01;03

Движущаяся неоднородность в магнитогидродинамической среде

© А.А. Александрова, Ю.Н. Александров

Харьковский военный университет,
310043 Харьков, Украина
Харьковский техничекий университет радиоэлектроники,
310726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 2 ноября 1995 г. В окончательной редакции 4 марта 1196 г.)

На основе метода функции Грина выведены интегральные уравнения идеальной магнитной гидродинамики, учитывающие скорость движения среды неоднородности до возмущения ее падающим полем. Принцип погашения магнитной гидродинамики продемонстрирован на примере движущегося полупространства. Произведен анализ сравнения результатов аналогичной задачи, учитывающей только скорость движения границы раздела двух сред.

Как правило, при изучении распространения малых возмущений в проводящей среде, находящейся в однородном постоянном магнитном поле, полагают, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $P = P_0 + \tilde{p}$, т. е. полное магнитное поле $\mathbf{B}$ представляет собой суперпозицию невозмущенного поля $\mathbf{B}_0$, которое задано и создается внешними токами (аналогично невозмущенная плотность ρ_0 и давление P_0), и индуцированного поля $\mathbf{b}$ $(\tilde{\rho}, \tilde{p})$, которое создается токами, вызванными возмущением, т. е. которое обусловлено волновым движением. Из предположения малости амплитуды следует, что $b \ll B_0$, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$, $\tilde{p} \ll P_0$. Малой того же порядка является и скорость $\mathbf{u}$, однако равная нулю в равновесии.

Для ряда задач, в частности при исследовании вопросов устойчивости, представляет интерес случай ненулевой первоначальной скорости движения среды. В данной работе это относится к учету скорости движения среды неоднородности U_o до возмущения ее падающим полем. При этом предполагается, что неоднородность помещена в неограниченную магнитогидродинамическую среду, характеризуемую параметрами $\mathbf{B}_1$ — невозмущенное магнитное поле, V_{A1} — альфвеновская скорость, V_{S1} — звуковая скорость, ρ_2 — плотность среды.

Предположим также, что некоторая неоднородность (геометрически однородная область), характеризуемая соответствующими параметрами $\mathbf{B}_2$, V_{A2}, V_{S2}, ρ_2 имеет объем $V(t)$ и граница ее области $S(t)$ в общем случае зависит от времени. В работе произведено исследование влияния на отклонение $\mathbf{u}$ скорости от ее равновесного значения U_0 скорости среды неоднородности, скорости движения границы, а также, что является взаимным, скорости деформации границы неоднородности под действием падающего возмущения.

Подход, используемый в работе, является дальнейшим обобщением метода интегральных уравнений в магнитной гидродинамике [1], заключающийся во введении разрывных функций, описывающих среду как внутри, так и вне неоднородности. Рассмотрим кратко вывод интегральных уравнений для данного случая краевых задач при общих предположениях относительно параметров сред, формы неоднородности, зависимости от времени свойств среды внутри неоднородности и движения ее границы. Однако в качестве упрощающего предположения будем считать, что имеет место адиабатическое "включение" на бесконечности, т. е. нестационарность задачи начинается в бесконечно удаленный момент времени. Как будет показано ниже, вид интегрального уравнения зависит от вида фоновой среды, окружающей неоднородность, которую будем называть внешней в отличие от внутренней среды неоднородности.

Как известно, уравнения линеаризованной идеальной магнитной гидродинамики во внешней среде с параметрами, описывающимися непрерывными функциями, относительно отклонений скорости $\mathbf{u}$ и магнитного поля $\mathbf{b}$ от их равновесных значений имеют вид

$$V_{S1}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},\ \frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1}\right] = 0,$$

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{u},\ \mathbf{B}_1] - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{r} \ni V(t). \tag{1}$$

Соответствующие уравнения по внутренней среде запишутся так:

$$V_{S2}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \operatorname{rot} \left[\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},\ \frac{\mathbf{B}_2}{4\pi\rho_2}\right] + \operatorname{grad} \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}_0) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{u},\ \mathbf{B}_2] - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \operatorname{rot}\,[\mathbf{U}_0,\ \mathbf{b}] = 0, \qquad \mathbf{r} \in V(t). \tag{2}$$

