

01;05;10;12

## Относительная роль различных факторов в формировании энергетического спектра быстрых заряженных частиц и ионов средних энергий, прошедших через тонкую мишень с учетом флуктуаций ее толщины

© Н.Н. Коборов, А.И. Кузовлев, В.А. Курнаев, В.С. Ремизович

Московский инженерно-физический институт,  
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 29 января 1996 г.)

Приведено теоретическое и экспериментальное исследование особенностей энергетических спектров протонов килоэлектрон-вольтных энергий, прошедших через свободную фольгу, в зависимости от угла падения пучка на мишень. В случае, когда угол рассеяния мал, получены аналитические выражения для средних характеристик энергетического спектра прошедших частиц. Учтено совместное влияние различных факторов, обуславливающих формирование энергетических спектров: систематического торможения частиц в среде, флуктуаций потерь энергии частиц в неупругих столкновениях, искривление траекторий частиц из-за многократного упругого рассеяния и флуктуации толщины мишени. Показано, что вклад перечисленных выше факторов в ширину энергетических спектров прошедших частиц по разному зависит от угла падения пучка на поверхность мишени. Это обстоятельство позволило по экспериментальной зависимости ширины энергетических спектров протонов килоэлектронвольтных энергий, прошедших через свободную фольгу, от угла падения пучка на мишень определить, что основную роль в формировании энергетических спектров протонов играют флуктуации потерь энергии частиц в неупругих столкновениях.

### Введение

Одной из фундаментальных физических величин является сечение взаимодействия заряженных частиц с атомом. Для быстрых заряженных частиц ( $v \gg v_{at}$ ,  $v$  — скорость налетающей частицы,  $v_{at}$  — характерная скорость электронов в атоме) сечение рассеяния хорошо изучено как теоретически, так и экспериментально. Это связано с тем, что для быстрых частиц при теоретическом описании процесса рассеяния можно использовать борновское приближение. Но даже в этом случае необходимо знать волновые функции всех состояний атома, которые, как правило, неизвестны. По этой причине особое значение имеют первый и второй моменты сечения рассеяния — удельные потери энергии  $\bar{\epsilon}_{at}(T)$  и средний квадрат потерянной энергии  $\bar{\epsilon}_{at}^2(T)$ . В случае рассеяния быстрых заряженных частиц величина  $\bar{\epsilon}_{at}(T)$  определяется формулой Бете–Блоха [1], а величина  $\bar{\epsilon}_{at}^2(T)$  — в модели свободных электронов с использованием формулы Резерфорда [2]. Что касается экспериментальной возможности измерения сечения взаимодействия быстрых частиц с атомом, то она достаточно легко реализуема. Так как длина свободного пробега частиц таких энергий весьма велика, то можно изготовить относительно тонкую мишень, при прохождении через которую частицы испытывают фактически однократное рассеяние на атомах [3] вещества.

Ситуация существенно изменяется с уменьшением энергии частиц. Уже для частиц ”средних” энергий ( $v \sim v_{at}$ ) теоретическое определение сечения рассеяния наталкивается на непреодолимые математические

трудности, которые в первую очередь связаны с тем, что для таких энергий недопустимо использование борновского приближения. Радикально возрастают и трудности экспериментального исследования сечения рассеяния. В этом диапазоне длина свободного пробега частиц уменьшается настолько, что оказывается технологически невозможным изготовить достаточно тонкие мишени, чтобы наблюдать чисто однократное рассеяние. Другими словами, в любых экспериментах для частиц таких энергий всегда присутствует процесс многократного рассеяния. Поэтому возникает принципиально иная ситуация: определение характеристик однократного рассеяния (это относится как к самому сечению, так и к  $\bar{\epsilon}_{at}(T)$ ,  $\bar{\epsilon}_{at}^2(T)$ ) требует построения соответствующей методики по извлечению необходимой информации из экспериментально измеренных энергетических спектров многократно рассеянных частиц. Последнее предполагает, что существует аналитическая теория, связывающая энергетические спектры многократно рассеянных частиц с характеристиками однократного рассеяния.

Конечно, сказанное выше вовсе не означает, что не предпринимались попытки определения основных характеристик сечения рассеяния в диапазоне ”средних” энергий. Так, величина удельных потерь энергии  $\bar{\epsilon}_{at}(T)$  в различных предположениях вычислялась в работах [4,5]. Полученная при этом зависимость  $\bar{\epsilon}_{at}(T) \sim \sqrt{T}$  достаточно хорошо совпадает с экспериментальными данными по пробегам частиц таких энергий в среде [6]. Что же касается величины  $\bar{\epsilon}_{at}^2(T)$ , то теоретические или экспериментальные данные относительно нее в диапазоне средних энергий практически отсутствуют (по крайней

мере авторы, хотя занимаются теорией переноса многие годы, не встречали в литературе данных о  $\bar{\varepsilon}_{at}^2(T)$  в этом диапазоне энергий — несколько кэВ/нуклон). Этот факт можно объяснить тем, что, как отмечалось выше, в данном диапазоне энергий рассеяние частиц в мишени носит существенно многократный характер, а попытки уменьшить толщину мишени приводят к тому, что все большую роль играют флуктуации ее толщины. До настоящего времени не существовало методик, позволяющих разделить влияние этих факторов на формирование энергетических спектров частиц (например, это принципиально невозможно при нормальном падении частиц на мишень).

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального и теоретического исследования энергетических спектров частиц при наклонном падении пучка на свободную тонкую мишень. Показано, что вклад в ширину энергетического спектра прошедших частиц от флуктуаций толщины мишени, "искривления" траекторий частиц из-за упругого рассеяния и флуктуаций неупругих потерь энергии в однократном рассеянии ( $\sim \bar{\varepsilon}_{at}^2(T)$ ) по-разному зависит от угла падения частицы на мишень. Этот факт позволяет из энергетических спектров прошедших частиц выделить величину, обусловленную именно  $\bar{\varepsilon}_{at}^2(T)$ , и в дальнейшем найти значение  $\bar{\varepsilon}_{at}^2(T)$  в данном диапазоне энергий. Таким образом, в настоящей работе указан возможный способ экспериментального определения значений  $\bar{\varepsilon}_{at}^2(T)$  в диапазоне средних энергий.

При прохождении широкого первоначально моноэнергетического пучка тяжелых заряженных частиц ( $m \gg m_e$ ,  $m$  — масса частицы,  $m_e$  — масса электрона) или ионов через мишень они теряют свою энергию и пучок перестает быть моноэнергетическим. При этом энергетический спектр частиц, прошедших через вещество, обуславливается многими факторами. К основным из них можно отнести: 1) систематическое торможение частиц в среде [7–9]; 2) вероятностный характер потерь энергии в единичном акте неупругого соударения [7–9]; 3) флуктуации длин путей частиц из-за многократного упругого рассеяния [7–9]; 4) корреляция между углом рассеяния частицы и энергией, потерянной ею в единичном акте рассеяния [10–12]; 5) отражение частиц от мишени [13]; 6) неоднородность мишени и флуктуации ее толщины [14].

Относительная роль этих факторов в формировании энергетического спектра прошедших частиц зависит от начальной энергии частиц, их массы, заряда, угла падения пучка на поверхность среды, вещества мишени и ее толщины. В реальных экспериментальных условиях часто бывает трудно заранее указать какие из факторов являются преобладающими в процессе формирования энергетического спектра прошедших частиц. Поэтому необходимо теоретическое исследование совместного влияния всех факторов.

Аналитическое рассмотрение проблемы прохождения быстрых заряженных частиц и ионов средних энергий

через вещество с учетом всех перечисленных выше факторов в настоящее время не представляется возможным из-за чрезвычайной математической сложности проблемы. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что отражением частиц от мишени можно пренебречь. Для тяжелых заряженных частиц или ионов это означает, что мы исключаем из рассмотрения случай скользящего падения, когда доля отраженных частиц может быть значительной [15–18]. Мы не будем также учитывать корреляцию между углом рассеяния частицы и потерянной ею энергией в единичном акте соударения. Влияние этого эффекта на энергетический спектр многократно рассеянных частиц теоретически изучено недостаточно и требует отдельного рассмотрения. Так, в работе [12] при описании многократного рассеяния частиц корреляция между углом рассеяния частицы и потерянной ею энергией при упругом рассеянии на ядрах атомов мишени рассматривалась лишь для случая малых потерь энергии и в пренебрежении флуктуациями длин путей частиц. Попытка объяснить в работе [11] этим эффектом обнаруженную в [10] резкую зависимость средней потерянной энергии прошедших частиц от угла наблюдения дала резкое расхождение с данными эксперимента. В дальнейшем мы лишь укажем, в каких ситуациях этот эффект может быть определяющим при формировании энергетического спектра прошедших через вещество частиц.

Что касается остальных факторов, то их влияние на энергетический спектр тяжелых заряженных частиц изучено довольно полно только в случае нормального падения пучка на мишень. Так, трансформация энергетического спектра частиц за счет систематического торможения в среде, вероятностного характера потерь энергии частиц в неупругих соударениях и искривления траектории частиц из-за многократного упругого рассеяния подробно проанализирована в работах [7–9]. В работе [14] показано, что при прохождении легких ионов киловольтных энергий через тонкую графитовую фольгу, полученную напылением в вакууме, ширина энергетического спектра прошедших ионов обуславливается в основном флуктуациями толщины пленки.

