

01;03

О влиянии гетерогенных химических реакций на скорость скольжения неоднородной многокомпонентной газовой смеси

© Е.И. Алехин, И.Н. Головкина, Ю.И. Яламов

Московский педагогический университет,
107005 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 4 декабря 1995 г.)

При построении теории термодиффузиофореза летучих аэрозольных частиц необходимо иметь граничные условия для касательной компоненты скорости, в которых учитывалось бы наличие гетерогенных химических реакций. В настоящее время имеется ряд работ, авторами которых получены такого рода условия [1-3]. В работе [1] для результатов получены аналитические выражения, однако для вычислений авторами был использован фактически метод Максвелла, точность которого невелика. В работах [2,3] авторы воспользовались методом сращиваемых асимптотических разложений, что не позволило получить достаточно простых аналитических выражений. В настоящей работе скорость скольжения вычислена методом Лоялки. Для коэффициентов скольжения получены аналитические выражения, приведены результаты численных расчетов. Показано, что при наличии градиентов концентраций компонент газовой смеси вдоль поверхности частицы в скорости скольжения могут возникнуть новые слагаемые, обусловленные изменением коэффициента "прилипания" вдоль поверхности катализатора. Приведены выражения для этих слагаемых в конечном виде.

Постановка задачи

Вывод макроскопических граничных условий для уравнений газовой динамики должен основываться на решении кинетических уравнений в слое Кнудсена [4-8].

Рассмотрим движение неоднородной по температуре и концентрации N -компонентной газовой смеси вблизи плоской поверхности катализатора. Выберем ось Ox нормально к этой поверхности, ось Oy направим вдоль заданных градиентов температуры смеси (dT/dy) и относительных концентраций компонент (dc_i/dy). Газ заполняет полупространство $x > 0$.

Для описания течения газовой смеси в слое Кнудсена будем использовать уравнение Больцмана [9]

$$v_i \nabla f_i = \sum_j \int (f'_i f'_j - f_i f_j) g b db d\varepsilon d^3 v_i, \quad (1)$$

где f_i — функция распределения молекул i -ой компоненты, \mathbf{g} — относительная скорость сближения двух молекул, b — прицельный параметр столкновения, ε — азимутальный угол, v_i — скорость движения молекулы.

На практике обычно приходится иметь дело с такими смесями, в которых относительные перепады температуры, концентраций компонент и среднемассовой скорости на длине свободного пробега значительно меньше единицы. Скорость же гетерогенной реакции лимитируется медленными процессами диффузии компонент смеси к поверхности. При этих условиях можно линеаризовать функции распределения f_i около локальной максвелловской функции распределения

$$f_i = f_{i0}(1 + \varphi_i), \quad (2)$$

где

$$f_{i0} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i V_i^2}{2kT} \right), \quad (3)$$

φ_i — малая добавка к максвелловской функции распределения, пропорциональная первым степеням градиентов скорости, температуры и концентрации.

Подставив (2) в (1), получим следующую систему линеаризованных кинетических уравнений:

$$v_{xi} f_{i0} \frac{d\varphi_i}{dx} + v_{yi} f_{i0} \left(\frac{1}{c_i} \left(\frac{dc_i}{dy} \right) - S_{3/2}^1 \left(\frac{d \ln T}{dy} \right) \right) = - \sum_j n_j n_j I_{ij} (\varphi_i + \varphi_j), \quad (4)$$

где

$$I_{ij} (\varphi_i + \varphi_j) = \frac{1}{n_i n_j} \int f_{i0} f_{j0} (\varphi_i + \varphi_j - \varphi'_i - \varphi'_j) g b db d\varepsilon d^3 v_i$$

— линеаризованный интеграл столкновений [9], $S_{3/2}^1 = 5/2 - w_i^2$ — полином Сонина порядка 3/2 [9], $w_i = \sqrt{m_i/2kT} v_i$ — приведенная скорость движения молекул.