При этом на поверхности разрыва $S(t)$ полевых функций должны выполняться граничные условия, следующие из непрерывности потока массы $\{\rho\, u_n\}_S = 0$, импульса $\{\pi_{in}\}_S = 0$, энергии $\{W_n\}_S = 0$, тангенциальной составляющей электрического поля $\{\mathbf{E}_\tau\}_S = 0$ и нормальной составляющей магнитного поля $\{B_n\}_S = 0$,

$$\{\rho U_z\} = 0, \qquad \{\rho U_x U_z - B_x B_z/4\pi\} = 0,$$

$$\{\rho U_y U_z - B_y B_z/4\pi\} = 0,$$

$$\left\{\rho U_z^2 + p + \left(B_x^2 + B_y^2\right)/8\pi\right\} = 0,$$

$$\{U_xB_z - U_zB_x\} = 0, \quad \{U_yB_z - U_zB_y\} = 0, \quad \{U_z\} = 0,$$

$$\left\{\rho U_z\left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon\right) + U_z p + \left(B^2U_z - B_z(\mathbf{U}\,\mathbf{B})\right)/4\pi\right\} = 0;$$

$$\mathbf{U} = \begin{cases}\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}, & \mathbf{r} \in V(t),\\ \mathbf{u}, & \mathbf{r} \ni V(t),\end{cases} \quad \mathbf{B} = \begin{cases}\mathbf{B}_2 + \mathbf{b}, & \mathbf{r} \in V(t),\\ \mathbf{B}_1 + \mathbf{b}, & \mathbf{r} \ni V(t),\end{cases} \tag{3}$$

где $\{\mathbf{a}\}$ — скачок величины $\mathbf{a}$ при переходе через поверхность $S(t)$.

В качестве плоскости $z = 0$ для определенности выбрана плоскость, касательная к поверхности разрыва, т.е. ось $0Z$ направлена по нормали к поверхности разрыва.

Рассматривая граничные условия (3) в лабораторной системе отсчета, в которой поверхность разрыва перпендикулярна оси $0Z$ и движется вдоль этой оси со скоростью u_S, нужно всюду в (3) заменить u_z на $u_z - u_S$ (подробнее см. [2]).

При отыскании решений в интегральной форме в классе кусочно-гладких функций разрывные решения с учетом определенных дополнительных условий получаются, вообще говоря, автоматически из постановки задачи. Для этого с помощью характеристической функции

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases}1, & \mathbf{r} \in V(t),\\ 0, & \mathbf{r} \ni V(t),\end{cases}$$

уравнения (1) распространяются на все рассматриваемое пространство следующим образом:

$$\left(V_{A1}^2 + V_{S1}^2\right)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} - \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - V_{A1}^2\mathbf{s}_1(\mathbf{s}_1,\ \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u})$$
$$- V_{A1}^2[\mathbf{s}_1,\ (\mathbf{s}_1, \nabla)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathbf{W}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{W} = \chi\left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right)\ \mathrm{grad}\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u}$$
$$- \chi\left[\frac{V_{A1}^2}{B_1}\mathbf{s}_1 - \frac{V_{A2}^2}{B_2}\mathbf{s}_2,\ \mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right]$$
$$+ \chi\,\frac{V_{A1}^2}{B_1}\left[\mathbf{s}_1,\ \mathrm{rot\,rot}\left[\mathbf{s}_1 - \frac{B_2}{B_1}\mathbf{s}_2,\ \mathbf{u}\right]\right]$$
$$- \chi\,\frac{V_{S2}^2}{\rho_2}\,\mathrm{grad(grad)}\,\rho,\ \mathbf{U}_0$$
$$+ \chi\left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1},\ \mathrm{rot\,rot}[\mathbf{U}_0, \mathbf{b}]\right]$$
$$+ \left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1},\ [\mathbf{n}, \{\mathrm{rot}[\mathbf{u},\ \mathbf{B}_1]\}_S]\right]\delta S(t)$$
$$+ \left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1}, [\mathbf{n},\ \{\mathrm{rot}\,[\mathbf{U}_0,\ \mathbf{b}]\}_S]\right]\delta S(t).$$

В (4) производная по времени является производной в обобщенном смысле слова [3], т.е.

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right) + \delta(t)\langle\mathbf{u}(0)\rangle,$$

где $(\partial\mathbf{u}/\partial t)$ — обычная производная, $\langle\mathbf{u}(0)\rangle = \mathbf{u}(+0) - \mathbf{u}(-0) = 0$, так как параметры среды не испытывают скачок в конечный момент времени.