## Постановка задачи. Теоретическое рассмотрение

Пусть на плоскую мишень со средней толщиной  $L$  падает под углом  $\theta_0$  к нормали широкий пучок тяжелых заряженных частиц с энергией  $T_0$ . Плоскости  $z = 0$  и  $z = L$  совпадают с левой и правой границами мишени соответственно. Будем считать, что вектор скорости падающих частиц лежит в плоскости  $XOZ$  так, что начальный азимут  $\varphi_0 = 0$ . Направление распространения частиц будем описывать двумя углами: полярным углом  $\theta$  ( $\theta$  — угол между направлением движения частиц и осью  $Z$ ) и азимутальным углом  $\varphi$ .

Плотность потока частиц на глубине  $z$   $N(z, \theta, \varphi, T)$  удовлетворяет уравнению переноса [7–9]

$$\cos \theta \frac{\partial N}{\partial z} = \hat{I}_{el} + \hat{I}_{in}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{I}_{el}$  и  $\hat{I}_{in}$  — интегралы упругих и неупругих столкновений соответственно. Будем считать, что угол падения  $\theta_0$  не очень велик ( $\theta_0 < 60^\circ$ ), так что отраженные частицы практически отсутствуют [15–18] и их влиянием можно пренебречь. В этом случае граничное условие к уравнению (1) имеет вид

$$N(z=0, \theta, \varphi, T) = N_0 \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\varphi) \delta(T - T_0). \quad (2)$$

Упругое рассеяние тяжелых заряженных частиц происходит в основном на малые углы ( $\vartheta_{\text{эф}} \sim \lambda/r_{\text{ат}} \simeq \sqrt{m_e/m} \sqrt{13.6 \text{ эВ}/TZ^{1/3}} \ll 1$ ,  $\vartheta_{\text{эф}}$  — эффективный угол однократного рассеяния,  $\lambda$  — дебройлевская длина волны частиц,  $r_{\text{ат}}$  — характерный размер атомов среды,  $m_e$  — масса электрона,  $m$  — масса частицы,  $Z$  — порядковый номер атомов мишени). Поэтому для интеграла упругих столкновений можно использовать диффузионное приближение (приближение Фоккера–Планка) по углам [7–9]

$$\hat{I}_{el} \simeq \frac{1}{4} \langle \Theta_S^2(T) \rangle \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} N(z, \theta, \varphi, T), \quad (3)$$

где  $\langle \Theta_S^2(T) \rangle$  — средний квадрат угла рассеяния частицы с энергией  $T$  на единице пути.

Для тяжелых заряженных частиц энергия  $\varepsilon$ , теряемая в одном акте неупругого столкновения, мала по сравнению с энергией самой частицы  $T$  ( $\varepsilon \sim (m_e/m)T \ll T$ ). Поэтому интеграл неупругих столкновений запишем в приближении Фоккера–Планка [7–9]

$$\hat{I}_{in} \simeq \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z, \theta, \varphi, T) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial N}{\partial T} \right\}, \quad (4)$$

где  $\bar{\varepsilon}(T)$  — тормозная способность среды, которая в общем случае включает в себя как неупругие, так и упругие потери энергии при рассеянии частиц на атомах среды [9]  $\bar{\varepsilon}(T) = \bar{\varepsilon}_{\text{ион}}(T) + \bar{\varepsilon}_{\text{нук}}(T)$ ,  $\bar{\varepsilon}^2(T)$  — средний квадрат энергии, потерянной частицей с энергией  $T$  на единице пути.

Отметим, что использование интегралов упругих и неупругих столкновений вида (3) и (4) допустимо в области не очень высоких энергий, когда можно пренебречь ядерными взаимодействиями при столкновениях тяжелых частиц с ядрами атомов мишени. В противном случае рассеяние не носит малоуглового характер и возможны дополнительные неупругие процессы, например поглощение частиц [9].

В уравнении (1) удобно перейти от энергии  $T$  к переменной  $s = \int_T^{T_0} dT' / \bar{\varepsilon}(T')$ . В модели непрерывного

замедления [7–9] величина  $s$  представляет собой путь, проходя который частица теряет свою энергию от  $T_0$  до  $T$ . В дальнейшем мы также будем называть переменную  $s$  путем. Выполняя в (1) замену переменных, для величины  $N(z, \theta, \varphi, s) = \bar{\varepsilon}(T) N(z, \theta, \varphi, T)$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial N(z, \theta, \varphi, s)}{\partial z} &= \frac{\langle \Theta_S^2(s) \rangle}{4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} \right\} \\ &- \frac{\partial N}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^2(s)}{\bar{\varepsilon}(s)} \frac{\partial N}{\partial s} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если бы частицы двигались по прямой, то на глубине  $z$  путь, проходимый ими, равнялся бы  $z/\cos \theta_0$ . Вследствие упругого рассеяния траектории частиц не являются прямолинейными, поэтому введем переменную  $u = s - z/\cos \theta_0$ . Переходя в уравнении (5) от переменных  $z, s$  к переменным  $z', u$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \frac{\partial N(z', \theta, \varphi, u)}{\partial z'} + \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta_0} \frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{\langle \Theta_S^2(z' + u) \rangle}{4} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^2(z' + u)}{\bar{\varepsilon}(z' + u)} \frac{\partial N}{\partial u} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

До сих пор мы не делали никаких приближений, кроме диффузионного, по углам и энергиям. Для дальнейшего упрощения уравнения переноса воспользуемся теми фактами, что для тяжелых заряженных частиц упругое рассеяние носит малоугловой характер на всем пути и флуктуации потерь энергии малы [7–9]. Это означает, что путь, проходимый частицей в среде, мало отличается от  $z'$ , т.е.  $u \ll z'$ , и направления движения большинства частиц лежат в узком конусе вокруг первоначального направления  $(\theta_0, \varphi_0)$ . Так как функции  $\langle \Theta_S^2 \rangle$ ,  $\bar{\varepsilon}$  и  $\bar{\varepsilon}^2$ , входящие в уравнение (6), являются достаточно плавными функциями своих аргументов, то в них можно пренебречь величиной  $u$  по сравнению с  $z'$ , полагая

$$\begin{aligned} \langle \Theta_S^2(z' + u) \rangle &\simeq \langle \Theta_S^2(z') \rangle, \quad \bar{\varepsilon}(z' + u) \simeq \bar{\varepsilon}(z'), \\ \bar{\varepsilon}^2(z' + u) &\simeq \bar{\varepsilon}^2(z'). \end{aligned}$$

Перейдем в систему координат, полярная ось которой направлена вдоль направления первоначального движения частиц. В этой системе координат угловое распределение частиц можно описывать углами  $\alpha$  и  $\beta$ , связанными с углами  $\theta$  и  $\varphi$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \theta \cos \varphi \cos \theta_0 - \cos \theta \sin \theta_0, \\ \sin \beta &= \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

При таком определении геометрический смысл углов  $\alpha$  и  $\beta$  таков:  $\alpha$  — угол между направлением распространения частиц и плоскостью, проходящей через ось  $Y$  и вектор первоначального движения частиц;  $\beta$  — угол между направлением распространения частиц и плоскостью  $XOY$ . Малоугловой характер рассеяния тяжелых заряженных частиц означает, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  будут малы и, следовательно, можно положить

$$\sin \alpha \simeq \alpha, \quad \sin \beta \simeq \beta,$$

а углы  $\alpha$  и  $\beta$  считать изменяющимися в бесконечных пределах  $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ . При нормальном падении ( $\theta_0 = 0$ ) из (7) получаем  $\alpha \simeq \theta \cos \varphi$ ,  $\beta \simeq \theta \sin \varphi$ , т.е.  $\alpha = \theta_x$ ,  $\beta = \theta_y$ , где  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  — углы между направлением распространения частиц и плоскостями  $YOZ$  и  $XOZ$  соответственно [7–9].

Выполняя выше описанные процедуры, для плотности потока частиц  $N(z', \alpha, \beta, u)$  получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(z', \alpha, \beta, u)}{\partial z'} + \left( \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha \operatorname{tg} \theta_0 \right) \frac{\partial N}{\partial u} \\ = \frac{\langle \Theta_S^2(z') \rangle}{4} \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \beta^2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^2(z')}{(\bar{\varepsilon}(z'))^2} \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} \end{aligned} \quad (8)$$

с граничным условием

$$N(z' = 0, \alpha, \beta, u) = N_0 \delta(\alpha) \delta(\beta) \delta(u). \quad (9)$$

Переход от уравнения (5) к (8) проще всего осуществить, если учесть, что интеграл упругих столкновений инвариантен относительно операции поворота осей и поэтому имеет тот же вид, что и в случае нормального падения:  $\Delta_{\theta, \varphi} \simeq \partial^2 / \partial \theta_x^2 + \partial^2 / \partial \theta_y^2$  ( $\theta_x \rightarrow \alpha$ ,  $\theta_y \rightarrow \beta$ ). Кроме того, учтено, что

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \theta_0} \\ &\simeq \cos \theta_0 \left( 1 - \alpha \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right), \end{aligned}$$

и удержаны первые не исчезающие слагаемые по  $\alpha$  и  $\beta$ . Отметим, что в (8) мы не пренебрегли членами  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  по сравнению с  $\alpha \operatorname{tg} \theta_0$ , так как при нормальном падении ( $\theta_0 = 0^\circ$ )  $\operatorname{tg} \theta_0 = 0$ . Уравнения (8), (9) описывают процесс распространения в среде широкого пучка тяжелых заряженных частиц как при нормальном, так и при наклонном падении его на поверхность среды, при малоугловом рассеянии относительно первоначального направления движения частиц.

