

01;07;09;10

Спектр синхротронного излучения протяженного источника

© В.Л. Братман, А.Э. Федотов

Институт прикладной физики РАН,
603600 Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 29 марта 1996 г.)

1. Спектр когерентного синхротронного излучения плоскости, составленной из зарядов, которые синфазно вращаются с релятивистской скоростью, существенно отличается от известного [1] спектра одной частицы [2,3]. Хотя ширина спектра в обоих случаях одного порядка, спектр плоскости имеет максимум не на высокой гармонике, а на частоте обращения частиц. Это связано с одновременностью (запаздыванием) прихода в точку наблюдения излучения от разных частиц плоскости и соответственно более плавной, чем для одного заряда, формой периодически следующих импульсов поля. Имея в виду возможность создания эффективных источников широкополосного высокочастотного излучения [3], проанализируем изменения в спектре, возникающие при переходе от точечного заряда к протяженному источнику более подробно.

2. Рассмотрим источник в виде тонкой бесконечной нити с постоянной линейной плотностью заряда τ , состоящей из частиц, которые синфазно вращаются по одинаковым окружностям радиуса a в плоскости, перпендикулярной нити (рис.1). При этом нить движется равномерно по поверхности кругового цилиндра радиуса a , оставаясь параллельной себе, а связанные с нею объемные плотности заряда и тока в цилиндрических координатах с осью z , проходящей через ось цилиндра, представляются в виде

$$\rho = \frac{\tau}{a} \delta(r - a) \delta(\varphi - \omega t), \quad j_\varphi = v\rho. \quad (1)$$

Здесь $v = a\Omega$ и Ω — линейная скорость и частота обращения частиц. Пользуясь периодичностью движения по угловой координате φ , удобно представить источник (1) в виде набора Фурье-гармоник

$$\rho = \frac{\tau}{\pi a} \delta(r - a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\Omega t - in\varphi), \quad j_\varphi = v\rho, \quad (2)$$

соответствующих цилиндрическим мультиполям ($2n$ -полям). Нулевые гармоники в разложении (2) отвечают постоянным поверхностным заряду и азимутальному току, создающим электростатическое поле $E_r = 2\tau/r$ вне и магнитное поле $B_z = 2\tau\Omega/c$ внутри цилиндра. Гармоники $n \neq 0$ соответствуют вращающимся мультиполям, создающим цилиндрические волны на частотах $n\Omega$

$$B_{zn} = -i \frac{2\pi\tau\beta^2 n}{a} \exp(-in\varphi) \begin{cases} H_n^{(2)'}(n\beta) J_n(nkr), & r < a, \\ J_n'(n\beta) H_n^{(2)}(nkr), & r > a, \end{cases}$$

$$E_{\varphi n} = (i/nk) \partial B_{zn} / \partial r, \quad E_m = -(a/\beta r) B_{zn}. \quad (3)$$

Здесь $\beta = v/c$ — безразмерная скорость частиц, $k = \Omega/c$; J_n , $H_n^{(2)}$, J_n' , $H_n^{(2)'}$ — функции Бесселя и Ганкеля второго рода и их производные. Нетрудно видеть, что радиальная компонента электрического поля E_r носит квазистатический характер, а компоненты B_z и E_φ содержат как квазистатическую часть, так и часть, связанную с излучением.

Для больших расстояний, где квазистатические поля пренебрежимо малы, используя асимптотику функций Ганкеля, преобразуем выражение для n -й гармоники к виду

$$B_{zn} \approx (\tau^2 \beta^2 / a) \sqrt{2\pi n / k^2 r} J_n'(n\beta) \times \exp(in(-kz - \varphi + \pi/2) - i\pi/4). \quad (4)$$

