

01;04;09

Параметрическое возбуждение колебаний сгустка заряженных частиц в ловушке пеннинга

© Н.Д. Наумов, Ю.Г. Павленко

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 121357 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 24 апреля 1995 г.)

Получено автомодельное решение самосогласованных уравнений гидродинамики, описывающее движение эллипсоида заряженных частиц в ловушке Пеннинга и в радиочастотной ловушке. Определены условия, при которых малое периодическое изменение удерживающего магнитного поля в ловушке Пеннинга приводит к раскачке колебаний сгустка.

Введение

Постоянный интерес к изучению поведения заряженных частиц в ловушках обусловлен различными практическими задачами [1–5]. Например, локализация электрона в ловушке Пеннинга позволила достичь высокой точности измерения его магнитного момента [2], а локализация ионов оказывается полезной для точных спектроскопических исследований [3]. Рассматриваемая система может быть также использована для генерации электромагнитного излучения [6]. Несомненный интерес представляет анализ движения заряженных частиц в ловушках в самосогласованной постановке. Такая задача рассматривалась в работе [7] для холодного сгустка частиц в ловушке Пеннинга. Целью данной работы является обобщение развитой в [7] модели для случая наличия у частиц температурного разброса по скоростям, а также изучение влияния переменного магнитного поля на движение сгустка в ловушке Пеннинга. Рассмотрение этой задачи и исследование условий возбуждения колебаний сгустка может представлять определенный практический интерес в связи с предложениями по созданию с помощью указанной ловушки плотной плазмы [4].

Автомодельное решение уравнений гидродинамики

Ловушка Пеннинга представляет собой комбинацию электростатического поля квадрупольного типа и постоянного однородного магнитного поля. Если электростатическое поле в ловушке создается за счет напряжения U на гиперболических электродах, расположенных на расстоянии d от оси z , то потенциал поля равен

$$\Phi = U(2z^2 - x^2 - y^2)/2d^2. \quad (1)$$

Однородное магнитное поле может быть создано с помощью селеноида; если оно изменяется со временем, то возникает вихревое электрическое поле (здесь

и в дальнейшем точкой обозначается дифференцирование по t)

$$\mathbf{B}_0 = F(t)B_0\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_0 = -\dot{F}B_0r\mathbf{e}_\theta/2c. \quad (2)$$

Для решения уравнения Власова в [7] использовались интегралы движения, соответствующие начальным значениям динамических переменных частицы в совокупности внешнего и коллективного полей. В рамках гидродинамического описания это решение самосогласованной задачи соответствует автомодельному движению заряженной жидкости. Используем автомодельный подход для анализа движения сгустка заряженных частиц в нестационарном внешнем поле.

Будем искать решение уравнений гидродинамики заряженной жидкости [8] в виде однородного эллипсоида вращения с зависящими от времени полуосями a, b

$$n(\mathbf{x}, t) = q(t)H(1 - \xi^*\xi - \zeta^2).$$

Здесь $\xi = (x - iy - \sigma)/A$, $\zeta = (z - s_z)/b$ — автомодельные переменные; $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; введены также обозначения

$$\sigma = s_z + is_y, \quad A = a \exp\left(i \int_0^t \Omega(t') dt'\right),$$

причем вектор $\mathbf{s}(t)$ определяет положение центра эллипсоида, а $\Omega(t)$ — угловую скорость его вращения. Движение жидкости считаем нерелятивистским, в связи с чем пренебрегаем влиянием собственного магнитного поля сгустка. Создаваемое частицами электрическое поле внутри эллипсоида имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} = 4\pi n_0(\varkappa r\mathbf{e}_r + \lambda z\mathbf{e}_z),$$

где n_0 — начальное значение плотности частиц, $\lambda = 1/LR^2 - 2\varkappa$.

Выражение для \varkappa зависит от формы эллипсоида: для вытянутого вдоль оси z эллипсоида

$$\varkappa = \frac{1}{4\mu^3 LR^2} \left[2\mu - (1 - \mu^2) \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right], \quad (3)$$

а для сплюснутого эллипсоида

$$\varkappa = \frac{1}{4\nu^3 LR^2} \left[(1 + \nu^2) \arctg \nu - \nu \right]. \quad (4)$$

Здесь $\mu^2 = 1 - a^2/b^2$, $\nu^2 = a^2/b^2 - 1$, $R = a/a_0$, $L = b/b_0$, где a_0, b_0 — начальные размеры эллипсоида. Речь идет о классе автомоделных движений заряженной жидкости, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии [9], поэтому выражения для компонент гидродинамической скорости следует искать в следующем виде:

$$V_x + iV_y = \dot{\sigma} + \xi \dot{A}, \quad V_z = \dot{s}_z + \zeta \dot{b}.$$