Вычисление коэффициентов скольжения

Для определения скорости скольжения необходимо решить систему уравнений (4) с учетом кинетических граничных условий. На большом расстоянии от поверхности решение системы уравнений (4) имеет следующий вид:

$$\varphi_{i\infty} = \left(\frac{2m_i}{kT} \right)^{1/2} w_{yi} U(x) + \varphi_i^{CE}(w_i), \quad (5)$$

где $\varphi_i^{CE}(w_i)$ — функция Чепмена–Энскога [9]

$$\varphi_i^{CE}(w_i) = \frac{1}{n} w_{yi} A_i(w_i) \left(\frac{d \ln T}{dy} \right) + \frac{1}{n} w_{yi} \sum_j C_i^j(w_i) \left(\frac{dc_j}{dy} \right) + \frac{1}{n} w_{xi} w_{yi} B_i(w_i) \left(\frac{dU}{dx} \right). \quad (6)$$

Здесь $A_i(w_i)$, $C_i^j(w_i)$, $B_i(w_i)$ — тепловые, диффузионные и вязкостные функции [9]; $U(x=0)$ — искомая скорость скольжения. В функции распределения (6) удержаны лишь те слагаемые, которые дают ненулевой вклад в скорость скольжения. Решая задачу методом Лоялки [10], полагаем, что функция распределения падающих молекул на нижней границе слоя Кнудсена ($x=0$) может быть представлена в следующей форме:

$$\varphi_i^- = \left(\frac{2m_i}{kT} \right)^{1/2} w_{yi} \beta + \frac{1}{n} w_{yi} A_i(w_i) \left(\frac{d \ln T}{dy} \right) + \frac{1}{n} w_{yi} \sum_j C_i^j(w_j) \left(\frac{dc_j}{dy} \right) + \frac{1}{n} w_{xi} w_{yi} B_i(w_i) \left(\frac{dU}{dx} \right), \quad (7)$$

где β — некоторая неизвестная величина.

Функцию распределения молекул, летящих от поверхности катализатора, при наличии гетерогенных химических реакций запишем в виде следующей суммы [11]:

$$f_i^+ = f_i' + f_i'', \quad (8)$$

где первое слагаемое в правой части (8) описывает молекулы, образовавшиеся в результате химической реакции, а второе — молекулы, отраженные от границы раздела фаз.

Будем считать, что молекулы, образующиеся в результате химических реакций, вылетают с поверхности диффузно, тогда f_i' можно представить в следующем виде [11]:

$$f_i' = \alpha_i^- n_i' \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i V_i^2}{2kT} \right) = \alpha_i^- (1 + \nu_i') f_{i0}, \quad (9)$$

где n_i' — концентрация молекул, образовавшихся в результате химической реакции; $\nu_i' = (n_i' - n_{i0})/n_{i0}$, α_i^- — коэффициент "прилипания", характеризующий интенсивность процессов адсорбции.

Он представляет собой вероятность того, что молекула, упав на поверхность катализатора, не отразится обратно в газ. Функцию распределения отраженных молекул выберем следующим образом:

$$f_i'' = (1 - \alpha_i^-) q_i n_{is} \left(\frac{m_i}{2\pi kT_{is}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i V_i^2}{2kT_{is}} \right) + (1 - \alpha_i^-) (1 - q_i) f_i^-. \quad (10)$$

Здесь первое слагаемое описывает молекулы, отраженные диффузно, второе — молекулы, отраженные зеркально; q_i — коэффициенты аккомодации тангенциального

импульса; T_{is} и n_{is} — температура и концентрация диффузно отраженных молекул i -компоненты. Линеаризуем функцию распределения (8) около f_{i0} с учетом (9), (10). В результате будем иметь

$$f_i^+ = f_{i0} (1 + \varphi_i^+), \quad (11)$$

где

$$\varphi_i^+ = \alpha_i^- \nu_i' + (1 - \alpha_i^-) q_i (\nu_{is} - S_{1/2}^1 \tau_{is}) + (1 - \alpha_i^-) (1 - q_i) \hat{R}_x \varphi_i^-, \quad (12)$$

$S_{1/2}^1 = 3/2 - w_i^2$ — полином Сонина порядка 1/2 [9]; \hat{R}_x — оператор, меняющий знак x -й компоненты скорости при отражении от поверхности; $\nu_{is} = (n_{is} - n_{i0})/n_{i0}$; $\tau_{is} = (T_{is} - T)/T$.