Уравнение (8) отличается от уравнения, описывающего распространение частиц при нормальном падении пучка на среду [7–9] слагаемым  $\alpha \operatorname{tg} \theta_0 (\partial N / \partial u)$ , которое зависит от угла падения  $\theta_0$ . Ищем решение уравнения (8) в виде

$$\begin{aligned} N(z', \alpha, \beta, u) &= \frac{N_0}{2\pi r} \int dp \frac{\exp(pu)}{\pi A(z', p)} \\ &\times \exp \left\{ C(z', p) - \frac{\beta^2 + (B(z', p) + \alpha)^2}{A(z', p)} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$  и  $\beta$ , находим

$$\begin{aligned} B(z', p) &= \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{p}{2} \int_0^{z'} dz'' A(z'', p) \right\} \right) \operatorname{tg} \theta_0, \\ C(z', p) &= \frac{p^2}{2} \int_0^{z'} dz'' \frac{\bar{\varepsilon}^2(z'')}{(\bar{\varepsilon}(z''))^2} - \frac{p}{2} \int_0^{z'} dz'' A(z'', p) \\ &+ \frac{p}{2} \left( z' - \int_0^{z'} dz'' \exp \left\{ -p \int_0^{z''} dz''' A(z''', p) \right\} \right) \operatorname{tg}^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция  $A(z', p)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dA(z', p)}{dz'} + \frac{1}{2} p A^2(z', p) = \langle \Theta_S^2(z') \rangle, \quad A(z' = 0, p) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) и его решение для быстрых заряженных частиц подробно проанализировано в [8,9].

Если бы мишень на всем своем протяжении имела бы одинаковую толщину  $L$ , то, полагая в (10)  $z' = L / \cos \theta_0$ , мы бы решили поставленную задачу. Другими словами, распределение (10) с учетом (7) и равенства

$$u = \int_T^{T_0} dT' / \bar{\varepsilon}(T') - L / \cos \theta_0$$

определяет угловой и энергетический спектр частиц, прошедших слой однородного вещества фиксированной толщины  $L$ .

Однако вполне очевидно, что толщина тонкой фольги является случайной величиной точки на ее поверхности  $L = L(x_0, y_0)$ , зависящей от способа приготовления фольги. Поэтому в случае широкого пучка частиц, падающего на мишень, вообще говоря, необходимо сначала рассмотреть распространение узкого пучка частиц, а затем провести усреднение по поперечным координатам точки влета частиц в среду. Для широкого детектора частиц, т.е. детектора, регистрирующего все частицы независимо от точки их вылета, эта процедура эквивалентна усреднению по толщине мишени  $z$

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} N(L(x_0, y_0)) \\ &= \int dz N(z) \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} \delta(z - L(x_0, y_0)) = \int dz N(z) f(z), \end{aligned}$$

где  $\Sigma$  — площадь мишени.

В приложении на примере более простой модели, когда процесс распространения частиц в среде рассматривается в приближении "прямо-вперед" [7], продемонстрирован переход от усреднения по поперечным координатам точки влета пучка к усреднению по толщине мишени. Будем считать, что плотность вероятности

$f(z)$  того, что мишень имеет толщину  $z$ , описывается нормальным законом

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta L} \exp\left\{-\frac{(L-z)^2}{2(\Delta L)^2}\right\}, \quad (13)$$

где  $L$  — средняя по поперечным направлениям толщина фольги;  $\Delta L$  — дисперсия толщины, которая для тонкой фольги зависит в основном от способа ее приготовления.

Для того чтобы можно было говорить о мишени как о плоской фольге, естественно считать, что  $\Delta L \ll L$ .

Умножая (10) на (13) и интегрируя по  $z$ , с учетом малости дисперсии распределения по толщине находим следующее выражение для плотности потока частиц, прошедших плоский слой со средней толщиной  $L$  (в дальнейшем говоря о средней толщине, будем опускать слово "средняя"):

$$N(L, \alpha, \beta, s) = \frac{N_0}{2\pi r} \int dp \frac{\exp\{p(s - L/\cos\theta_0)\}}{\pi A(L/\cos\theta_0, p)} \times \exp\left\{\frac{(\Delta L)^2}{2\cos^2\theta_0} p^2 + C(L/\cos\theta_0, p) - \frac{\beta^2 + (B(L/\cos\theta_0, p) + \alpha)^2}{A(L/\cos\theta_0, p)}\right\}. \quad (14)$$

Интегрируя распределение (14) по всем углам рассеяния  $\alpha, \beta$ , получаем выражения для энергетического спектра прошедших частиц безотносительно к углам наблюдения (широкоугольный детектор)

$$N(L, s) = \frac{N_0}{2\pi r} \int dp \exp\left\{p(s - L/\cos\theta_0) + \frac{(\Delta L)^2}{2\cos^2\theta_0} p^2 + C(L/\cos\theta_0, p)\right\}. \quad (15)$$

Видим, что даже в этом случае для нахождения энергетического спектра необходимо знать явный вид функции  $A(z', p)$  во всем диапазоне значений  $p$ . Уравнение (12) для  $A(z', p)$  является нелинейным дифференциальным уравнением типа Риккати. Его решение не может быть найдено при произвольной зависимости  $\langle\Theta_S^2(z')\rangle$ . Для ионов средних энергий до сих пор отсутствует достаточно достоверное аналитическое выражение для величины  $\langle\Theta_S^2(T)\rangle$ . Указанные обстоятельства не позволяют рассчитать величину  $A(z', p)$  для произвольных значений  $p$ . Поэтому в дальнейшем мы ограничимся вычислением только некоторых средних характеристик энергетического спектра прошедших частиц, когда нет необходимости знать явное выражение для  $A(z', p)$  при всех  $p$ .

Интегрируя распределение (15) по пройденным путям  $s$ , получаем выражение для полного потока частиц  $N(L)$ , прошедших слой толщины  $L$ ,

$$N(L) = \int_0^{R_0} ds N(L, s),$$

где  $R_0 = \int_0^{T_0} dT' / \bar{\varepsilon}(T')$  — средний пробег частиц с энергией  $T_0$  в веществе [7–9].

Если толщина мишени  $L$  удовлетворяет неравенству

$$R_0 - L/\cos\theta_0 \ll \langle\Theta_S^2(T_0)\rangle R_0^2, \quad (16)$$

то частицы практически не останавливаются в мишени [7–9]. Поэтому верхний предел интегрирования по  $s$  в формуле для  $N(L)$  можно заменить на бесконечность. Тогда находим

$$N(L) = N_0. \quad (17)$$

Таким образом, для мишеней, толщина которых удовлетворяет условию (16), полный поток прошедших частиц не зависит от их толщины и равен потоку частиц, падающих на поверхность среды.

Теперь рассмотрим средний путь, проходимый частицами в мишени, и дисперсию пройденных путей. При этом будем полагать, что толщина  $L$  удовлетворяет условию (16). Поэтому при интегрировании по  $s$  в дальнейшем будем считать верхний предел бесконечным.

а) Средний путь, проходимый частицами, и дисперсия пройденных путей безотносительно к углам наблюдения (широкоугольный детектор). При выполнении неравенства (16) для вычисления моментов распределения (15), вообще говоря, нет необходимости искать решение уравнения (12), а достаточно лишь определить значения величин  $A(z', p)$ ,  $\partial A(z', p)/\partial p$  и т.д. при  $p = 0$ . Действительно, с учетом (17) и равенства

$$\frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty du u^n \int dp \exp\{pu\} F(p) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} F(p) \Big|_{p=0},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle s \rangle_L &= \frac{L}{\cos\theta_0} - \frac{\partial}{\partial p} C(L/\cos\theta_0, p) \Big|_{p=0} \\ &= \frac{L}{\cos\theta_0} + \frac{1}{2} \int_0^{L/\cos\theta_0} dz A(z, p=0), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle (s - L/\cos\theta_0)^2 \rangle_L &= \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2\theta_0} + \frac{\partial^2}{\partial p^2} C(L/\cos\theta_0, p) \Big|_{p=0} \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial p} C(L/\cos\theta_0, p) \right)^2 \Big|_{p=0} = \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2\theta_0} + \int_0^{L/\cos\theta_0} dz \frac{\varepsilon^2(z)}{(\bar{\varepsilon}(z))^2} \\ &+ \int_0^{L/\cos\theta_0} dz \int_0^z dz' A(z', p) \text{tg}^2\theta_0 - \int_0^{L/\cos\theta_0} dz \frac{\partial}{\partial p} A(z, p) \Big|_{p=0} \\ &+ \frac{1}{4} \left( \int_0^{L/\cos\theta_0} dz A(z, p=0) \right)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая в (12)  $p = 0$ , находим, что величина  $A(z, p = 0)$  равна среднему квадрату угла рассеяния частиц, прошедших в среде путь  $s = z$ ,

$$A(z, p = 0) = \langle \theta^2 \rangle_z = \int_0^z ds \langle \Theta_s^2(s) \rangle. \quad (20)$$

Дифференцируя уравнение (12) по  $p$  и полагая затем  $p = 0$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} A(z, p) \Big|_{p=0} &= -\frac{1}{2} \int_0^z ds A^2(s, p = 0) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя соотношения (20), (21) в (18), (19), приходим к следующим выражениям для значений среднего пути  $\langle s \rangle_L$  и дисперсии путей  $D_s(L)$  безотносительно к углам наблюдения:

$$\langle s \rangle_L = \frac{L}{\cos \theta_0} + \frac{1}{2} \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle \theta^2 \rangle_s, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D_s^2(L) &= \langle (s - \langle s \rangle_L)^2 \rangle_L = \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2 \theta_0} + \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \frac{\bar{\varepsilon}^2(z)}{(\bar{\varepsilon}(z))^2} \\ &+ \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \int_0^z ds \langle \theta^2 \rangle_s \text{tg}^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2. \end{aligned} \quad (23)$$

При нормальном падении частиц на мишень ( $\theta_0 = 0$ ) выражения (22), (23) совпадают, как и должно быть, с соотношениями, приведенными в монографии [9].