Учет того, что все величины терпят разрыв на границе $S(t)$ области $V(t)$, производится посредством замены классических производных на обобщение по правилам [3]

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{a}) + \mathbf{n}\times\{\mathbf{a}\}_S\delta S(t),$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = (\mathrm{div}\,\mathbf{a}) + \mathbf{n}\cdot\{\mathbf{a}\}_S\delta S(t),$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = (\mathrm{grad}\,\varphi) + \mathbf{n}\{\varphi\}_S\delta S(t),$$

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}\right) - \{\mathbf{a}\}_S u_n\delta S(t).$$

Здесь круглые скобки обозначают классическую производную; $\{\mathbf{a}\}_S$ — скачок функции $\mathbf{a}$ при переходе извне через поверхность $S(t)$, удовлетворяющих условиям (3); $\delta S(t)$ — поверхностная δ-функция. Уравнение (4) описывает поле во всем рассматриваемом пространстве, так как уже учтены граничные условия на поверхностях разрыва полевых функций. При этом появились поверхностные слагаемые, обусловленные, по-видимому, поверхностным током. Потребовав финитности правой части (4) по пространственным и временным координатам, общее решение (4) запишем в виде свертки

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \hat{G} * \mathbf{W},$$

где $\mathbf{u}_0$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. падающее поле; $\hat{G}$ — функция Грина, являющаяся фундаментальным решением уравнения (4), т.е. удовлетворяющая уравнению

$$(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\mathrm{grad\,div}\,\hat{G} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - V_{A1}^2\mathbf{s}_1\left(\mathbf{s}_1, \mathrm{grad\,div}\,\hat{G}\right)$$
$$- V_{A1}^2\left[\mathbf{s}_1, (\mathbf{s}_1, \nabla)\mathrm{rot}\,\hat{G}\right] = \varepsilon\delta(t - t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Эта функция, имеющая вид $\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \hat{G}\cdot I$, найдена и подробно описана в [1], здесь $\hat{G}$ — дифференциальный оператор, записанный в базисе $\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$, где $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1/B_1$; $I = I(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ записано в виде интеграла Фурье–Лапласа. Зная фундаментальное решение $\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$, учитывая свойства свертки, а также наличие характеристической функции $\chi(\mathbf{r}, t)$, (4) можно переписать в виде интегрального уравнения магнитной гидродинамики

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r},t) + \left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right)\hat{G}\,\mathrm{grad\,div}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{u}Id\mathbf{r}'$$

$$+ V_{A1}^2\hat{G}\left[\mathbf{s}_1\mathrm{rot\,rot}\left[\mathbf{s}_1 - \frac{B_2}{B_1}\mathbf{s}_2, \int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{u}Id\mathbf{r}'\right]\right]$$

$$- \frac{\hat{G}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1 - \frac{B_1}{B_2}\mathbf{s}_2, \mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{b}Id\mathbf{r}'\right]$$

$$- \hat{G}\frac{V_{S2}^2}{\rho_2}\,\mathrm{grad}\left(\mathbf{U}_0, \mathrm{grad}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\rho Id\mathbf{r}'\right)$$

$$- \hat{G}\left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1},\ \mathrm{rot\,rot}\left[\mathbf{U}_0, \int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{b}Id\mathbf{r}'\right]\right]$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{S(t')}\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$$

$$\times\left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1}, \left[\mathbf{n}, \{\mathrm{rot}[\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^{in}, \mathbf{B}_2]\right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{rot}\,[\mathbf{U}_0, \mathbf{b}^{ex} - \mathbf{b}^{in}]\}\right]\right]dS, \tag{5}$$

где внешние компоненты поля $\mathbf{u}^{ex}$, $\mathbf{b}^{ex}$ на границе $S(t)$ выражаются через внутренние $\mathbf{u}^{in}$, $\mathbf{b}^{in}$ с помощью (3).