Умножая уравнения (4) на $m_i w_i$, $B_i w_{xi} w_{yi}$, интегрируя по всему пространству скоростей и суммируя по i , имеем

$$\frac{d}{dx} \sum_i (w_{xi} w_{yi}, \varphi_i) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \sum_i \sqrt{\frac{2kT}{m_i}} (w_{xi}^2 w_{yi} B_i, \varphi_i) = \frac{2}{n} \sum_i m_i (w_{xi} w_{yi}, \varphi_i),$$

где круглые скобки обозначают моменты от функции распределения

$$(P(w_{xi}, w_{yi}), \varphi_i) = \int P(w_{xi}, w_{yi}) f_{i0} \varphi_i d^3 v_i.$$

Проинтегрировав по x , на поверхности раздела фаз ($x=0$), получим

$$\sum_i (w_{xi} w_{yi}, \varphi_i) = \text{const},$$

$$\sum_i \sqrt{\frac{2kT}{m_i}} (w_{xi}^2 w_{yi} B_i, \varphi_i) = \text{const}. \quad (13)$$

Выражение (13) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно β и U . При вычислении интегралов, входящих в (13), удержим, как обычно, в разложениях по полиномам Сонина тепловых и диффузионных функций два слагаемых, а вязкостных — одно

$$A_i \approx w_i a_{i0} + w_i a_{i1} S_{3/2}^1,$$

$$C_i^j \approx w_i c_{i0}^j + w_i c_{i1}^j S_{3/2}^1, \quad \hat{B}_i \approx w_i^0 b_{i0}.$$

Решив систему уравнений (13), найдем скорость скольжения U . Запишем ее в следующем виде:

$$U = \frac{\eta}{\rho} K_{Ts} \left(\frac{d \ln T}{dy} \right) + \sum_j D_{1j} K_{Ds}^j \left(\frac{dc_j}{dy} \right) + \lambda K_{Ms} \left(\frac{dU}{dx} \right), \quad (14)$$

где η/ρ — вязкость газа; D_{1j} — коэффициент многокомпонентной диффузии 1-й и j -й компонент; λ — средняя длина свободного пробега молекул газа; K_{Ts} ,

$K_{D_s}^j, K_{M_s}$ — коэффициенты теплового, диффузионного и изотермического скольжения

$$\eta/\rho K_{T_s} = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \times \left\{ \Omega_{T_s}^1(\alpha_i^-) + \frac{\Omega_{T_s}^2(\alpha_i^-) \Omega_{T_s}^3(\alpha_i^-)}{\Omega_{T_s}^4(\alpha_i^-)} \right\}, \quad (15)$$

$$D_{1j} K_{D_s}^j = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \times \left\{ \Omega_{D_s}^1(\alpha_i^-) + \frac{\Omega_{D_s}^2(\alpha_i^-) \Omega_{D_s}^3(\alpha_i^-)}{\Omega_{D_s}^4(\alpha_i^-)} \right\}, \quad (16)$$

$$\lambda K_{M_s} = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{2\pi}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \times \left\{ \Omega_{M_s}^1(\alpha_i^-) + \frac{(\Omega_{M_s}^2(\alpha_i^-))^2}{\Omega_{M_s}^3(\alpha_i^-)} \right\}, \quad (17)$$

где

$$\Omega_{T_s}^1(\alpha_i^-) = \sum_i \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} (a_{i0} - a_{i1}) b_{i0} (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{T_s}^2(\alpha_i^-) = \sum_i n_i b_{i0} (1 + (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{T_s}^3(\alpha_i^-) = \sum_i n_i \left(a_{i0} - \frac{a_{i1}}{2} \right) (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{T_s}^4(\alpha_i^-) = \Omega_{D_s}^4(\alpha_i^-) = \sum_i \sqrt{m_i} n_i (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{D_s}^1(\alpha_i^-) = \sum_i \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} (c_{i0}^j - c_{i1}^j) b_{i0} (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{D_s}^2(\alpha_i^-) = \sum_i n_i b_{i0} (1 + (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{D_s}^3(\alpha_i^-) = \sum_i n_i \left(c_{i0}^j - \frac{c_{i1}^j}{2} \right) (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{M_s}^1(\alpha_i^-) = \sum_i \frac{n_i b_{i0}}{\sqrt{m_i}} (1 + (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{M_s}^2(\alpha_i^-) = \sum_i n_i b_{i0} (1 + (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)),$$

$$\Omega_{M_s}^3(\alpha_i^-) = \frac{4}{\pi} \sum_i \sqrt{m_i} n_i (1 - (1 - q_i)(1 - \alpha_i^-)).$$