В этом случае из уравнения непрерывности получаем, что $q = n_0/LR^2$. Для остальных уравнений в частных производных переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений возможен при условии, что градиент давления также пропорционален расстоянию до центра сгустка, поэтому будем исходить из следующего выражения для давления:

$$p = nk_B T, \quad T = T_0(1 - a_0^2 r^2/2a^4 - b_0^2 z^2/2b^4).$$

В итоге из уравнений гидродинамики найдем, что движение центра сгустка определяется воздействием внешнего поля

$$\ddot{\sigma} + i\omega_0 \dot{\sigma} F + (i\omega_0 \dot{F} - \omega_z^2) \sigma/2 = 0, \quad \ddot{s}_z + \omega_z^2 s_z = 0, \quad (5)$$

в то время как на изменение размеров эллипсоида оказывает влияние также и его собственное поле

$$\ddot{a} + (\omega_0^2 F^2/4 - \omega_z^2/2 - \varkappa \omega_p^2) a$$

$$- [(\Omega_0 + \omega_L F_0)^2 a_0^2 + u^2] a_0^2/a^3 = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{b} + (\omega_z^2 - \lambda \omega_p^2) b - u^2 b_0^2/b^3 = 0. \quad (7)$$

При этом скорость вращения сгустка зависит от его поперечного размера

$$\Omega = (\Omega_0 + \omega_L F_0)/R^2 - \omega_L F.$$

Здесь Ω_0 — начальная угловая скорость, $\omega_0 = eB_0/mc$, $\omega_L = \omega_0/2$, $\omega_z^2 = 2eU/md^2$, $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m$, $u^2 = 2k_B T_0/m$. Отметим, что для пучков заряженных частиц давление, обусловленное разбросом скоростей частиц, выражается через эмиттанс пучка. Здесь величину давления удобнее характеризовать посредством квадрата тепловой скорости частиц u^2 , так как в случае нейтральных частиц уравнения (6), (7) приводят к следующему закону увеличения размеров эллипсоида: $a^2 = a_0^2 + u^2 t^2$, $b^2 = b_0^2 + u^2 t^2$.

Если в уравнениях (5)–(7) положить $F = 1$, то эти уравнения будут описывать движение эллипсоида заряженных частиц в ловушке Пеннинга. В случае радиочастотной ловушки, т.е. когда магнитное поле отсутствует, а удержание частиц в поперечном направлении осуществляется посредством периодического

изменения электростатического потенциала, в выражении (1) следует сделать замену $U \rightarrow UG(t)$. Как нетрудно видеть, тогда вместо (5)–(7) получаются следующие уравнения:

$$\ddot{s}_{x,y} - \omega_z^2 G s_{x,y}/2 = 0, \quad \ddot{s}_z + \omega_z^2 G s_z = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{a} - (\omega_z^2 G/2 + \varkappa \omega_p^2) a - u^2 a_0^2/a^3 = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{b} + (\omega_z^2 G - \lambda \omega_p^2) b - u^2 b_0^2/b^3 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, динамика эллипсоида заряженных частиц в ловушках складывается из трансляционных колебаний и пульсаций размеров. Вращение сгустка, если оно не задано в начальный момент (что подразумевалось при выводе уравнений (9), (10)), возникает при наличии внешнего магнитного поля, т.е. для ловушки Пеннинга.

Колебания эллипсоида в ловушке Пеннинга

В случае постоянного магнитного поля можно получить независимые от времени решения уравнений (6), (7), т.е. $a = a_0$, $b = b_0$, $\Omega = \Omega_0$. Для стационарного состояния сгустка эти уравнения принимают вид

$$-\Omega_0(\Omega_0 + 2\omega_L) - \omega_z^2/2 - \varkappa \omega_p^2/3 = u^2/a_0^2, \quad (11)$$

$$\omega_z^2 - (1 - 2\varkappa) \omega_p^2 = u^2/b_0^2, \quad (12)$$

где \varkappa — значение выражений (3), (4) при $R = L = 1$.

Из уравнения (11) следует, что стационарные решения существуют только для вращающегося эллипсоида, причем диапазон угловых скоростей вращения ограничен; в частности, для положительно заряженных частиц это условие имеет вид $-2\omega_L < \Omega_0 < 0$. Очевидно, что другие ограничения накладываются геометрическими размерами ловушки.

Как нетрудно видеть из уравнений (11), (12), при $\omega_z^2 = \omega_0^2/6$ и $\Omega_0 = -\omega_L$ сгусток будет иметь шарообразную форму. Из (11), (12) для равновесного радиуса сгустка найдем

$$a_0^2 = 6u^2/\omega_0^2(1 - 2h), \quad (13)$$

где $h = \omega_p^2/\omega_0^2$.