Из (4) ясно, что на больших расстояниях от нити распределение излучения по гармоникам определяется функцией $\sqrt{n} J_n'(n\beta)$ и занимает промежуточное положение между спектром излучения одного заряда $n J_n'(n\beta)$ [1] и спектром излучения плоскости $J_n'(n\beta)$ [2]. При ультрарелятивистском движении, когда $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$, поле излучения во всех трех случаях представляет собой последовательность узких импульсов длительностью порядка $2\pi/\gamma^3\Omega$. Примерно одинаковая длительность импульсов определяет одинаковую по порядку величины ширину спектра $\gamma^3\Omega$. Различию в спектрах соответствует разная форма импульсов. Так, в случае одиночного заряда форма импульса определяется диаграммой направленности его излучения и представляет из себя основной максимум и расположенные с обеих сторон от него два "хвоста" с существенно меньшей амплитудой и с противоположным направлением поля (рис. 2). Максимум в спектре приходится в этом случае на гармонику с $n \sim \gamma^3$, структура которой наиболее близка к структуре импульса. В случае же нити за счет сложения импульсов, пришедших в точку наблюдения от разных частей нити, основной максимум сглаживается, а "хвосты" пропадают (рис. 2). Поэтому спектр нити спадает, а максимум излучения, как и для плоскости, приходится на основную гармонику.

3. Выражение (3) для поля вращающейся нити может быть использовано для получения независимым методом найденного в [2] поля плоскости, составленной из вращающихся частиц. Действительно, интегрируя по нитям, параллельным оси z , представим n -ю

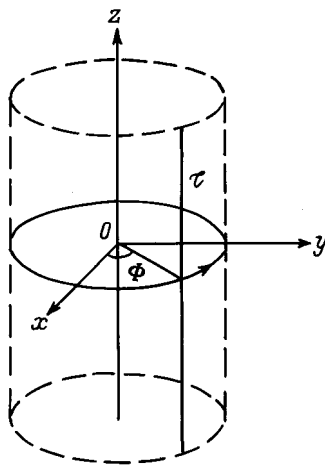


Рис. 1. Элементарный источник в виде нити, состоящей из зарядов, движущихся по идентичным окружностям.

гармонику поля плоскости в точке $P(x_0 > a, 0, 0)$ в виде $B_{zn} = -(2\pi i \sigma \beta^2 n/a)M$, где σ — поверхностная плотность заряда,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(nkr) \exp(-in\varphi) dy,$$

$$r = \sqrt{x_0^2 + y^2}, \varphi = -\text{arctg}(y/x_0).$$

Интеграл M можно вычислить, используя двумерную формулу Грина

$$\int_S (U \Delta V - V \Delta U) dS = \oint \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl \quad (5)$$

для функций $U = \exp(-inkx)$ и $V = B(x - x_0, y) + B(-x - x_0, y)$, где U и $B(x, y)$ — n -е гармоники полей плоскости и нити.

Если интегрирование в (5) проводить по части круга с центром в точке P и радиусом $R > x_0$, расположенной при $x > 0$, то при $R \rightarrow \infty$ контурный интеграл преобразуется к выражению $-2inkM \exp(-in\pi)$. Поскольку функции U и V внутри области интегрирования удовлетворяют уравнению Гельмгольца соответственно без источника и с источником $(4\pi/c)(\text{rot } \mathbf{j})_z$, где \mathbf{j} — n -я гармоника тока нити, то интеграл по площади преобразуется к виду $(4\pi n \beta^2/a) \exp(-inkx_0 - in(\pi/2)) J'_n(n\beta)$. Таким образом, для поля плоскости получаем

$$B_{zn} = 2\pi n \sigma \beta J_n(n\beta) \exp\left(-in\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (6)$$

что совпадает с результатом [2].

4. Оценим расстояние, на котором поле движущейся нити конечной длины мало отличается от поля излучения бесконечной нити. Для этого представим поле нити в плоскости, проходящей через середину нити и перпендикулярной ей, в виде суперпозиции известных полей [1]

образующих ее синфазно вращающихся зарядов

$$E_{\varphi n} = -\frac{2\tau \beta^2 n}{a} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{J'_n(n\beta \sin \vartheta)}{R} \exp(-in(kR + \varphi)) dz. \quad (7)$$

Здесь R, θ, φ — сферические координаты с центром в центре окружности, по которой движется заряд. При длине нити, много большей, чем радиус окружности $l \gg a$, множитель $J'_n(n\beta \sin \vartheta)/R$ является плавным по сравнению с экспонентой $\exp(-inkR)$. На расстояниях, малых по сравнению с френелевской длиной nl_F , где $l_F = kl^2$, экспонента быстро осциллирует и в пренебрежении влиянием краев нити интеграл (7) может быть вычислен методом стационарной фазы, что приводит к результату, совпадающему с (4). Края приводят к небольшим осцилляциям поля (и спектра) нити.