В неоднородной газовой смеси вдоль поверхности частицы существуют градиенты концентрации и температуры. Это приводит к тому, что величина коэффициента "прилипания" непостоянна, а значит, возникает дополнительное слагаемое в скорости скольжения. Вычислим его. Предположим, что относительные перепады температуры и концентраций вдоль поверхности малы. Учитывая,

что коэффициент "прилипания" α_i^- зависит от концентраций компонент смеси от температуры поверхности, и удерживая члены нулевого и первого порядка, получим

$$\alpha_i^- = \alpha_{i0}^- (c_{i0}, \dots, c_{N0}, T_0) + \frac{\partial \alpha_i^-}{\partial c_1} \Delta c_1 + \dots + \frac{\partial \alpha_i^-}{\partial c_N} \Delta c_N + \frac{\partial \alpha_i^-}{\partial T} \Delta T, \quad (18)$$

где α_{i0}^- — коэффициент "прилипания" в некоторой точке поверхности.

Подставив (18) в (15)–(17), будем иметь

$$K_{T_s} = K_{T_s}^0 + K_{T_s}^1,$$

$$K_{D_s}^1 = K_{D_s}^{j0} + K_{D_s}^{j1},$$

$$K_{M_s} = K_{M_s}^0 + K_{M_s}^1,$$

где $K_{T_s}^0, K_{D_s}^{j0}, K_{M_s}^0$ получены из формул (15)–(17) подстановкой α_{i0}^- вместо α_i^- .

Коэффициенты $K_{T_s}^1, K_{D_s}^{j1}, K_{M_s}^1$ описывают поправку первого порядка к скорости скольжения, связанную с неоднородностью коэффициентов α_i^- вдоль поверхности катализатора, и имеют следующий вид:

$$K_{T_s}^1 = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \left\{ \Delta \Omega_{T_s}^1 + \frac{\Omega_{T_s}^2(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{T_s}^3 + \Omega_{T_s}^3(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{T_s}^2 - \Omega_{T_s}^2(\alpha_{i0}^-) \Omega_{T_s}^3(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{T_s}^4 / \Omega_{T_s}^4(\alpha_{i0}^-)}{\Omega_{T_s}^4(\alpha_{i0}^-)} \right\},$$

$$K_{D_s}^{j1} = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{8}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \left\{ \Delta \Omega_{D_s}^1 + \frac{\Omega_{D_s}^2(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{D_s}^3 + \Omega_{D_s}^3(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{D_s}^2 - \Omega_{D_s}^2(\alpha_{i0}^-) \Omega_{D_s}^3(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{D_s}^4 / \Omega_{D_s}^4(\alpha_{i0}^-)}{\Omega_{D_s}^4(\alpha_{i0}^-)} \right\},$$

$$K_{M_s}^1 = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{kT}{2\pi}} \frac{1}{\sum_i n_i b_{i0}} \left\{ \Delta \Omega_{M_s}^1 + \frac{2\Omega_{M_s}^2(\alpha_{i0}^-) \Delta \Omega_{M_s}^2 - (\Omega_{M_s}^2(\alpha_{i0}^-))^2 \Delta \Omega_{M_s}^3 / \Omega_{M_s}^3(\alpha_{i0}^-)}{\Omega_{M_s}^3(\alpha_{i0}^-)} \right\},$$

где

$$\Delta \Omega_{T_s}^1 = \sum_i \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} (a_{i0} - a_{i1}) b_{i0} (1 - q_i) \Delta \alpha_i,$$

$$\Delta \Omega_{T_s}^2 = \sum_i n_i b_{i0} (q_i - 1) \Delta \alpha_i,$$

$$\Delta \Omega_{T_s}^3 = \sum_i n_i \left(a_{i0} - \frac{a_{i1}}{2} \right) (1 - q_i) \Delta \alpha_i,$$

$$\Delta \Omega_{T_s}^4 = \Delta \Omega_{D_s}^4 = \sum_i \sqrt{m_i} n_i (1 - q_i) \Delta \alpha_i,$$

$$\Delta \Omega_{D_s}^1 = \sum_i \frac{n_i}{\sqrt{m_i}} (c_{i0}^j - c_{i1}^j) b_{i0} (1 - q_i) \Delta \alpha_i,$$