Необходимо подчеркнуть, что используемый метод решения краевых задач на основе интегрального уравнения (5) предполагает не только представление исходных дифференциальных уравнений (1) и (2) в интегральной форме, что всегда можно осуществить, построив соответствующую функцию Грина, но и использование дополнительного утверждения — принципа погашения. Физически смысл этого принципа известен из электродинамики, но здесь его содержание шире [1]. Согласно этому принципу разработан алгоритм решения дифракционных задач. Вне объемов неоднородностей уравнения (5) могут быть представлены в виде интегралов от известных внутренних полей неоднородности, т. е. полное поле вне неоднородности (дифрагированное поле) представляет собой сумму падающей и рассеянной волн. Рассеянное же поле выражается через магнитогидродинамические потенциалы типа

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{\Pi}_u\\ \mathbf{\Pi}_b\end{Bmatrix} = \int\limits_V \begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{r}',t')\\ \mathbf{b}(\mathbf{r}',t')\end{Bmatrix} I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')d\mathbf{r}'.$$

В случае же $\mathbf{r} \in V$ в левой части (5) полевые функции следует рассматривать как полные внутренние поля в точке $\mathbf{r}$ внутри объема V. Формализм интегральных уравнений позволяет расщепить исходную группу уравнений на уравнения для нахождения постоянных распространения в неоднородности и уравнения для амплитуд волн в неоднородности.

Продемонстрируем принцип погашения на примере задачи дифракции МГД волн на движущемся полупространстве. По мере решения задачи будет производиться сопоставление с аналогичной задачей дифракции МГД волн на равномерно движущейся плоской границе двух МГД сред [4].

Итак, МГД неоднородность в пространстве XYZ, характеризуемая плотностью ρ_2, постоянным магнитным полем B_2, звуковой и альфвеновской скоростями V_{S2}, V_{A2} ограничена плоскостью, параллельной плоскости $X0Y$ и движется равномерно со скоростью U_0 перпендикулярно плоскости раздела. Среда вне неоднородности имеет параметры ρ_1, $\mathbf{B}_1$, V_{S1}, V_{A1}; векторы $\mathbf{B}_i$ лежат в плоскости $Y0Z$. Пусть на неоднородность падает пакет МГД волн: альфвеновской, имеющей компоненты u_x, b_x, и магнитозвуковых ускоренной и замедленной $u_2^{\pm}$, $u_3^{\pm}$, $b_2^{\pm}$, $b_3^{\pm}$ вида

$$u_{0x}(\mathbf{r},t) = u_{0x}\exp(-i\mathbf{k}_{A0}\mathbf{r} + i\omega_0 t),$$

$$\mathbf{k}_{A0} = \omega_0\mathbf{n}_{A0}/V_{A1}(\mathbf{n}_{A0}\mathbf{s}_1),$$

$$u_{0i}(\mathbf{r},t) = u_{0i}^{+}\exp(-i\mathbf{k}_0^{+}\mathbf{r} + i\omega_0^{+}t) + u_{0i}^{-}\exp(-i\mathbf{k}_0^{-}\mathbf{r} + i\omega_0^{-}t),$$

где $i = 2,\ 3$; $\mathbf{k}_0^{\pm}$ удовлетворяет следующему дисперсному уравнению:

$$\omega_0^4 - \omega_0^2(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)k_0^2 + V_{A1}^2V_{S1}^2k_0^2(\mathbf{k}_0\mathbf{s}_1)^2 = 0.$$

Компоненты u_{0i} рассматриваются в базисе $\langle\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1$, а орт $\mathbf{e}_1$ совмещен с ортом $\mathbf{i}$. Для краткости и удобства дальнейшего изложения введем следующую запись падающего поля:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}_0^j\exp(-i\mathbf{k}_0^j\mathbf{r} + i\omega_0^j t), \tag{6}$$

где $j = 1$ — соответствует альфвеновская волна, $j = 2$ — ускоренная магнитозвуковая, $j = 3$ — замедленная магнитозвуковая.

В качестве пробного решения для прошедшего поля в полупространстве $z > 0$ выберем суперпозицию следующих волн:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{u}^j\exp(-i\mathbf{k}^j\mathbf{r} + i\omega^j t) \tag{7}$$

с неизвестными пока амплитудами $\mathbf{u}^j$, волновыми числами $\mathbf{k}^h$ и частотами ω^j. В силу линейности исходных дифференциальных уравнений, а также граничных условий скорость движения поверхности раздела u_S, по-видимому, будет также представлена в виде соответствующей суперпозиции волн

$$u_S(\mathbf{r},t) = \sum_m\Big[u_S^m\exp(i\mathbf{k}^m\mathbf{r} + i\omega^m t)$$

$$+ \tilde{u}_S^m\exp(-i\mathbf{k}_0^m\mathbf{r} + i\omega_0^m t)\Big].$$

Подставив пробное решение (7) в подынтегральные выражения объемных интегралов, выполним интегрирование по объему $V(t')$ ($\mathbf{r} \in V(t')$) и по времени. В результате получим интегральное выражение для альфвеновской волны

$$I_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{V(t')} u_x(\mathbf{r},' t') I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') d\mathbf{r}'$$

$$= u_x \left\{ \frac{\exp(-i\mathbf{k}_A\mathbf{r} + i\omega_A t)}{V_{A1}^2(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_1)^2 - \omega_A^2} + \frac{\exp\{-i[k_y y + z(\omega'/V_{A1}s_{1z} - k_y s_{1z}/s_{1z})] + i\omega' t\}}{2\omega'[V_{A1}(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_1) - \omega']} \right\}, \tag{8}$$

