

01

Задача электростатики для сжатого сфероида в поле точечного заряда

© И.М. Гордион, И.Д. Токман

Институт физики микроструктур РАН,
603600, Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 25 октября 1995 г.)

1. Введение

Задача о диэлектрическом теле в неоднородном статическом поле (речь идет о решениях в явном виде для определенных случаев) имеет давнюю историю. Краткий обзор этого вопроса можно найти, например, в [1,2]. Широко известны аналитические решения задачи о диэлектрическом шаре в неоднородном поле и диэлектрическом эллипсоиде в однородном внешнем поле (см., например, [3]). Явное решение задачи о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем поле в случае квадратичного и кубического потенциалов дано в [2]. Нам представляется, что нахождение явных решений имеет самостоятельную ценность наряду с разработкой различных приближенных методов [4].

Нами получено аналитическое решение задачи электростатики для сжатого диэлектрического сфероида в поле точечного заряда, расположенного на оси симметрии сжатого сфероида. Задача решена с помощью разложения в ряд по нормальным решениям уравнения Лапласа в координатах (η, θ, φ) , связанных со сфероидом. Как пример прикладного использования этой задачи приведен расчет плотности мейсснеровских токов сверхпроводящего диска в магнитном поле диполя, расположенного на оси диска.

2. Решение

Пусть сжатый сфероид с полуосями d и R ($R > d$) и диэлектрической проницаемостью ϵ расположен в начале декартовой системы координат (x, y, z) , а ось симметрии сфероида совпадает с осью z (рис. 1). Электрический заряд q расположен над сфероидом в точке $\mathbf{r}_q(0, 0, a)$, т. е. необходимо решить уравнения

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q) \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности сфероида

$$\varphi^{int} = \varphi^{ext}, \quad \epsilon E_n^{int} = E_n^{ext}. \quad (2)$$

Здесь φ^{int} , φ^{ext} и \mathbf{E}^{int} , \mathbf{E}^{ext} — электрические потенциал и поле внутри и вне сфероида соответственно. Воспользуемся системой координат (η, θ, φ) , связанных со сфероидом [5],

$$x = f \operatorname{ch}\eta \sin \theta \cos \varphi, \quad y = f \operatorname{ch}\eta \sin \theta \sin \varphi, \quad z = f \operatorname{sh}\eta \cos \theta. \quad (3)$$

Здесь $f = \sqrt{R^2 - d^2}$. При этом поверхность сфероида совпадает с поверхностью $\eta = \eta_0$, где $\operatorname{sh}\eta_0 = d/\sqrt{R^2 - d^2}$, координата заряда $\mathbf{r}_q(\eta_1, 0, 0)$, где $\operatorname{sh}\eta_1 = a/\sqrt{R^2 - d^2}$. Так как заряд находится на оси симметрии сфероида, то решение зависит лишь от двух координат (ρ, z) и соответственно (η, θ) , где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = f \operatorname{ch}\eta \sin \theta$.

Величину $1/|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}|$ можно разложить в ряд по нормальным решениям уравнения Лапласа в координатах, связанных со сфероидом [5],

$$\frac{f}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}|} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) Q_n(\operatorname{ish}\eta_1) P_n(\operatorname{ish}\eta), \quad (4)$$

где точки \mathbf{r}_q и \mathbf{r} имеют координаты $(\eta_1, 0)$ и (η, θ) соответственно; P_n , Q_n — функции Лежандра первого и второго рода n -й степени для комплексного аргумента.

Разложение справедливо для $\eta < \eta_1$. Решение внутри и вне сфероида, следуя [5], представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{int} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) P_n(\operatorname{ish}\eta), \\ \varphi^{ext} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos \theta) Q_n(\operatorname{ish}\eta) + \frac{q}{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (2), (4) и (5), находим коэффициенты A_n и B_n

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{q\sqrt{R^2 - d^2}}{R^2} \frac{(2n+1)Q_n(\operatorname{ish}\eta_1)}{Q'_n P_n - \epsilon P'_n Q_n(\operatorname{ish}\eta_0)}, \\ B_n &= \frac{q(\epsilon - 1)}{\sqrt{R^2 - d^2}} (2n+1) Q_n(\operatorname{ish}\eta_1) \\ &\quad \times \frac{P'_n P_n(\operatorname{ish}\eta_0)}{Q'_n P_n - \epsilon P'_n Q_n(\operatorname{ish}\eta_0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что при $d \rightarrow R$ получаем решение задачи о диэлектрическом шаре в поле точечного электрического заряда

$$\varphi^{int} = q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(\epsilon+1)+1} P_n(\cos \theta) \frac{r^n}{a^{n+1}}, \quad (7)$$

а при $a \rightarrow \infty$ получаем решение задачи о диэлектрическом сфероиде в однородном поле

$$\varphi^{int} = \text{const} + \frac{q}{a^2} \frac{z}{1 + (\epsilon - 1)n^{(z)}}. \quad (8)$$

