{V_1(1)}{V_1(x_0)} - \frac{A_c}{x_0} \left[x_0 \frac{V_1'(1)}{V_1(x_0)} - 1 \right] \right\} \\ + \frac{A_c}{x_0} b_2 + |V_1(x_0)|^2 \left[\frac{2}{|z|^2} + 4 \left(\gamma + \frac{x_0}{1 - A_c} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

третьей задачи последовательности найдем ляпуновские коэффициенты

$$\begin{aligned} c_2 &= 4 \frac{x_0}{A_c} |V_1(x_0)|^2 \frac{z_2}{p_2 |z|^2}, \\ b_2 &= - \frac{x_0}{A_c} |V_1(x_0)|^2 \left[\frac{2}{|z|^2} \left(z_1 + \frac{p_1}{p_2} z_2 \right) + 4 \frac{x_0}{1 - A_c} \right] \\ &- 4 \frac{x_0}{A_c} |V_1(x_0)|^2 \gamma, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$z = z_1 + iz_2 = \frac{\sqrt{i2\omega} \operatorname{ch} \sqrt{i2\omega}}{\operatorname{sh} \sqrt{i2\omega}x_0} - \frac{A_c}{x_0},$$

$$p_1 + ip_2 = 1 + \frac{x_0}{|V_1(x_0)|^2} \left[\frac{i\omega}{A_c} V_1(1)V_1^*(x_0) - V_1'(1)V_1^*(x_0) \right]. \tag{20}$$

Подставляя Θ_1 , Θ_2 и $\xi = \sqrt{\varepsilon/b_2}$ в $u(x, t) = (2/f''')[\xi\Theta_1(x, \tau) + \xi^2\Theta_2(x, \tau)]$, получим окончательный вид периодического решения задачи (1), (2)

$$u(x, t) = \frac{2}{f'''} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{b_2}} \left[V_1(x)e^{i\omega(\varepsilon)t} + V_1^*(x)e^{-i\omega(\varepsilon)t} \right] + \frac{\varepsilon}{b_2} \frac{|V_1|^2}{1-A_c} x + \frac{\varepsilon}{b_2} \left[V_2(x)e^{i2\omega(\varepsilon)t} + V_2^*(x)e^{-i2\omega(\varepsilon)t} \right] \right\},$$

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\omega_c}{1 + (c_2/b_2)\varepsilon}. \tag{21}$$

Последнее соотношение справедливо только в том случае, если коэффициент b_2 положителен и имеет место мягкая бифуркация рождения цикла, т.е. амплитуда колебаний стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Графики зависимостей $c_2(x_0)$ и $b_2(x_0, 0)$ представлены на рис. 2. Из рис. 2 и второго из соотношений (19) видно, что при $f''' > 0$ параметр b_2 всегда положителен, тогда как при $f''' < 0$ знак b_2 может быть и положительным, и отрицательным в зависимости от γ и x_0 (рис. 3). Это означает, что возможны как мягкая, так и жесткая бифуркация рождения цикла. Наконец, при $f''' = 0$ система линейна и амплитуда колебаний в закритической области бесконечна.

Результаты нелинейного анализа хорошо согласуются с общими представлениями о нелинейности как о факторе, ограничивающем амплитуду автоколебаний за счет перераспределения энергии между первой и высшими гармониками. С этой точки зрения роль квадратичной нелинейности является чисто "диссипативной", поэтому в отсутствие кубических членов в разложении (4) автоколебания в параболической системе возникают всегда мягко (рис. 2). Кубическая нелинейность более "консервативна", поскольку часть энергии возвращает в виде колебаний основной частоты. Если коэффициент при кубической нелинейности положителен, т.е. A_c и f''' имеют разные знаки, то эта дополнительная энергия поступает в противофазе с основной частотой, уменьшая тем самым амплитуду колебаний. И в этом случае автоколебания возникают мягко (рис. 3, кривая 2 — $b_2(x_0, \gamma) > b_2(x_0, 0)$ и $\xi(x_0, \gamma) < \xi(x_0, 0)$). Если же $f''' < 0$, то энергия поступает в фазе с первой гармоникой, и ее амплитуда растет $\xi(x_0, \gamma) > \xi(x_0, 0)$ (рис. 3, кривая 3). При определенном соотношении между производными и значениями x_0 возврат энергии кубической нелинейностью будет превышать ее диссипацию за период до тех пор, пока амплитуда колебаний

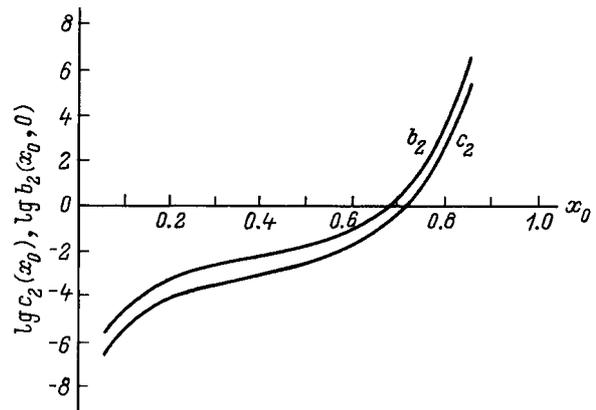


Рис. 2. Зависимость от x_0 ляпуновских коэффициентов $c_2(x_0)$, $b_2(x_0, 0)$ для системы с квадратичной нелинейностью ($\gamma = 0$).

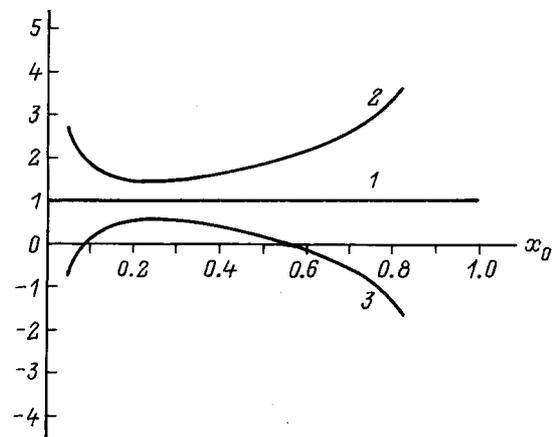


Рис. 3. Зависимость от x_0 нормированного на $b_2(x_0, 0)$ ляпуновского коэффициента $b_2(x_0, \gamma)$. γ : 1 — 0, 2 — 0.01, 3 — -0.01.

остается малой. Баланс энергии наступает, когда амплитуда автоколебаний достигает определенной (не малой) величины. Этому режиму возбуждения автоколебаний, называемому жестким, соответствует область отрицательных значений параметра b_2 на кривой 3 (рис. 3).

В подавляющем большинстве систем регулирования температуры используются источники Джоулева тепла, для которых f должна быть квадратичной функцией температуры. В действительности же f содержит ряд температурнезависимых параметров, приводящих к появлению в (4) кубических членов. По этой причине поведение систем с одинаковой схемой регулирования температуры в закритической области может существенно отличаться. Результаты настоящей работы позволяют дать однозначное объяснение этому явлению.

Список литературы

[1] Rudy A.S. // Int. J. Thermophys. 1993. Vol. 14. P. 159.
 [2] Колесов Ю.С., Швitra Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979. 149 с.

¹ В работе [1] $\omega(\varepsilon)$ и ω_c ошибочно переставлены местами.