Проанализируем более подробно результаты (22), (23). Первое слагаемое в (22) представляет собой тот путь, который частицы прошли бы в среде в отсутствие упругого рассеяния. Из-за рассеяния траектории частиц искривляются и средний путь, проходимый частицей в среде, увеличивается, так как в стороны больших длин путь не ограничен, а в сторону меньших ограничен толщиной рассеивателя  $L$ . Этот факт и отражает второе слагаемое в (22). Дисперсия длин путей частиц  $D_s^2(L)$  представляет собой сумму трех дисперсий, обусловленных соответственно флуктуациями толщины пленки (первое слагаемое), флуктуациями потерь энергии частиц в единичном акте неупругого рассеяния (второе слагаемое) и флуктуациями пути из-за многократного упругого рассеяния (третье и четвертое слагаемые). Так как с самого начала предполагалось, что все флуктуации малы, дисперсии, обусловленные перечисленными выше факторами, входят в (23) аддитивно.

б) Средний путь, проходимый частицами, и дисперсия пройденных

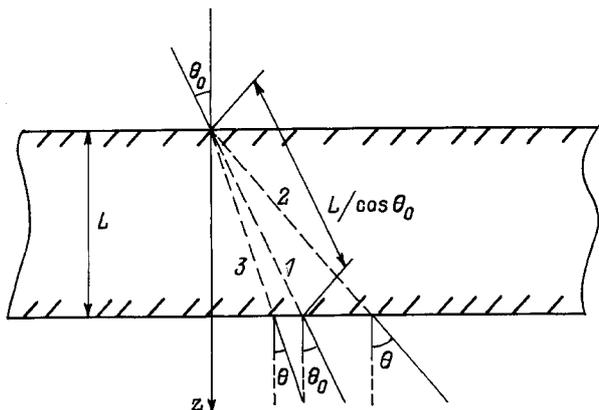
путей при фиксированных углах наблюдения (узкоугольный детектор). Аналогично предыдущему разделу, используя распределение (14), можно найти средний путь, проходимый частицами  $\langle s \rangle_{L, \theta, \varphi}$  и дисперсию пройденных путей  $D_s(L, \theta, \varphi)$  при фиксированных углах наблюдения  $\theta, \varphi$ . Для упрощения конечных результатов мы рассмотрим только случай, когда детектор регистрирует частицы в плоскости их падения, т.е.  $\varphi = \varphi_0 = 0^\circ$ . В этом случае  $\beta = 0$ ,  $\alpha \simeq \theta - \theta_0$  и мы получаем

$$\begin{aligned} \langle s \rangle_{L, \theta, \varphi=0} &= \langle s \rangle_L - \frac{1}{2 \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}} \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \\ &+ \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2 \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}^2} \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \\ &+ \frac{(\theta - \theta_0) \text{tg} \theta_0}{\langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}} \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle \theta^2 \rangle_s, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} D_s^2(L, \theta, \varphi = 0) &= D_s^2(L) - \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \frac{\langle \theta^2 \rangle_s}{\langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}} \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left( \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \frac{\langle (\theta^2)_s \rangle^2}{\langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}} \right)^2 - \frac{\text{tg}^2 \theta_0}{2 \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}} \left( \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle \theta^2 \rangle_s \right)^2 \\ &+ \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2 \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}^3} \left\{ 2 \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0} \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \langle \theta^2 \rangle_z \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \right. \\ &- \left. \left( \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \right)^2 \right\} + \frac{(\theta - \theta_0) \text{tg} \theta_0}{\langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0}^2} \\ &\times \left\{ \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0} \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_{L/\cos \theta_0} \left( \int_0^{L/\cos \theta_0} ds \langle \theta^2 \rangle_s \right)^2 \\ &- \left. \int_0^{L/\cos \theta_0} dz \langle \theta^2 \rangle_z \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\langle s \rangle_L$  и  $D_s^2(L)$  определены в (22), (23) и учтено соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} A(z', p) \Big|_{p=0} = \int_0^{z'} dz \langle \theta^2 \rangle_z \int_0^z ds \langle (\theta^2)_s \rangle^2.$$



**Рис. 1.** Условное изображение возможных "траекторий" движения частицы, влетевшей в среду под углом  $\theta_0$ . Траектории: 1 —  $\theta = \theta_0$ , 2 —  $\theta > \theta_0$ , 3 —  $\theta < \theta_0$ .

Из выражений (24), (25) видно, что в случае нормального ( $\theta_0 = 0$ ) падения частиц на мишень рассеяние всегда приводит к увеличению среднего пути частиц в мишени и увеличению дисперсии длин путей. В формулах (24), (25) остаются только квадратичные слагаемые  $\sim \theta^2$ . При наклонном ( $\theta_0 \neq 0$ ) падении частиц на мишень ситуация существенно изменяется. Если угол наблюдения  $\theta$  больше угла падения  $\theta_0$  ( $\theta > \theta_0$ ), то рассеяние приводит к увеличению этих величин, и, наоборот, при  $\theta < \theta_0$  — к уменьшению. Этот результат физически очевиден из геометрии задачи. Действительно, если детектор регистрирует частицы под углом  $\theta > \theta_0$ , то в него могут попасть только те из них, которые отклонились от направления первоначального движения в сторону верхней границы мишени, т.е. движущиеся по "вогнутым" траекториям (рис. 1). Поэтому путь, проходимый ими в среде, больше, чем  $L/\cos\theta_0$ . В обратном случае, когда частицы регистрируются под углом  $\theta < \theta_0$ , траектории их движения искривлены в сторону нижней границы, т.е. траектории их движения "выпуклые" и их путь меньше  $L/\cos\theta_0$ . Однако, несмотря на кажущуюся простоту явления, ситуация не столь тривиальна, например, при угле наблюдения  $\theta = \theta_0$ , средний путь частиц в среде отнюдь не равен  $L/\cos\theta_0$ .

### Характеристики энергетических распределений прошедших частиц

В предыдущем разделе получены средние характеристики пути, проходимого частицами в мишени. На практике же мы имеем дело с энергетическими спектрами частиц. Поэтому необходимо перейти от средних характеристик распределения по путям к характеристикам распределения по энергиям.

Энергетическое распределение частиц будем характеризовать наиболее вероятной потерянной энергией  $\Delta T_{mp} = T_0 - T_{mp}$ , где  $T_{mp}$  — энергия, при которой наблю-

дается максимум в энергетическом спектре, и шириной энергетического спектра на половине его высоты  $\Delta T_{1/2}$ .

Распределение частиц по энергии  $N(T)$  связано с распределением по путям  $N(s)$  соотношением  $N(T) = N(s(T))/\bar{\varepsilon}(T)$ . Для тяжелых частиц дисперсия распределения по путям  $D_s$  мала по сравнению со средним путем  $\langle s \rangle$  ( $D_s \ll \langle s \rangle$ ), т.е. спектр  $N(s)$  является узким. В то же время величина  $\bar{\varepsilon}(T)$  является сравнительно плавной функцией энергии частицы  $T$ . Поэтому наличие коэффициента  $(\bar{\varepsilon}(T))^{-1}$  не оказывает практически сколь-нибудь заметного влияния ни на положение максимума, ни на ширину энергетического спектра, т.е.

$$\Delta T_{mp} = T_0 - T(s_{mp}), \quad \Delta T_{1/2} = T(s_1) - T(s_2), \quad (26)$$

где  $s_{mp}$  — наиболее вероятный путь, проходимый частицами в среде; величины  $s_1$  и  $s_2$  являются корнями уравнения  $N(s) = N(s_{mp})/2$ .

В силу узости распределения  $N(s)$  ( $s_2 - s_1 \ll s_{mp}$ ) можно в окрестности его максимума  $s_1 < s < s_2$  пренебречь асимметрией  $N(s)$ , считая распределение гауссовым

$$N(s) \sim \exp \left\{ -\frac{(s - \langle s \rangle)^2}{2D_s^2} \right\}.$$

В этом случае

$$s_{mp} = \langle s \rangle, \quad s_{1,2} = \langle s \rangle \mp \sqrt{2 \ln 2} D_s. \quad (27)$$

Связь между энергией  $T$  и длиной пути  $s$  имеет различный вид  $T(s)$  для разных интервалов энергии  $T_0$  падающих частиц. Поэтому рассмотрим некоторые предельные случаи.