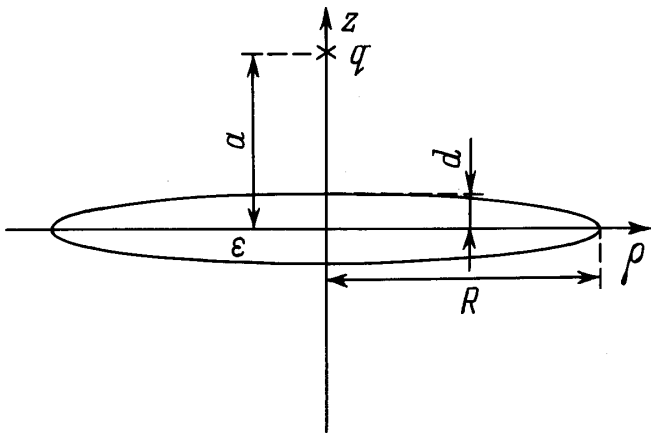


Рис. 1. Диэлектрический сжатый сфероид в поле электрического заряда q .

Здесь $n^{(z)} = (1 + \text{sh}^2 \eta_0)(1 - \text{sh} \eta_0 \text{arctg}(1/\text{sh} \eta_0))$ — коэффициент деполяризации сжатого сфероида в направлении оси симметрии. Полученные результаты позволяют найти решение задачи о сверхпроводящем сжатом сфероиде в поле магнитного диполя, расположенного на оси сфероида. Решение этой задачи имеет практическое значение в связи с задачей о магнитном микронзондировании сверхпроводников [6].

Как известно, электростатическая задача формально совпадает с магнитостатической, и, заменив электрическое поле \mathbf{E} на магнитное \mathbf{H} и устремив $\epsilon \rightarrow 0$, получим задачу о сверхпроводнике в магнитном поле. Пусть $\varphi_q = q\varphi(a, \mathbf{r})$ есть потенциал электрического поля, создаваемого зарядом q , расположенным на расстоянии a от диэлектрического сфероида с $\epsilon \rightarrow 0$. Тогда потенциал точечного диполя, расположенного там же,

$$\varphi_d = qr_d\varphi'_a(a, \mathbf{r}) = m\varphi'_a(a, \mathbf{r}), \tag{9}$$

где $m = qr_d$ — дипольный момент.

Переходя к магнитостатике, найдем магнитное поле \mathbf{H} , создаваемое магнитным диполем над сверхпро-

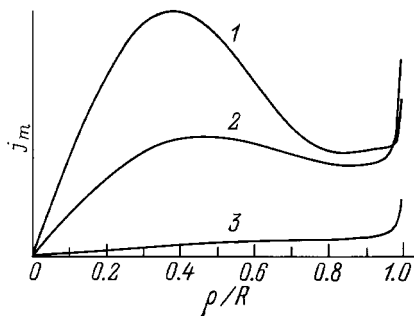


Рис. 2. Распределение плотности мейснеровского тока сверхпроводящего диска, индуцированного магнитным диполем. Диполь расположен на оси диска на расстоянии a от его поверхности; $a = 0.6 \cdot R$ (1), $0.9 \cdot R$ (2), $1.5 \cdot R$ (3).

водящим сфероидом,

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_d \tag{10}$$

и поверхностную плотность мейснеровских токов

$$j_m = \Lambda H_\tau \Big|_{\eta=\eta_0}. \tag{11}$$

Здесь $\Lambda = c/4\pi$, где c — скорость света, $H_\tau \Big|_{\tau=\tau_0}$ — тангенциальная компонента поля \mathbf{H} . Окончательно получим

$$j_m = \Lambda \frac{m}{f^3} \frac{\sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \eta_0)(\cos^2 \theta + \text{sh}^2 \eta_0)^{1/2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P'_n(\cos \theta) \frac{Q'_n(\text{ish} \eta_1)}{Q'_n(\text{ish} \eta_0)}. \tag{12}$$

Для случая тонкого диска ($d/R \rightarrow 0$) выражение (12) в полярных координатах ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) для ближней к диполю поверхности ($0 \leq \cos \theta \leq 1$, т. е. $z > 0$) записывается в виде

$$j_n \Big|_{z>0} = \Lambda \frac{m}{R^3} \frac{\rho}{\sqrt{R^4/(R^2 - d^2) - \rho^2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P'_n(\sqrt{1 - (\rho/R)^2}) \frac{Q'_n(i \cdot a/R)}{Q'_n(i \cdot d/R)}. \tag{13}$$

На рис. 2 приведены зависимости $j_m(\rho)$ при разных расстояниях между диполем и диском для ближней к диполю поверхности диска ($z > 0$). Заметим, что значения $j_m \Big|_{z>0} \gg j_m \Big|_{z<0}$ (здесь $j_m \Big|_{z<0}$ — плотность тока на дальней поверхности диска), что вполне очевидно для рассматриваемого случая тонкого диска.

Данная работа выполнена при поддержке Российской государственной программы по ВТСП (Проект № 92144) и Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 9302-3362).

Список литературы

- [1] Левин М.Л. Жизнь, воспоминания, творчество. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1995. 464 с.
- [2] Левин М.Л., Муратов Р.З. // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2464–2471.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ, 1959. 532 с.
- [4] Проценко В.С. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 9. С. 192–194.
- [5] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИИЛ, 1952. 476 с.
- [6] Nozdrin Yu. et al. // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. 1995. Vol. 5. N 2. P. 1424–1427.