$$\Delta\Omega_{Ds}^2 = \sum_i n_i b_{i0} (q_i - 1) \Delta\alpha_i,$$

$$\Delta\Omega_{Ds}^3 = \sum_i n_i \left(c_{i0}^j - \frac{c_{i1}^j}{2} \right) (1 - q_i) \Delta\alpha_i,$$

$$\Delta\Omega_{Ms}^1 = \sum_i \frac{n_i b_{i0}^2}{\sqrt{m_i}} \Delta\alpha_i, \quad \Delta\Omega_{Ms}^2 = \sum_i n_i b_{i0} (q_i - 1) \Delta\alpha_i,$$

$$\Delta\Omega_{Ms}^3 = \frac{4}{\pi} \sum_i \sqrt{m_i} n_i (1 - q_i) \Delta\alpha_i,$$

$$\Delta\alpha_i = \frac{\partial\alpha_i^-}{\partial c_1} \Delta c_1 + \dots + \frac{\partial\alpha_i^-}{\partial c_N} \Delta c_N + \frac{\partial\alpha_i^-}{\partial T} \Delta T.$$

Анализ результатов

Результаты численных расчетов коэффициентов скольжения для бинарной газовой смеси представлены в виде графиков на рис. 1–3 ($M_1 = m_1/(m_1 + m_2)$, $R_1 = r_1/(r_1 + r_2)$). Их анализ показывает, что коэффициент теплового скольжения K_{Ts} при заданных m_i и n_i монотонно растет с ростом α_i^- . Это может быть объяснено

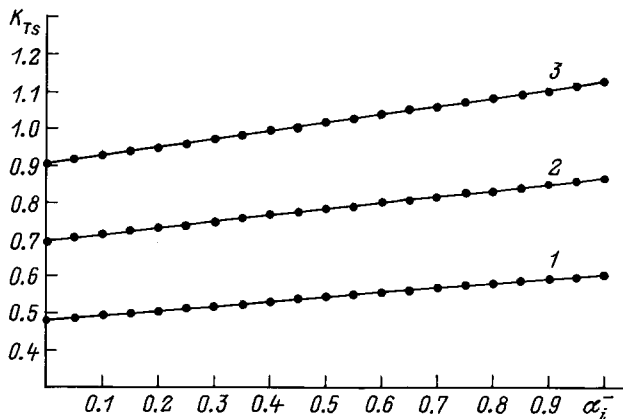


Рис. 1. Коэффициенты $K_{Ts}(\alpha_i^-)$, $q_{1,2} = 0.5$, $R_1 = 0.9$. M_i : 1 — 0.1, 2 — 0.3, 3 — 0.5.

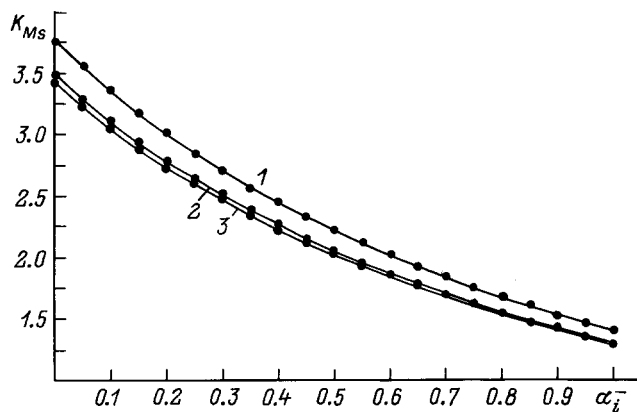


Рис. 2. Коэффициенты $K_{Ms}(\alpha_i^-)$, $q_{1,2} = 0.5$, $R_1 = 0.9$. 1–3 — то же, что и на рис. 1.

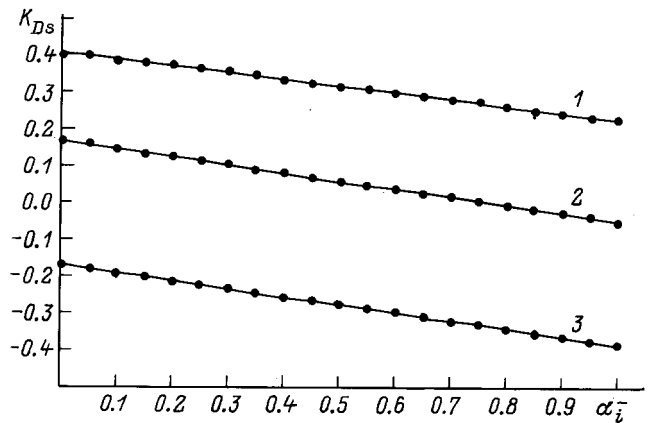


Рис. 3. Коэффициенты $K_{Ds}(\alpha_i^-)$, $q_{1,2} = 0.5$, $R_1 = 0.9$. 1–3 — то же, что и на рис. 1.