Если толщина рассеивателя мала  $L/\cos\theta_0 \ll R_0$ , то можно пренебречь зависимостью величин  $\bar{\varepsilon}(T)$ ,  $\bar{\varepsilon}^2(T)$  и  $\langle \Theta_S^2(T) \rangle$  от энергии. В этом случае  $T(s) = T_0 - \bar{\varepsilon}(T_0)s$  и мы получаем

$$\Delta T_{mp} = \bar{\varepsilon}(T_0)\langle s \rangle, \quad \Delta T_{1/2} = 2\sqrt{2 \ln 2} \bar{\varepsilon}(T_0)D_s, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \langle s \rangle_L \simeq \frac{L}{\cos\theta_0} + \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{4} \frac{L^2}{\cos^2\theta_0}, \\ D_s^2 &= D_s^2(L) \simeq \frac{\bar{\varepsilon}^2(T_0)}{(\bar{\varepsilon}(T_0))^2} \frac{L}{\cos\theta_0} + \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2\theta_0} \\ &+ \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{6} \frac{L^3}{\cos^3\theta_0} \text{tg}^2\theta_0 + \frac{(\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle)^2}{24} \frac{L^4}{\cos^4\theta_0} \end{aligned} \quad (29)$$

для детектора, регистрирующего частицы безотносительно к их углу вылета.

Для фиксированных углов наблюдения имеем

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \langle s \rangle_{L, \theta, \varphi=0} \simeq \frac{L}{\cos\theta_0} + \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{12} \frac{L^2}{\cos^2\theta_0} \\ &+ \frac{(\theta - \theta_0)^2}{6} \frac{L}{\cos\theta_0} + \frac{\theta - \theta_0}{2} \frac{L}{\cos\theta_0} \text{tg}\theta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_s^2 = D_s^2(L, \theta, \varphi = 0) &\simeq \frac{\bar{\varepsilon}^2(T_0)}{(\bar{\varepsilon}(T_0))^2} \frac{L}{\cos \theta_0} \\
&+ \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2 \theta_0} + \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{24} \frac{L^3}{\cos^3 \theta_0} \operatorname{tg}^2 \theta_0 \\
&+ \frac{(\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle)^2}{360} \frac{L^4}{\cos^4 \theta_0} + (\theta - \theta_0)^2 \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{90} \frac{L^3}{\cos^3 \theta_0} \\
&+ (\theta - \theta_0) \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{24} \frac{L^3}{\cos^3 \theta_0} \operatorname{tg} \theta_0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Что касается достаточно толстых рассеивателей, то в этом случае необходимо знать явную зависимость величин  $\bar{\varepsilon}(T)$ ,  $\bar{\varepsilon}^2(T)$  и  $\langle \Theta_S^2(T) \rangle$  от энергии. Так, для быстрых ( $v \gg v_{at}$ ,  $v$  — скорость частиц,  $v_{at}$  — характерная скорость электронов в атомах мишени,  $T \gg 2.5 \cdot 10^{-5} Z^{4/3} mc^2$ ,  $c$  — скорость света) тяжелых заряженных частиц в области нерелятивистских энергий  $T \ll mc^2$  эти зависимости имеют вид [9]

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(T) &= 0.3\rho \frac{Z}{A} z^2 \frac{m_e mc^4}{T} L_{\text{ion}}(T), \\
\bar{\varepsilon}^2(T) &= 0.6\rho \frac{Z}{A} z^2 (m_e c^2)^2 K(T), \\
\langle \Theta_S^2(T) \rangle &= 0.6\rho \frac{Z(Z+1)}{A} z^2 \frac{(m_e c^2)^2}{T^2} L_Q(T), \quad (31)
\end{aligned}$$

где  $L_{\text{ion}}$  — ионизационный логарифм;  $K$  — коэффициент, учитывающий связь электронов в атоме;  $L_Q$  — кулоновский логарифм;  $\rho$  — плотность вещества мишени, г/см<sup>3</sup>;  $z$  — заряд падающих частиц в единицах заряда протона;  $A$  — атомный вес атомов мишени.

Используя соотношения (31) и пренебрегая зависимостью  $L_{\text{ion}}$  и  $K$  от энергии, находим, что для быстрых нерелятивистских частиц  $T = T_0 \sqrt{1 - s/R_0}$ . Поэтому с учетом (26), (27) получаем

$$\begin{aligned}
\Delta T_{mp} &= T_0(1 - \sqrt{1 - \langle s \rangle / R_0}), \\
\Delta T_{1/2} &\simeq 2\sqrt{2 \ln 2} \bar{\varepsilon}(T_0) D_s / \sqrt{1 - \langle s \rangle / R_0}, \quad (32)
\end{aligned}$$

где  $R_0 = 0.5T_0/\bar{\varepsilon}(T_0)$  — полный пробег частиц в среде.

Для детектора, регистрирующего частицы безотносительно к их углу вылета, величины  $\langle s \rangle$  и  $D_s$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \langle s \rangle_L \simeq \frac{L}{\cos \theta_0} + \frac{1}{4} \gamma R_0 f_1 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right), \\
D_s^2 &= D_s^2(L) \simeq 2\nu R_0 \frac{L}{\cos \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \\
&+ \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{8} \gamma R_0^2 f_2 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \operatorname{tg}^2 \theta_0 \\
&+ \frac{1}{32} \gamma^2 R_0^2 f_3 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right), \quad (33)
\end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle T_0}{\bar{\varepsilon}(T_0)} \simeq 2(Z+1) \frac{m_e L_Q}{m L_{\text{ion}}},$$

$$\nu = \frac{\bar{\varepsilon}^2(T_0)}{T_0 \bar{\varepsilon}(T_0)} \simeq 2 \frac{m_e K}{m L_{\text{ion}}},$$

$$f_1(\xi) = \xi + (1 - \xi) \ln(1 - \xi),$$

$$f_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi - 2(1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi),$$

$$f_3(\xi) = 7\xi^2 - 6\xi - 6(1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi) + 2(1 - \xi)^2 \ln^2(1 - \xi).$$

В случае фиксированных углов наблюдения для величин  $\langle s \rangle$  и  $D_s$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \langle s \rangle_{L, \theta, \varphi=0} \simeq \frac{L}{\cos \theta_0} + \frac{1}{4} \gamma R_0 f_4 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \\
&+ \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 R_0 f_5 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \\
&+ (\theta - \theta_0) R_0 f_6 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \operatorname{tg} \theta_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_s^2 &= D_s^2(L, \theta, \varphi = 0) \simeq 2\nu R_0 \frac{L}{\cos \theta_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \\
&+ \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2 \theta_0} + \frac{1}{8} \gamma R_0^2 f_7 \left( \frac{L}{\cos \theta_0} \right) \operatorname{tg}^2 \theta_0 \\
&+ \frac{1}{32} \gamma^2 R_0^2 f_8 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{16} \gamma R_0^2 f_9 \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \\
&+ \frac{(\theta - \theta_0)}{8} \gamma R_0^2 f_{10} \left( \frac{L}{R_0 \cos \theta_0} \right) \operatorname{tg} \theta_0, \quad (34)
\end{aligned}$$

где

$$f_4(\xi) = 2 - \xi + \frac{2\xi}{\ln(1 - \xi)},$$

$$f_5(\xi) = \xi - 1 + 2 \frac{1 - \xi}{\ln(1 - \xi)} + \frac{2\xi}{\ln^2(1 - \xi)},$$

$$f_6(\xi) = \xi - 1 - \frac{\xi}{\ln(1 - \xi)},$$

$$f_7(\xi) = 2\xi - \xi^2 + \frac{2\xi^2}{\ln(1 - \xi)},$$

$$f_8(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 2 + \frac{5\xi(2 - \xi)}{\ln(1 - \xi)} + \frac{8\xi^2}{\ln^2(1 - \xi)},$$

$$f_9(\xi) = -2(1 - \xi)^2 + \frac{10(1 - \xi)^2}{\ln(1 - \xi)}$$

$$- \frac{\xi(21\xi - 26)}{\ln^2(1 - \xi)} + \frac{16\xi^2}{\ln^3(1 - \xi)},$$

$$f_{10}(\xi) = -2(1 - \xi)^2 - \frac{\xi(10 - 7\xi)}{\ln(1 - \xi)} - \frac{8\xi^2}{\ln^2(1 - \xi)}.$$

Параметры  $\gamma$  и  $\nu$ , введенные в (33), характеризуют флуктуации из-за многократного упругого рассеяния длин путей проходимых частицами в среде ( $\gamma \sim \langle \Theta_S^2 \rangle$ ) и флуктуации энергетических потерь из-за вероятностного характера процесса неупругих столкновений ( $\nu \sim \bar{\varepsilon}^2$ ) соответственно. Именно малость

этих параметров ( $\gamma, \nu \sim m_e/m$ ) для тяжелых частиц и обуславливает малость флуктуаций.

Как мы видим из (33), (34), вклады в полуширину энергетического спектра от флуктуаций, обусловленных различными факторами, по-разному зависят от угла падения частиц на мишень  $\theta_0$ . Это обстоятельство позволяет по зависимости  $\Delta T_{1/2}(T_0, \theta_0)$  от угла падения  $\theta_0$  определить степень влияния различных факторов на формирование энергетического спектра прошедших частиц. Отметим, что особенно важным этот метод может стать в том случае, если по энергетической зависимости  $\Delta T_{1/2}(T_0, \theta_0)$  такого разделения провести нельзя.

### Экспериментальные данные и их анализ

Эксперименты по исследованию прохождения протонов с энергиями 10–25 кэВ через свободную формваровую пленку проводились на массмонокроматоре МИФИ [19].

Пучок протонов с угловой расходимостью менее  $0.4^\circ$  падал на пленку, закрепленную на гониометре, который позволял поворачивать пленку в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Проходящие через пленку частицы регистрировались с помощью автоматизированного энергоанализатора ионов и нейтральных атомов, который мог поворачиваться относительно мишени. Он имел в своем составе интегральный по энергии детектор с регулируемой чувствительностью. Входная апертура энергоанализатора составляет  $6.8 \cdot 10^{-4}$  ср, разрешение не хуже 0.006.