где
$$\omega' = \frac{\omega_A - U_0(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_1)/s_{1z}}{1 - U_0/V_{A1}s_{1z}},$$
и аналогично для магнитозвуковых волн

$$\underset{i=2,3}{I_i} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{V(t')} u_i(\mathbf{r}', t') I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') d\mathbf{r}'$$

$$= u_i \left\{ \frac{\exp(-i\mathbf{k}_s\mathbf{r} + i\omega_S t)}{\Delta(\omega, k_s)} + \frac{\exp(-i\mathbf{k}_0^+\mathbf{r} + i\omega_0^+ t)}{\Omega(k_0^+)(k_z - k_{0z}^+)} + \frac{\exp(-i\mathbf{k}_0^-\mathbf{r} + i\omega_0^- t)}{\Omega(k_0^-)(k_z - k_{0z}^-)} \right\}, \tag{9}$$

где

$$\Delta(\omega, k_s) = \omega^4 - (V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\omega^2 k_S^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 k_S^2 (\mathbf{k}_S\mathbf{s}_1)^2,$$

$$\Omega(k_0) = 2k_{0z}\Big\{(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\omega_0^2 - V_{A1}^2 V_{S1}^2 k_0^2[\cos^2\vartheta + \cos\vartheta s_{1z}/n_{0z}]\Big\}.$$

Интегрирование поверхностного интеграла соответственно дает

$$\underset{j=\overline{1,3}}{\tilde{\mathbf{I}}_j} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{S(t')} \mathbf{u}^j(\mathbf{r}', t') I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') dS$$

$$= i\mathrm{u}^j \frac{\exp(-i\mathbf{k}_0^j\mathbf{r} + i\omega_0^j t)}{\Omega(k_{0x}^j, k_{0y}^j, k_{0z}^j)},$$

где

$$\Omega(k_{0x}^1, k_{0y}^1, k_{0z}^1) = 2\omega_0^1 V_{A1} s_{1z} \times \Big[(\omega_0^1)^4 - (V_{A1}^2 + V_{S1}^2)(\omega_0^1)^2 (k_0^1)^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 (k_0^1)^2 (\mathbf{k}_0^1\mathbf{s}_1)^2\Big],$$

$$\underset{j=2,3}{\Omega}(k_{0x}^j, k_{0y}^j, k_{0z}^j) = 2\Big[(\omega_0^j)^2 - V_{A2}^2(\mathbf{k}_0^j\mathbf{s}_1)^2\Big] \times \Big\{(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)(\omega_0^j)^2 k_{0z}^j + V_{A1}^2 V_{S1}^2\Big[k_{0z}^j - (k_{0z}^j)^2 s_{1z}(\mathbf{k}_0^j\mathbf{s}_1)\Big]\Big\}.$$

Анализируя (8), (9), можно сказать, что интегральные слагаемые описывающие дифрагированное поле, распадаются на ряд слагаемых: слагаемые типа

$$\exp(-i\mathbf{k}_A\mathbf{r} + i\omega_A t), \qquad \exp(-i\mathbf{k}^\pm\mathbf{r} + i\omega^\pm t),$$

описывающие преломленнные волны, и слагаемые типа

$$\exp\{-i[k_y y + z(\omega'/V_{A1}s_{1z} - k_y s_{1y}/s_{1z})] + i\omega' t\},$$

$$\exp(-i\mathbf{k}_0^\pm \mathbf{r} + i\omega_0^\pm t).$$

Если последняя экспонента описывает ту же волну, что и падающее магнитозвуковое поле, то предпоследняя совпадает с падающей альфвеновской волной, если положить, что $\omega' = \omega_0$, тогда

$$\frac{\omega_0}{V_{A1}s_{1z}} - \frac{k_y s_{1y}}{s_{1z}} = k_{A0z},$$

а благодаря трансляционной симметрии задачи $k_y = k_{A0y}$. Из наложенных требований мы находим частоту преломленной альфвеновской волны

$$\omega_A = \omega_0 \frac{2(V_{A1}s_{1z} - U_0)V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A)^2}{V_{A1}\Big\{2s_{1z}V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A)^2 - U_0(\mathbf{n}_A s_1) \times \Big[\sqrt{(\mathbf{n}_A\mathbf{U}_0)^2 + 4V_{A2}^2(\mathbf{n}_A\mathbf{s}_2)^2} - (\mathbf{n}_A\mathbf{U}_0)\Big]\Big\}} \tag{10}$$