следующим образом: при увеличении α_i^- возрастает доля молекул, адсорбированных поверхностью, что влечет за собой увеличение передаваемого ей импульса.

Коэффициент изотермического скольжения K_{Ms} монотонно уменьшается с ростом α_i^- . Это объясняется тем, что при уменьшении α_i^- растет доля молекул, отраженных от поверхности зеркально, а при зеркальном отражении молекул при наличии градиента скорости вблизи поверхности газ должен двигаться быстрее, чем при диффузном при прочих равных условиях. Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента аккомодации тангенциального импульса q_i аналогична зависимости от α_i^- , что особенно легко заметить при $\alpha_i^- = 0$.

Зависимость K_{Ds} от α_i^- при фиксированных m_i и n_i является монотонной (функции (15) и (16) имеют одинаковый вид). Как видно из приведенных графиков, коэффициент диффузионного скольжения при изменении α_i^- может менять знак. Это приведет к тому, что скорость диффузиофореза высокотеплопроводных аэрозольных частиц может менять свое направление, так как в ходе химической реакции концентрации компонент вблизи катализатора могут меняться, а вместе с ними изменится и α_i^- .

При решении задачи о скольжении многокомпонентной газовой смеси при наличии процессов испарения и конденсации, несмотря на различие в виде кинетических граничных условий (функций f_i'), выражения для коэффициентов скольжения получаются те же, что и в случае гетерогенных химических реакций. Формально, переход к случаю процессов испарения и конденсации можно осуществить, положив $K_{Ts}^1 = 0$, $K_{Ds}^1 = 0$, $K_{Ms}^1 = 0$ и приравняв коэффициент "прилипания" α_i^- к коэффициенту конденсации.

При отсутствии гетерогенных химических реакций (коэффициент "прилипания" $\alpha_i^- = 0$) формулы (14)–(17) совпадают с выражением для скорости скольжения, полученной в работе [12]. При ($\alpha_i^- = 1$) скорость скольжения не зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

Список литературы

- [1] *Gupta R.N., Scott C.D., Moss J.N.* // Therm. Des. Aeroassist. Orbital Transfer Veh. Techn. Pap. AIAA 22nd Aerosp. Sci. Meet. AIAA 19th Thermophys. Conf. New York, 1985. P. 465–490.
- [2] *Кульгинов Д.В.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 11. С. 8–19.
- [3] *Богданов А.В., Горбачев Ю.Е., Кульгинов Д.В., Павлов В.А.* Препринт ФТИ АН СССР. № 1051. Л., 1986. 36 с.
- [4] *Яламов Ю.И., Ивченко И.Н., Дерягин Б.В.* // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 2. С. 330–333.
- [5] *Yalamov Yu.I., Inchenko I.N., Deriaguin B.V.* // Rarefied Gas Dynamic. VI Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamic. 1969. Vol. 1. P. 295–300.
- [6] *Deriaguin B.V., Yalamov Yu.I.* // Intern. Rev. in Aerosol Physics and Chemistry. 1972. Vol. 3. Pt 2. P. 1–200.
- [7] *Ивченко И.И., Яламов Ю.И.* // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1971. № 4. С. 22–29.
- [8] *Яламов Ю.И., Юшканов А.А.* // ДАН СССР. 1977. Т. 237. № 2. С. 303–306.
- [9] *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
- [10] *Loyalka S.K.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. N 11. P. 2291–2294.
- [11] *Алехин Е.И.* Деп. в ВИНТИ. № 1698-В95. М., 1995. 22 с.
- [12] *Алехин Е.И., Яламов Ю.И.* Математические основы решения граничных задач кинетической теории многокомпонентных газов вблизи конденсированной фазы. Учебное пособие к спецкурсу. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1991. 150 с.