

01;03

О влиянии колебаний подложки на ориентацию жидкого кристалла

© Э.М. Эпштейн

Научно-исследовательский институт "Платан",
141120 Фрязино, Россия

(Поступило в Редакцию 4 ноября 1995 г.)

В недавних работах Лина и Тейлора [1–3] рассмотрено влияние тепловых колебаний подложки на ориентацию на ней молекул жидкого кристалла. Молекула моделируется однородным тонким жестким стержнем, прикрепленным одним концом к плоской поверхности подложки. Рассматривается плоское движение, характеризуемое углом отклонения молекулы θ от нормали к подложке. Помимо факта закрепления конца молекулы на подложке имеется взаимодействие между молекулой и подложкой, описываемое энергией сцепления [4]

$$U(\theta) = (W_0/2) \cos^2 \theta. \quad (1)$$

При $W_0 > 0$ в отсутствие колебаний подложки энергетически выгодна планарная ориентация молекулы ($\theta = 90^\circ$), при $W_0 < 0$ — гомеотропная ($\theta = 0$).

Тепловые колебания подложки моделируются в [1–3] вибрацией точки закрепления молекулы в вертикальном направлении (перпендикулярно поверхности подложки) с некоторой частотой Ω и амплитудой a . Уравнение движения плоского маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса в поле (1) путем линеаризации вблизи верхней точки ($\theta = 0$) сводится к уравнению Матье, анализируются условия устойчивости решений этого уравнения (см., например, [5]). Показано, что при $W_0 > 0$ (исходная ориентация планарная) вертикальное (неустойчивое) положение молекулы становится устойчивым при достаточно большой амплитуде точки закрепления ($a^2 > 8W_0/3m\Omega^2 \equiv a_0^2$, m — масса молекулы). Это означает, что при некоторой температуре происходит фазовый переход от планарной ориентации к гомеотропной. Этот вывод сохраняется при переходе от эйнштейновской (монохроматической) модели к дебаевской (полихроматической). В [1] утверждается, что этот результат нечувствителен к выбору явного вида зависимости $U(\theta)$ (в конечный результат входит только вторая производная в точке равновесия $U''(0)$).

В настоящей работе мы покажем, что последнее утверждение является следствием переупрощения задачи, вносимого линеаризацией исходного уравнения. Кроме того, будет показано, что учет горизонтальных (вдоль поверхности подложки) колебаний точки закрепления может кардинально изменить результаты работ [1–3].

Воспользуемся методом усреднения Капицы [6], не предполагающим линеаризации уравнения колебаний. Положение молекулы описывается координатами $x = x_0(t) + l \sin \theta$, $z = z_0(t) + l \cos \theta$, где l — длина молекулы; $x_0(t)$, $z_0(t)$ — координаты точки ее закрепления на поверхности, изменяющиеся заданным образом. Не конкретизируя пока энергии взаимодействия с поверхностью $U(\theta)$, запишем уравнение движения в виде

$$\frac{1}{3} ml^2 \theta''(t) + \frac{1}{2} ml \left[x_0''(t) \cos \theta + z_0''(t) \sin \theta \right] + U'(\theta) = 0. \quad (2)$$

Проводя усреднение уравнения (2), получим для медленно меняющейся части искомой переменной $\langle \theta \rangle$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dt^2} + \frac{3}{ml^2} U'(\langle \theta \rangle) + \frac{9}{4l^2} \left[\sin \langle \theta \rangle \cos \langle \theta \rangle \left(\langle x_0(t) x_0''(t) \rangle \right. \right. \\ \left. \left. - \langle z_0(t) z_0''(t) \rangle \right) + \cos^2 \langle \theta \rangle \langle x_0(t) z_0''(t) \rangle \right. \\ \left. - \sin^2 \langle \theta \rangle \langle z_0(t) x_0''(t) \rangle \right] = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где угловые скобки означают усреднение по осцилляциям точки закрепления.

Если, следуя [1], положить $x_0(t) = 0$, $z_0(t) = a \cos \Omega t$ и взять $U(\theta)$ в виде (1) с $W_0 > 0$, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dt^2} + \frac{3}{2ml^2} \left(W_0 - \frac{3}{8} ma^2 \Omega^2 \right) \sin 2 \langle \theta \rangle = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует результат, полученный (иным способом) в [1]: при $a > a_0$ вертикальное положение молекулы становится устойчивым, а горизонтальное — неустойчивым, т.е. происходит переход из планарной ориентации в гомеотропную. Однако вопреки утверждению, сделанному в [1], поведение молекулы существенно зависит от вида потенциала $U(\theta)$. Если вместо (1) взять

$$U(\theta) = W_0 \cos \theta \quad (W_0 > 0, \quad |\theta| \leq 90^\circ), \quad (5)$$

получается уравнение

$$\frac{d^2 \langle \theta \rangle}{dt^2} + \frac{3}{2ml^2} \left(2W_0 \sin \langle \theta \rangle - \frac{3}{8} ma^2 \Omega^2 \sin 2 \langle \theta \rangle \right) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что при $a > a_0$, как и в предыдущем случае, вертикальное положение

приобретает устойчивость, однако существенно иного рода. В случае (1) при $a > a_0$ весь "потенциальный холм" как целое переворачивается вверх дном и становится потенциальной ямой. В случае (5) при $a > a_0$ на вершине "холма" появляется "ямка", ширина и глубина которой увеличивается с ростом a , при этом устойчивое состояние оказывается метастабильным, так что усредненное стационарное состояние системы зависит от ее истории (начальных условий).

Существенная модификация результатов работ [1–3] происходит при учете горизонтальных колебаний поверхности подложки. Полагая в (3)

$$x_0(t) = \sum_i a_{xi} \cos(\Omega_{xi}t + \varphi_{xi}),$$

$$z_0(t) = \sum_i a_{zi} \cos(\Omega_{zi}t + \varphi_{zi})$$

(разложение по нормальным колебаниям, суммирование по всему спектру), получаем в силу ортогональности различных нормальных колебаний и случайного распределения начальных фаз

$$\frac{d^2\langle\theta\rangle}{dt^2} + \frac{3}{ml^2}U'(\langle\theta\rangle) + \frac{9}{16l^2} \sum_i (a_{xi}^2\Omega_{xi}^2 - a_{zi}^2\Omega_{zi}^2) \sin 2\langle\theta\rangle = 0. \quad (7)$$

В пределе высоких температур сумма в последнем члене уравнения (7) обращается в нуль в силу закона равнораспределения. Таким образом, вибрации точки закрепления молекулы вносят вклад в усредненное движение лишь в меру отклонения от закона равнораспределения, т.е. либо при низких (ниже дебаевской) температурах, либо при неравновесной природе колебаний подложки, например при возбуждении колебаний внешним источником (в [1] упоминается такая возможность).

Как следует из вышеизложенного, проведенное в [3] компьютерное моделирование температурных ориентационных переходов в нематических жидких кристаллах требует уточнения исходной модели.

Список литературы

- [1] *Lin B., Taylor P.L.* // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 172. P. 281–284.
- [2] *Lin B., Taylor P.L.* // Liquid Cryst. 1994. Vol. 16. N 5. P. 831–843.
- [3] *Lin B., Taylor P.L.* // J. Phys. (France). Ser. 2. 1994. T. 4. P. 825–836.
- [4] *Rapini A., Papoular M.* // J. Phys. (France). Colloq. C4. 1969. T. 30. P. 54.
- [5] *Магнус К.* Колебания. М.: Мир, 1982. 304 с.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: ГИФМЛ, 1958. 208 с.