и закон преломления

$$(V_{A1}s_{12} - U_0)\frac{s_{1y} + s_{1z}\mathrm{ctg}\alpha}{s_{1y} + s_{1z}\mathrm{ctg}\beta}$$

$$= \frac{2s_{1z}V_{A2}^2 \frac{(s_{2y}+s_{2z}\mathrm{ctg}\beta)^2}{(s_{1y}+s_{1z}\mathrm{ctg}\beta)U_0\mathrm{ctg}\beta} - U_0\left[\sqrt{1 + 4V_{A2}^2\frac{(s_{2y}+s_{2z}\mathrm{ctg}\beta)^2}{U_0^2\mathrm{ctg}^2\beta}} - 1\right]}{\sqrt{1 + 4V_{A2}^2\frac{(s_{2y}+s_{2z}\mathrm{ctg}\beta)^2}{U_0^2\mathrm{ctg}^2\beta}} - 1} \tag{11}$$

где α и β — соответственно углы падения и преломления альфвеновской волны.

Аналогично для магнитозвуковых волн преобразование частоты

$$\omega^\pm = \omega_0^\pm \frac{\left(Q_1^\pm - U_0\cos\alpha_{pm}\right)Q_2^\pm}{\left(Q_2^\pm - U_0\cos\beta_{pm}\right)Q_1^\pm}, \tag{12}$$

кроме того,

$$\frac{\omega^+ - \omega_0^-}{\omega^- - \omega_0^+} = \frac{k_z^+ - k_{0z}^-}{k_z^- - k_{0z}^+}$$

и закон преломления

$$\left(Q_1^\pm - U_0\cos\alpha_\pm\right)\sin\beta_\pm = \left(Q_2^\pm - U_0\cos\beta_\pm\right)\sin\alpha_\pm, \tag{13}$$

о $Q_{1,2}^\pm$ будет сказано ниже.

Таким образом, после подготовки интегральных слагаемых I_x, I_i, $\tilde{I}_j$ ($i = 2, 3$; $j = 1, 3$) в исходное интегральное уравнение, получим тождество, справедливое для всех внутренних точек области

$$\sum_{j=1}^{3} \mathbf{u} \exp(-i\mathbf{k}^j\mathbf{r} + i\omega^j t) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{u}^j \exp(-i\mathbf{k}_0^j\mathbf{r} + i\omega_0^j t)$$

$$+\sum_{j=1}^{3} \hat{A}_j\mathbf{u}^j \exp(-i\mathbf{k}^j\mathbf{r}+i\omega^j t)+\sum_{j=1}^{3} \hat{B}_j\mathbf{u}^j \exp(-i\mathbf{k}_0^j\mathbf{r}+i\omega_0^j t), \quad (14)$$

где $\hat{A}_j$ и $\hat{B}_j$ — результат действия дифференциальных операторов в исходном интегральном уравнении на соответствующую экспоненту.

Следует заметить, что для прозрачности представления интегралы I_x, I_i вычислены при условии $k_{0x}^1 \neq k_{0x}^2 \neq k_{0x}^3$, $k_{0y}^1 \neq k_{0y}^2 \neq k_{0y}^3$, т. е. мы исключили трансформацию одного типа МГД волны в волну другого типа, математически это описано в [5] и происходит в точках, где совпадают фазовые скорости двух или более волн при преобразовании их на плоской поверхности.