Для контроля зарядки поверхности диэлектрической формваровой пленки использовалась электронная пушка, пучок из которой направлялся параллельно поверхности и падал на люминофор. По сдвигу пятна на люминофоре можно было контролировать потенциал поверхности пленки. Входные токи ионного пучка выбирались меньше  $10^{-9}$  А, что вместе со сканированием пучка позволяло исключить зарядку поверхности пленки. Дополнительный контроль потенциала с обратной стороны пленки осуществлялся по положению энергетических спектров положительной и отрицательной зарядовой фракции прошедших через фольгу ионов водорода.

Эксперименты проводились при углах падения пучка на мишень  $\theta_0 = 0, 30, 60, 70$ . Энергетические спектры прошедших частиц измерялись в плоскости падения ( $\varphi = \varphi_0$ ) для различных полярных углов  $\theta$ . Результаты экспериментов приведены на рис. 2–5.

Из экспериментальных данных видно, что ширина энергетических спектров мала по сравнению с наиболее вероятной потерянной энергией  $\Delta T_{1/2} \ll \Delta T_{mp}$ . Это обстоятельство говорит о том, что в наблюдаемой ситуации флуктуации малы. Следовательно, для анализа экспериментальных данных можно использовать результаты предыдущего теоретического рассмотрения.

Тормозная способность среды для протонов с энергией порядка 10 кэВ может быть представлена в виде

$\bar{\varepsilon}(T) = aT^\alpha$ . Из теоретического рассмотрения следует, что  $\alpha = 1/2$  [4,5,20], а из аппроксимации экспериментальных данных —  $\alpha \simeq 0.45$  [6]. Так как эти значения близки, то будем считать для простоты изложения, что тормозная способность среды для протонов с энергиями порядка 10 кэВ имеет вид

$$\bar{\varepsilon}(T) = a\sqrt{T}. \tag{35}$$

Учитывая, что флуктуации малы, в формулах (22), (24) можно пренебречь слагаемым  $\sim \langle \Theta_S^2 \rangle$ . Тогда для наиболее вероятной потерянной энергии в случае, когда ось детектора совпадает с направлением падения частиц ( $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$ ), из (26), (27) получаем

$$\frac{\Delta T_{mp}(\theta = \theta_0, \varphi = 0)}{T_0} \simeq \frac{aL}{\sqrt{T_0} \cos \theta_0} \left( 1 - \frac{aL}{4\sqrt{T_0} \cos \theta_0} \right). \tag{36}$$

Отметим, что зависимость  $\Delta T_{mp}/T_0$  от энергии падающих ионов  $T_0$  и угла падения  $\theta_0$  определяется их комбинацией  $\sqrt{T_0} \cos \theta_0$ .

На рис. 2 представлено сравнение зависимости (36) с экспериментальными данными. Значение величины  $aL = 1.2$  было найдено аппроксимацией экспериментальных данных в случае нормального падения частиц на среду ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) зависимостью (36) по методу наименьших квадратов. Видим, что теоретическая кривая достаточно хорошо совпадает с экспериментальными данными. Отличие кривой (36) от экспериментальных данных при угле падения пучка на мишень  $\theta_0 = 60^\circ$  можно объяснить как неточностью зависимости (35), так и тем, что при таких углах падения пучка на мишень для протонов с энергией  $T_0 < 15$  кэВ уже нельзя пренебрегать отражением частиц от мишени [18].

К сожалению, достоверные теоретические или экспериментальные данные о зависимости  $\bar{\varepsilon}^2(T)$  и  $\langle \Theta_S^2(T) \rangle$  от

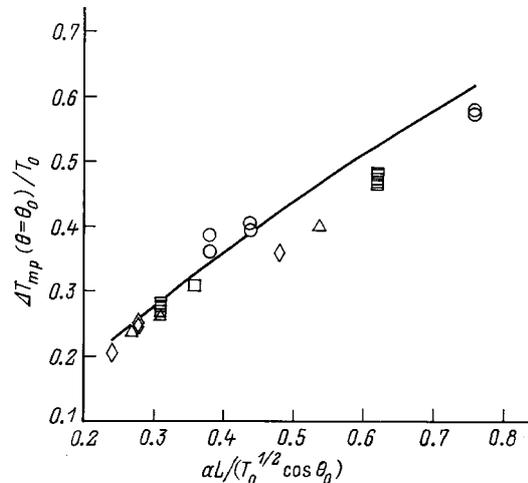
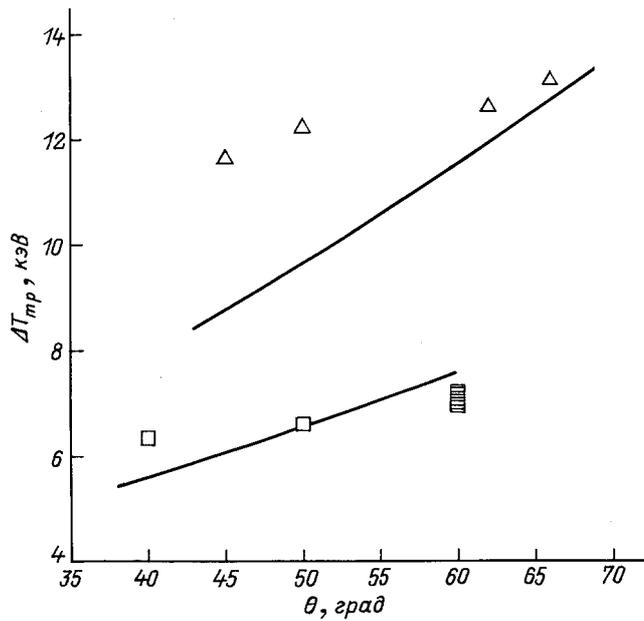


Рис. 2. Наиболее вероятные потери энергии широкого пучка протонов при прохождении через свободную формваровую пленку. Углы падения пучка на мишень  $\theta_0 = 0, 30, 60^\circ$ . Энергия, кэВ:  $\circ$  — 10,  $\square$  — 15,  $\triangle$  — 20,  $\diamond$  — 25.



**Рис. 3.** Зависимость наиболее вероятной потерянной энергии широкого пучка протонов, прошедших через свободную формваровую пленку, от угла наблюдения. Экспериментальные значения: □ —  $T_0 = 15$  кэВ,  $\theta_0 = 60^\circ$ , △ —  $T_0 = 20$  кэВ,  $\theta_0 = 70^\circ$ . Сплошные линии — расчет по формуле (37).

энергии  $T$  для протонов килоэлектрон-вольтных энергий в литературе отсутствуют. Поэтому для дальнейшего анализа экспериментальных данных мы будем использовать соотношения (28), (30). Это тем более оправдано, что в данном диапазоне начальных энергий  $T_0$  и углов падения  $\theta_0$  величина  $L/R_0 \cos \theta_0$  невелика ( $L/(R_0 \cos \theta_0) \simeq aL/(2\sqrt{T_0} \cos \theta_0) < 0.4$ ), т.е. реализуется случай относительно тонкого рассеивателя.

В этом приближении зависимость наиболее вероятной потерянной энергии от угла наблюдения  $\theta$  при угле падения  $\theta_0$  принимает вид

$$\Delta T_{mp}(\theta, \theta_0) \simeq \frac{aL\sqrt{T_0}}{\cos \theta_0} \left( 1 + \frac{1}{6}(\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) \operatorname{tg} \theta_0 \right). \quad (37)$$

Отметим, что (37) переходит при  $\theta = \theta_0$  в формулу (36), если в последней пренебречь вторым слагаемым в скобках, которое учитывало зависимость  $\bar{\varepsilon}(T)$  от энергии  $T$  (35).

Структура выражения (37) очень похожа на ту, которая получается, если для оценки величины  $\Delta T_{mp} \simeq \bar{\varepsilon}(T_0) \langle s \rangle$  сделать достаточно грубое предположение, что частицы, вылетающие под углом  $\theta$  из мишени, проходят в ней средний путь, равный  $L/\cos \theta$  ( $\langle s \rangle \simeq L/\cos \theta$ ). Разлагая здесь  $\cos \theta$  вблизи  $\theta_0$ , получим  $\Delta T_{mp} \simeq \bar{\varepsilon}(T_0)L(1 + (\theta - \theta_0)^2/2 + (\theta - \theta_0) \operatorname{tg} \theta_0)/\cos \theta_0$ . Сравнивая эту формулу с выражением (37), видим, что, несмотря на одинаковую структуру этих выражений, они сильно отличаются количественно из-за совершенно разных численных коэффициентов. Подчеркнем,

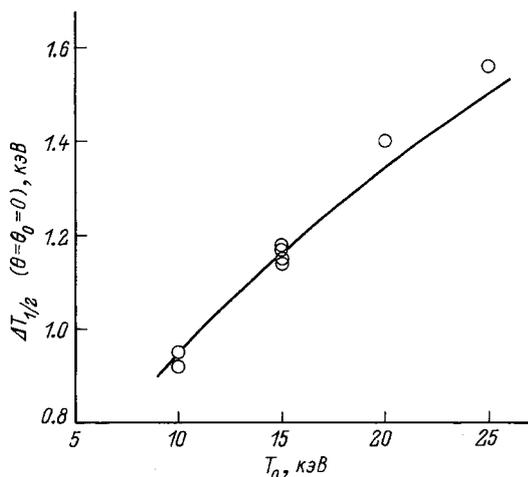
что численные коэффициенты в (37) получены из общего выражения (24) в предположении тонкого рассеивателя ( $L/\cos \theta_0 \ll R_0$ ). В общем же случае эти коэффициенты являются достаточно сложными функциями величины  $\xi = L/(R_0 \cos \theta_0)$ . Например, для быстрых нерелятивистских частиц, как следует из (34), коэффициент при  $(\theta - \theta_0)^2$  определяется функцией  $f_5(\xi)$ , а коэффициент при  $(\theta - \theta_0)$  — функцией  $f_6(\xi)$ .