На расстоянии, большом по сравнению с френелевской длиной $r \gg nl_F$, поле нити конечной длины выглядит как поле одиночного заряда, а на малом расстоянии $r \ll l_F$ почти не отличается от поля бесконечной нити. На расстоянии ml_F поле нити конечной длины совпадает

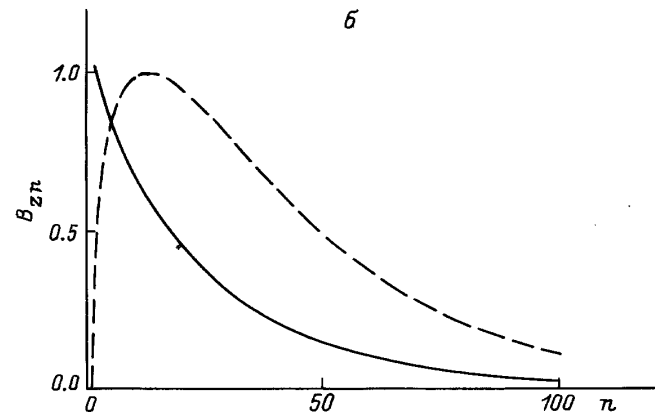
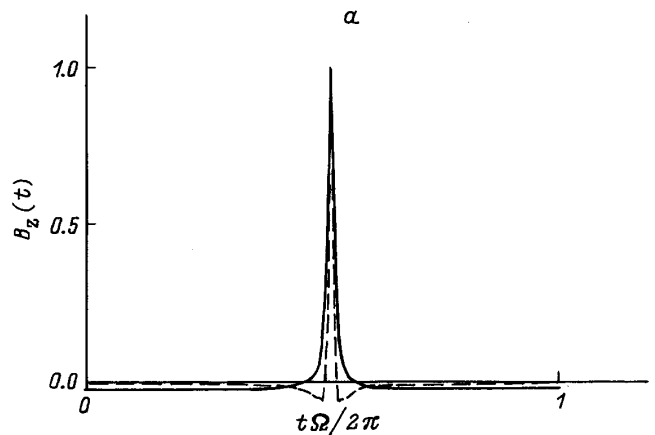


Рис. 2. Поле излучения $B_z = (t)$ (а) и его спектр B_{zn} (б) для вращающихся заряженной нити (сплошная кривая) и одиночного заряда в плоскости его вращения (штриховая) при $\gamma = 3$.

с полем бесконечной нити для гармоник $n \ll m$ и с полем точечного заряда для $n \gg m$. На расстоянии $r \sim l_F$ в спектре излучения появляется максимум на низких гармониках; с увеличением расстояния этот максимум перемещается к гармоникам с номерами порядка γ^3 . На расстоянии $r \gg \gamma^3 l_F$ поле нити практически совпадает с полем точечного заряда.

5. Запаздывание излучения, приходящего в фиксированную точку наблюдения от удаленных частей вращающейся заряженной нити, можно, очевидно, компенсировать приданием ей соответствующего изгиба. Таким свойством обладает, например, нить в виде винтовой линии (или ее часть) с переменным шагом $\varphi = k(\sqrt{r^2 + z^2} - r)$, вращающаяся по поверхности цилиндра радиуса a , где r — расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения. Излучение от разных точек такой нити приходит в точку наблюдения в одной фазе, и спектр соответственно смещен в сторону высоких частот.

Найденное в данной работе поле вращающейся нити (3) может быть эффективно использовано для описания поля высокочастотного пространственного заряда в мазерах на циклотронном резонансе. Таким же методом разложения источников и полей по вращающимся цилиндрическим мультиполям легко также найти представление для собственного поля вращающейся как целое заряженной винтовой линии. Электронные пучки такого типа реализуются, в частности, в магнитоконах и гироконверторах — перспективных мощных релятивистских СВЧ приборах сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. Т. II. М.: Наука, 1988. 512 с.
- [2] Братман В.Л., Самсонов С.В. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 2. С. 189–191.
- [3] Bratman V.L., Samsonov S.V. // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 206 P. 377–382.