При рассмотрении тождества (14) вступает в силу принцип погашения, согласно которому поле МГД диполей можно представить в виде суммы двух групп слагаемых, одни из которых удовлетворяют уравнению поля во внешней среде, т. е. имеют характер падающего поля. Таким образом, падающая волна в точности гасится в любой точке внутри среды в результате интерференции создаваемого ею поля с полем диполей, при этом появляется новая волна с иной скоростью распространения (k^j). Отсюда следует, что члены тождества (14), изменяющиеся по закону $\exp(-i\mathbf{k}^j\mathbf{r} + i\omega^j t)$, образуют равенства

$$\mathbf{u}^j \exp((-i\mathbf{k}^j\mathbf{r} + i\omega^j t) = \hat{A}_j\mathbf{u}^j \exp(-i\mathbf{k}^j\mathbf{r} + i\omega^j t)$$

и взаимно сокращаются, если положить, что $\mathbf{k}^j$ удовлетворяют следующим дисперсионным уравнениям:

$$\omega_A^2 - \omega_A(\mathbf{k}_A U_0) - V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{k}_A)^2 = 0 \quad (15)$$

для альфвеновских волн и

$$(\omega^\pm)^4 - 2(\omega^\pm)^3(\mathbf{k}^\pm\mathbf{U}_0) - (\omega^\pm)^2\Big\{(V_{S2}^2 + V_{A2}^2)(k^\pm)^2$$

$$\times \Big[1 - (\mathbf{k}^\pm\mathbf{U}_0) - (\mathbf{k}^\pm\mathbf{U}_0)^2\Big]\Big\} + V_{A2}^2V_{S2}^2(k^\pm)^2(\mathbf{k}^\pm\mathbf{s}_2)^2 = 0 \quad (16)$$

для магнитозвуковых волн. Фазовые скорости $Q_{1,2}^\pm = \omega^\pm/k_{1,2}^\pm$, о которых говорилось выше, находятся из соотношения (16). Следует отметить, что волновые числа как для альфвеновской волны, так и для магнитозвуковых для прямой и для обратных волн имеют разные абсолютные величины. Для альфвеновской они равны

$$k_A = \omega_A \frac{-(\mathbf{n}_A\mathbf{U}_0) \pm \sqrt{(\mathbf{n}_A\mathbf{U}_0)^2 + 4V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A)^2}}{2V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A)^2}.$$

Падающее поле гасится полем вторичных волн. Отсюда получим уравнения для нахождения амплитуд вторичных волн (для краткости они не выписаны)

$$\mathbf{u}_0^j(\mathbf{r},t) + \hat{B}_j\mathbf{u}^j \exp(-i\mathbf{k}_0^j\mathbf{r} + i \underset{j=\overline{1,3}}{\omega_0^j} t) = 0.$$

В случае первоначальной неподвижности второй среды, а только движении границы раздела структура внутреннего поля будет той же, однако волновые числа в этом случае будут удовлетворять следующим уравнениям

$$\omega_A^2 - V_{A2}^2(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_2)^2 = 0$$

для альфвеновских волн и

$$\omega^4 - (V_{A2}^2 + V_{S2}^2)\omega^2k^2 + V_{A2}^2V_{S2}^2k^2(\mathbf{k}\mathbf{s}_2)^2 = 0$$

для магнитозвуковых.

Законы преломления и изменения частоты будут носить абсолютно другой характер. Так, закон преломления для альфвеновской волны имеет вид

$$V_{A1}(s_{1y} + s_{1z}\mathrm{ctg}\alpha) - U_0\mathrm{ctg}\alpha = V_{A2}(s_{2y} + s_{2z}\mathrm{ctg}\beta) - U_0\mathrm{ctg}\beta$$

и изменение частоты определяется соотношением

$$\omega_A = \omega 0 \frac{(V_{A1}s_{1z} - U_0)V_{A2}(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A)}{V_{A1}[V_{A2}s_{1z}(\mathbf{s}_2\mathbf{n}_A) - U_0(\mathbf{s}_1\mathbf{n}_A)]}.$$

В случае магнитозвуковых волн закон преломления и изменения частот формально описывается формулами (13) и (12), однако $Q_i^\pm$ имеет более простой вид

$$Q_i^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(V_{Ai}^2 + V_{Si}^2) \pm \sqrt{(V_{Ai}^2 + V_{Si}^2)^2 - 4V_{Ai}^2V_{Si}^2\cos^2\vartheta_i}\right]}.$$