На рис. 3 представлено сравнение зависимости (37) с экспериментальными данными. Видим, что экспериментальные значения в области углов наблюдения  $\theta_0 - \theta > 20^\circ$  сильно превышают теоретические результаты. Это, по всей видимости, обусловлено тем, что мы использовали диффузионное приближение по углам (3) для интеграла упругих столкновений. Приближение хорошо описывает процесс распространения частиц в области относительно малых углов рассеяния, где сосредоточена основная масса частиц, и сильно занижает результаты в области относительно больших углов рассеяния [21]. В [21] показано, что рассеяние на относительно большие углы происходит эффективно за счет однократного рассеяния. В этом случае необходимо учитывать корреляцию между углом рассеяния частицы и потерянной ею энергией в единичном акте упругого рассеяния. Поэтому причиной отличия (37) от экспериментальных данных могут быть как использование диффузионного приближения по углам в интеграле упругих столкновений (вне рамок этого приближения в настоящее время отсутствует теория, позволяющая корректно учесть искривление траекторий частиц из-за многократного упругого рассеяния), так и пренебрежение корреляцией между углом рассеяния частицы, и потерянной ею энергией в единичном акте упругого столкновения.

Для ширины энергетического спектра прошедших частиц в случае, когда ось детектора совпадает с направлением падения частиц ( $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$ ), из (28), (30) с учетом (35) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta T_{1/2}(\theta = \theta_0, \varphi = 0) \simeq & 2\sqrt{2 \ln 2} a \sqrt{T_0} \left\{ \frac{(\Delta L)^2}{\cos^2 \theta_0} \right. \\ & + \frac{\bar{\varepsilon}^2(T_0)}{(\bar{\varepsilon}(T_0))^2} \frac{L}{\cos \theta_0} + \frac{\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle}{24} \frac{L^3}{\cos^3 \theta_0} \operatorname{tg}^2 \theta_0 \\ & \left. + \frac{(\langle \Theta_S^2(T_0) \rangle)^2}{360} \frac{L^4}{\cos^4 \theta_0} \right\}^{1/2}. \quad (38) \end{aligned}$$

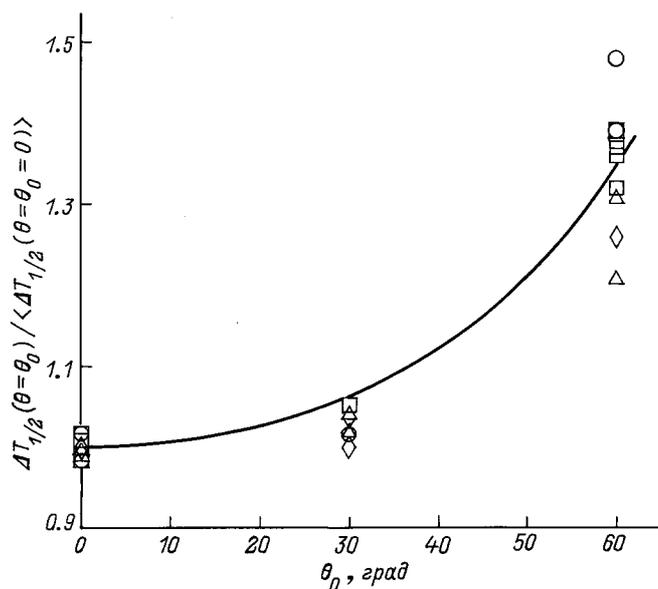
На рис. 4 приведены экспериментальные значения величины  $\Delta T_{1/2}$  в случае нормального падения частиц на мишень ( $\theta_0 = 0$ ). На этом рисунке приведена также зависимость  $\Delta T_{1/2} \sim \sqrt{T_0}$  (сплошная линия). Мы видим, что зависимость  $\Delta T_{1/2} \sim \sqrt{T_0}$  довольно хорошо совпадает с экспериментальными данными. На первый взгляд это совпадение говорит о том, что основную роль в формировании ширины энергетического спектра частиц играют флуктуации толщины пленки (первое слагаемое под радикалом в формуле (38), которое не



**Рис. 4.** Зависимость ширины энергетического спектра широкого пучка протонов, прошедших через свободную формваровую пленку, от начальной энергии  $T_0$ .

зависит от энергии  $T_0$ ). Однако, так как мы не знаем зависимостей  $\bar{\varepsilon}^2(T_0)$  и  $\langle \Theta_{\bar{\varepsilon}}^2(T_0) \rangle$  от энергии, не будем спешить с выводами. Например, может оказаться, что отношение  $\bar{\varepsilon}^2(T_0)/\bar{\varepsilon}(T_0)^2$  также не зависит от  $T_0$ . Поэтому рассмотрим зависимость  $\Delta T_{1/2}$  от угла падения  $\theta_0$ .

На рис. 5 приведены экспериментальные значения величины  $\Delta T_{1/2}(\theta = \theta_0, \varphi = 0) / \langle \Delta T_{1/2}(\theta = \theta_0 = 0, \varphi = 0) \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  указывает на среднее экспериментальное значение при фиксированной начальной энергии  $T_0$ . На этом рисунке приведена также аппроксимация экспериментальных данных зависимостью  $1/\cos^\beta \theta_0$ , где



**Рис. 5.** Зависимость ширины энергетического спектра широкого пучка протонов от угла падения пучка на свободную формваровую пленку. Сплошная кривая — аппроксимация экспериментальных данных зависимостью  $\cos^{-\beta} \theta_0$  при  $\beta = 0.43$ . Энергия, кэВ:  $\circ$  — 10,  $\square$  — 15,  $\triangle$  — 20,  $\diamond$  — 25.

значение  $\beta \simeq 0.43$  было найдено методом наименьших квадратов. Значение величины  $\beta$  близко к 1/2. На основании (38) из этого можно сделать вывод, что основной вклад в формирование  $\Delta T_{1/2}$  дают флуктуации потерь энергии в единичном акте неупругого рассеяния (второе слагаемое под радикалом (38)). Небольшое отличие величины  $\beta$  от 1/2 можно объяснить тем, что в (38) не учитывается зависимость  $\bar{\varepsilon}(T)$  и  $\bar{\varepsilon}^2(T)$  от энергии.

Таким образом, из приведенного анализа следует, что влияние на ширину энергетического спектра прошедших частиц флуктуаций длин их путей из-за многократного упругого рассеяния и флуктуаций толщины пленки мало по сравнению с влиянием флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях. Если о влиянии флуктуаций длин путей частиц это утверждение можно было сделать заранее [8,9], так как эффективное значение  $Z$  для формваровой пленки невелико ( $Z_{\text{эф}} \sim 7$ ), то о влиянии флуктуаций толщины пленки без анализа зависимости  $\Delta T_{1/2}$  от угла падения  $\theta_0$  этого сказать было нельзя. Наоборот, анализ энергетической зависимости  $\Delta T_{1/2}$  при нормальном падении частиц ( $\theta_0 = 0$ ) подталкивал нас к выводу, что флуктуации толщины пленки велики. Теперь же мы видим, что в условиях рассматриваемого эксперимента именно вероятностный характер неупругих столкновений доминирует в формировании ширины энергетического спектра прошедших частиц.

### Заключение

В настоящей работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование особенностей энергетических спектров протонов килоэлектронвольтовых энергий, прошедших через свободную фольгу, в зависимости от угла падения пучка на мишень.

В случае, когда угол наблюдения  $\theta$  не сильно отличается от угла падения  $\theta_0$ , т. е. угол рассеяния мал, получены аналитические выражения для средних характеристик энергетического спектра прошедших частиц или ионов. Учтено совместное влияние различных факторов, обуславливающих формирование энергетических спектров: систематического торможения частиц в среде, флуктуаций потерь энергии частиц в неупругих столкновениях, искривление траекторий частиц из-за многократного упругого рассеяния и флуктуации толщины мишени. Показано, что вклад перечисленных выше факторов в ширину энергетических спектров прошедших частиц по-разному зависит от угла падения пучка на поверхность мишени. Это обстоятельство позволяет по экспериментальной зависимости ширины энергетических спектров от угла падения  $\theta_0$  определить, какие из этих факторов являются доминирующими в формировании энергетических спектров частиц. Это особенно важно в тех случаях, когда неизвестна зависимость рассеивающих и тормозящих свойств среды от энергии (например, для ионов средних энергий).

Различные зависимости слагаемых в выражении для ширины энергетического спектра от угла падения  $\theta_0$  позволяют фактически решать обратную задачу теории переноса, т.е. из экспериментальных данных по прохождению частиц извлечь информацию об элементарных процессах упругих и неупругих столкновений.

Авторы выражают благодарность Д.Б. Рогозкину за интерес к работе и многочисленные обсуждения затронутых здесь вопросов.