Рассмотрим малые колебания такого сгустка. Линеаризуя (6), (7) при $f = 0$, для изменений размеров эллипсоида $\rho = a - a_0$, $\delta = b - a_0$ получим следующие уравнения:

$$\ddot{\rho} + (2\omega_0^2/3 - 8\omega_p^2/15)\rho + \omega_p^2 \delta/5 = 0,$$

$$\ddot{\delta} + (2\omega_0^2/3 - 11\omega_p^2/15)\delta + 2\omega_p^2 \rho/5 = 0.$$

Отсюда для собственных частот вращающегося с ларморовской частотой сгустка заряженных частиц в ловушке Пеннинга найдем

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(2 - h)/3, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2(2 - 14h/5)/3.$$

Влияние модуляции магнитного поля

Динамика одиночной заряженной частицы в совокупности внешних полей (1), (2) изучалась в работе [10]. Там было установлено, что при периодическом изменении магнитного поля с малой амплитудой, т.е. при $F = 1 + f \sin \omega t$, где $f \ll 1$, возможно эффективное ускорение заряженной частицы, сопровождающееся увеличением ее удаления от центра поля. Для этого частота модуляции должна удовлетворять условию

$$\omega^2 \approx \omega_s^2 = \omega_0^2 - 2\omega_z^2. \quad (14)$$

Очевидно, что аналогичная картина будет и для трансляционного движения эллипсоида, что в результате может привести к выбросу частиц на стенки ловушки. Поведение размеров сгустка в зависимости от частоты изменения магнитного поля будем анализировать для начального распределения заряженных частиц в виде стационарного шарообразного сгустка, т.е. его начальный радиус определяется соотношением (13), $\Omega_0 = -\omega_L$, $\omega_z^2 = \omega_0^2/6$.

Так как вихревое электрическое поле влияет на поперечное движение частиц, то параметрический резонанс возможен для частот внешнего воздействия, удовлетворяющих условию $\omega \approx 2\omega_1/k$, где $k = 1, 2, \dots$ [6]. Как показывает численное решение уравнений (6), (7) для стационарного в начальный момент состояния сгустка шарообразной формы, эффективное возбуждение колебаний его размеров происходит при $f \geq 0.1$, $k = 4$, т.е. резонансная частота определяется следующим выражением:

$$\omega_r^2 = \omega_1^2/4 = \omega_0^2(1 - h/2)/6. \quad (15)$$

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов динамики сгустка при $\omega = \omega_r$ для $h = 0.02$ (кривая 1) и 0.2 (кривая 2); величина $f = 0.1$ в обоих случаях; $T = \omega_1 t$. В первую очередь начинается рост амплитуды колебаний поперечного размера, а затем —

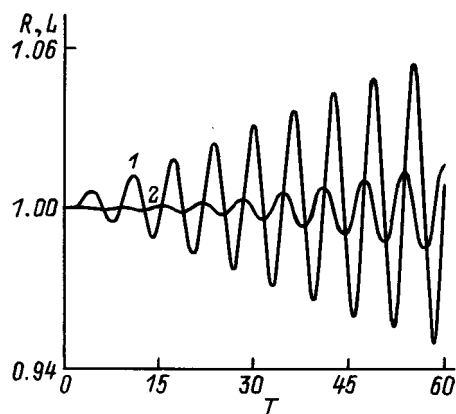


Рис. 1.

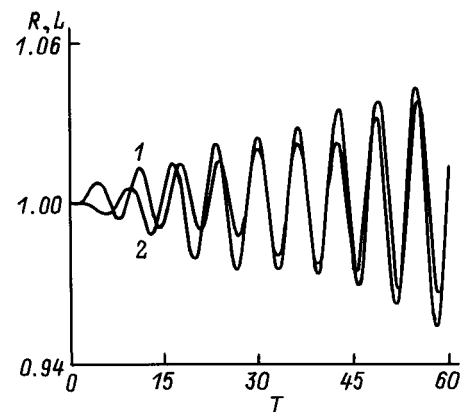


Рис. 2.

продольного, причем начальная скорость возбуждения продольных колебаний, как и следовало ожидать, зависит от степени нелинейности системы, которая в свою очередь определяется плотностью частиц. Область резонансных частот является сравнительно узкой; так, для $h = 0.2$, когда, согласно соотношению (15), $\omega_r^2 = 0.15\omega_0^2$, раскочка колебаний размеров сгустка происходит в случае $0.145 \leq \omega^2/\omega_0^2 \leq 0.155$. Поэтому указанный эффект можно использовать как для разогрева сгустка, так и для оценки плотности частиц. Следует подчеркнуть, что при этом резонансная частота (15) отличается от частоты возбуждения трансляционных колебаний (14), для которой в данном случае найдем $\omega_s^2 = 2\omega_0^2/3$. Поэтому модуляция магнитного поля не должна привести к раскочке перемещений сгустка как целого.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 94-01-01542).

Список литературы

- [1] Тошек П.Э. // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 451–497.
- [2] Van Dyck P.S., Schwinberg P.B., Dehmelt H.G. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. P. 310.
- [3] Многин В.Г. // УФН. 1982. Т. 137. № 1. С. 173–184.
- [4] Barnes D.C., Nebel R.A., Turner L. // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5. N 10. P. 3651–3660.
- [5] Судаков М.Ю. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 1. С. 170–176.
- [6] Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М., 1985.
- [7] Наумов Н.Д. Изв. вузов. Физика. 1994. № 7. С. 18–21.
- [8] Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978.
- [9] Наумов Н.Д. Физика плазмы. 1993. Т. 19. № 11. С. 1406–1408.
- [10] Соколов А.А., Кульжин А.Г., Павленко Ю.Г. // Атомная энергия. 1971. Т. 31. № 3. С. 292–294.