Таким образом, в краевой задаче магнитной гидродинамики мы наблюдаем изменение частот при преобразовании волн, обусловленное движением среды, называемое эффектом Допплера (соотношения (10), (12)). Однако в отличие от акустики и электродинамики, где на частоту влияет только скорость источника, в магнитной гидродинамике на изменении частоты сказывается (например, для альфвеновских волн) кроме скорости среды альфвеновские скорости V_{A1}, V_{A2} во внешней и внутренней областях, а также направления распространения альфвеновской волны по отношению к невозмущенным магнитным полям $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$. Так, при распространении альфвеновской волны вдоль поля $\mathbf{s}_1$ имеем

$$\omega_A = \frac{\omega_0(1 - U_0/V_{A1}s_{1z})}{1 - U_0/V_{Az}(\mathbf{n}_A\mathbf{s}_2)s_{1z}},$$

перпендикулярно ему

$$\omega_A = \omega_0(1 - U_0/V_{A1}s_{1z}).$$

Вдоль магнитного поля $\mathbf{s}_2$

$$\omega_A = \frac{\omega_0(1 - U_0/V_{A1}s_{1z})}{1 - U_0(\mathbf{n}_A\mathbf{s}_1)/V_{A2}s_{1z}}$$

и при $(\mathbf{n}_A\mathbf{s}_2) \to 0 \Rightarrow \omega_A \to 0$.

Важно отметить, что частоты преломленных магнитозвуковых волн взаимосвязаны не только с соответствующими частотами падающих невозмущенных волн, но и друг с другом. В случае, если граница движется со скоростью $U_0 > Q_i^{\pm}/\cos\alpha_{\pm}$, преломленные волны, ускоренная и замедленная, во внутренней области не возбуждаются, так как плоскость уходит быстрее, чем ее достигает невозмущенная волна. Если же $Q_1^{-}/\cos\alpha_{-} < U_0 < Q_1^{+}/\cos\alpha_{+}$, то будем иметь во внутренней среде только ускоренную преломленную волну.

Если невозмущенная альфвеновская волна падает под углом, удовлетворяющим соотношению

$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{U_0 - V_{A1}s_{1z}}{V_{A1}s_{1y} - V_{A2}s_{2y}},$$

то возникает "полное внутреннее отражение" альфвеновских волн и соответствующий угол α_k по аналогии с электромагнитными волнами можно назвать критическим углом падения.

Рассеянное поле находится простым интегрированием внутреннего поля, так как для точек вне неоднородности $(\mathbf{r} \ni V(t))$ подынтегральные выражения не содержат особенности, то уравнение (5) превращается в равенство. Подставляя найденное внутреннее поле для альфвеновской компоненты скорости в (5) и учитывая, что $\mathbf{r} \ni V(t)$, найдем интегральное выражение вне неоднородности

$$I_x^{\text{отр}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{V(t')} u_x(\mathbf{r}', t') I(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') d\mathbf{r}'$$

$$= u_x \frac{\exp\{i\omega'' t - ik_{0y}y + iz[\omega''/V_{A1}s_{1z} + k_{0y}s_{1y}/s_{1z}]\}}{2\omega''[V_{A1}(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_1) + \omega'']},$$

где

$$\omega'' = \frac{\omega_A - U_0(\mathbf{k}_A\mathbf{s}_1)/s_{1z}}{1 + U_0/V_{A1}s_{1z}}.$$

Окончательное отраженное поле альфвеновской волны имеет вид

$$u_x^{\text{отр}}(\mathbf{r}, t) = u_s^{\text{отр}} \exp(-i\mathbf{k}_A^{\text{отр}}\mathbf{r} + i\omega_A^{\text{отр}}),$$

где

$$\omega_A^{\text{отр}} = \omega_0 \frac{U_0 - V_{A1}s_{1z}}{U_0 + V_{A1}s_{1z}},$$

$$(\mathbf{k}_A^{\text{отр}}\mathbf{r}) = k_{A0y}y - [\omega_A^{\text{отр}}/V_{A1}s_{1z} + k_{A0y}s_{1y}/s_{1z}]z,$$

причем структура поля сохраняется как при движении среды, так и в случае, когда она покоится, а движется только поверхность раздела сред. Движение среды оказывает существенное влияние на амплитуду отраженной волны. Аналогично рассматриваются магнитозвуковые отраженные волны.

Список литературы

[1] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков: Тест-радио ЛТД, 1993. 230 с.

[2] *Alexsandrova A.A., Khiznjak N.A.* // MAHYD-95. Proc. of 14th Intern. Conf. Riga, 1995. P. 17.

[3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[4] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* // Магнитная гидродинамика. 1987. № 4. С. 15–20.

[5] *Александрова А.А.* // Магнитная гидродинамика. 1993. № 2. С. 21–28.