### Приложение

Прохождение широкого пучка частиц через плоскую однородную мишень, толщина которой является случайной величиной точки на ее поверхности. Приближение "прямо-вперед". Рассмотрим прохождение широкого пучка частиц через однородную мишень, поверхности которой являются не плоскими, а имеют случайный рельеф. В среднем поверхности мишени параллельны (рис. 6). В этом смысле мишень можно называть плоской. Направим ось  $Z$  перпендикулярно мишени (т.е. перпендикулярно усредненным поверхностям мишени) сверху вниз, тогда верхнюю и нижнюю поверхности мишени можно описать случайными функциями  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  соответственно. Направление движения падающих частиц будем описывать полярным углом  $\theta_0$  и азимутальным углом  $\varphi_0$ . Выберем ось  $X$  так, чтобы вектор скорости падающих частиц лежал в плоскости  $ZOX$ , тогда азимутальный угол падения равен нулю ( $\varphi_0 = 0$ ).

Широкий пучок частиц можно представить в виде суперпозиции узких пучков. Поэтому рассмотрим сначала прохождение узкого пучка частиц через такую мишень. В приближении "прямо-вперед" направления движения частиц не изменяются и уравнение переноса для плотности потока частиц в узком пучке  $N(z, x, y, T|x_0, y_0, T_0)$

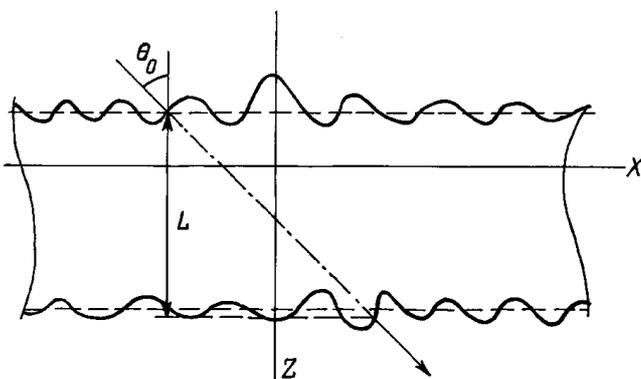


Рис. 6. Условное изображение прохождения узкого пучка частиц через мишень, поверхности которой имеют случайный рельеф.

имеет вид [7]

$$\cos \theta_0 \frac{\partial N(z, x, y, T|x_0, y_0, T_0)}{\partial z} + \sin \theta_0 \frac{\partial N}{\partial x} = \hat{I}_{in}[N]\eta(f_2(x, y) - z). \tag{П1}$$

Здесь  $\hat{I}_{in}[N]$  — интеграл неупругих столкновений. В уравнении (П1) учтено, что азимутальный угол равен нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), а функция

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0 \end{cases},$$

учитывает тот факт, что вне мишени рассеяние отсутствует. Граничное условие к уравнению (П1) имеет вид

$$N(z = f_1(x_0, y_0), x, y, T|x_0, y_0, T_0) = N_0 \delta(T_0 - T) \delta(x_0 - x) \delta(y_0 - y). \tag{П2}$$

Оно описывает тот факт, что на верхнюю поверхность мишени в точке  $(x_0, y_0)$  падает узкий пучок частиц с начальной энергией  $T_0$ .

Так как в приближении "прямо-вперед" частицы движутся по прямой, то на любой глубине  $z$  их координаты описываются уравнениями  $x = x_0 + (z - f_1(x_0, y_0)) \text{tg} \theta_0$ ,  $y = y_0$ . Если к тому же учесть, что при  $z > f_2(x_0, y_0)$  рассеяние отсутствует, то плотность потока частиц  $N(z, x, y, T|x_0, y_0, T_0)$  можно представить в виде

$$N(z, x, y, T|x_0, y_0, T_0) = \tilde{N} \left( \int_{f_1(x_0, y_0)}^z dz' \eta \{ f_2(x_0 + (z' - f_1(x_0, y_0)) \text{tg} \theta_0, y_0) - z' \}; T|T_0 \right) \times \delta(x - x_0 - (z - f_1(x_0, y_0)) \text{tg} \theta_0) \delta(y_0 - y), \tag{П3}$$

где  $\tilde{N}(z, T|T_0)$  — плотность потока частиц в широком пучке, распространяющемся в мишени с плоскими границами.

Действительно, подставляя (П3) в (П1), (П2), получаем

$$\cos \theta_0 \frac{\partial \tilde{N}}{\partial z} = \hat{I}_{in}[\tilde{N}], \quad 0 < z < L, \\ \tilde{N}(z = 0, T|T_0) = \delta(T - T_0). \tag{П4}$$

Здесь  $L$  — толщина мишени, удовлетворяющая уравнению

$$L = f_2(x_0 + (L - f_1(x_0, y_0)) \text{tg} \theta_0, y_0) - f_1(x_0, y_0). \tag{П5}$$

Мы видим, что толщина мишени  $L(x_0, y_0)$  является случайной величиной точки влета частицы  $(x_0, y_0)$ . Таким образом, плотность потока частиц, прошедших через

мишень, в случае узкого падающего пучка имеет вид

$$\begin{aligned} N_{tr}(x, y, T|x_0, y_0, T_0) &= N(z > f_2(x, y); x, y, T|x_0, y_0, T_0) \\ &= \tilde{N}(L(x_0, y_0), T|T_0)\delta(x - x_0) \\ &\quad - (z - f_1(x_0, y_0))\text{tg } \theta_0 \delta(y_0 - y). \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Если детектор регистрирует все частицы, прошедшие через мишень, т.е. является широким, то, усредняя распределение (П6) по координатам  $x, y$ , получаем

$$\begin{aligned} N_{tr}(T|x_0, y_0, T_0) &= \int \frac{dx dy}{\Sigma} N_{tr}(x, y, T|x_0, y_0, T_0) \\ &= \frac{1}{\Sigma} \tilde{N}(L(x_0, y_0), T|T_0). \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Здесь  $\Sigma$  — площадь усредненной поверхности мишени. Теперь, переходя от узкого пучка частиц к широкому пучку, находим

$$\begin{aligned} N_{tr}(T|T_0) &= \int dx_0 dy_0 N_{tr}(T|x_0, y_0, T_0) \\ &= \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} \tilde{N}(L(x_0, y_0), T|T_0) \\ &= \int dz \tilde{N}(z, T|T_0) \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} \delta(z - L(x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

Если ввести плотность вероятности  $f(z)$  того, что мишень имеет толщину  $z$ , с помощью соотношения

$$f(z) = \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} \delta(z - L(x_0, y_0)), \quad (\text{П9})$$

то мы получаем, что плотность потока частиц, прошедших через мишень, границы которой являются не плоскими, а имеют случайный рельеф, можно найти по следующей формуле:

$$N_{tr}(T|T_0) = \int dz f(z) \tilde{N}(z, T|T_0). \quad (\text{П10})$$

Покажем, что функция  $f(z)$ , определяемая соотношением (П9), является плотностью вероятности того, что мишень имеет толщину  $z$ . Интегрируя (П9) по  $z$ , находим, что функция  $f(z)$  нормирована на единицу

$$\begin{aligned} \int dz f(z) &= \int dz \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} \delta(z - L(x_0, y_0)) \\ &= \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} = 1. \end{aligned}$$

Умножая (П9) на  $z$  и интегрируя по  $z$ , получаем

$$\begin{aligned} \int z dz f(z) &= \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} L(x_0, y_0) \\ &= \int \frac{dx_0 dy_0}{\Sigma} (f_2(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0)) = \langle f_2 \rangle - \langle f_1 \rangle. \end{aligned}$$

Видим, что  $f(z)$  в самом деле является плотностью вероятности.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
- [2] Росси Б. Частицы больших энергий. М.: Гостехтеориздат, 1955.
- [3] Малеев С.В., Таперверг Б.П. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. Вып. 1. С. 315.
- [4] Фирсов О.Б. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1517.
- [5] Lindhard J., Scharff M. // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 128.
- [6] Andersen H.H., Ziegler J.F. Hydrogen Stopping Powers and Ranges in All Elements. New York: Academic Press, 1977.
- [7] Калашиников Н.П., Ремизович В.С., Рязанов М.И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.: Атомиздат, 1980.
- [8] Ремизович В.С., Rogozkin Д.Б., Рязанов М.И. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 929–981.
- [9] Ремизович В.С., Rogozkin Д.Б., Рязанов М.И. Флуктуации пробега заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат. 1988. 240 с.
- [10] Iohiwari R., Shiomi N., Sakamoto N. Phys. Rev. 1982. Vol. A25. P. 2524.
- [11] Gras-Marti A. // NIM. 1985. Vol. B9. P. 1.
- [12] Ремизович В.С., Rogozkin Д.Б., Фролов В.В. // Атомная энергия. 1986. Т. 61. С. 256–260.
- [13] Kuzovlev A.I., Remizovich V.S. // Phys. Rev. 1993. Vol. A48. P. 465–470.
- [14] Курнаев В.А. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 1. С. 625–629.
- [15] Кузовлев А.И., Ремизович В.С. // ДАН. 1982. Т. 266. С. 1118–1123.
- [16] Кузовлев А.И., Ремизович В.С. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 12. С. 710–713.
- [17] Курнаев В.А., Машкова Е.С., Молчанов В.А. Отражение легких ионов от поверхности твердого тела. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [18] Коборов Н.Н., Кузовлев А.И., Курнаев В.А., Ремизович В.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 20. С. 6–9.
- [19] Коборов Н.Н., Курнаев В.А., Урусов В.А. Взаимодействие ионов и плазмы с поверхностью твердого тела. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [20] Готт Ю.В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. М.: Атомиздат, 1978. 272 с.
- [21] Компанец А.С. // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. Вып. 6. С. 236.