

01;12

Расчет силовых характеристик многокатушечного подвеса сверхпроводящего шара

© Ю.М. Урман

Нижегородский государственный педагогический университет,
Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 26 сентября 1995 г.)

Используя теорию расчета магнитного поля и силовых характеристик электромагнитного подвеса сверхпроводящего тела, развитую в статье [1], проводятся конкретные вычисления силовых характеристик многокатушечного подвеса сверхпроводящего шара. Получены формульные зависимости сил и жесткостей, позволяющие рассмотреть вопрос об устойчивом удержании сверхпроводящего шара в поле системы круговых токов. Рассмотрен вопрос об определении магнитного поля на шаре и найдено условие при котором оно меньше критического.

Решение интегрального уравнения и вычисление коэффициентов индукции

Рассмотрим применение методики, изложенной в [1], для определения силовых характеристик подвеса сверхпроводящего шара, окруженного N произвольно расположенными катушками, по которым циркулирует сверхпроводящий ток.

Учитывая, что для шара выполняется соотношение $(\mathbf{r}_{MQ}\mathbf{n}_Q)/r^2 = 1/(2R)$, где R — радиус шара, представим уравнение (33) из [1] в следующем виде:

$$\sigma(Q) + \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\sigma(M)}{r_{QM}} dS_M = -2\mu_0(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{H}^0(Q) = -\frac{1}{4\pi} \sum \int \left(\mathbf{j}_k(P_k) \nabla_Q \frac{1}{r_{QP_k}} \right) dV_k \quad (2)$$

магнитное поле от N катушек с током, определенное в точке Q шара.

Очевидно, что в силу линейности уравнения (1)

$$\sigma(Q) = \sum \sigma_k(Q), \quad (3)$$

где σ_k — плотность зарядов, наводимая на шаре током k -й катушки.

Поэтому, подставив индекс k у σ и \mathbf{H}^0 в (1), мы будем иметь интегральное уравнение для определения поверхностных зарядов от тока k -й катушки. Будем искать решение $\sigma(Q)$ в виде

$$\sigma(Q) = \sum \alpha_{lm}^* Y_{lm}(Q). \quad (4)$$

Для определения α_{lm}^* умножим уравнение (1) на сферическую функцию $Y_{lm}^*(Q)$ и проинтегрируем по

сфере единичного радиуса. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int \sigma(Q) Y_{lm}^*(Q) d\Omega_Q + \frac{1}{4\pi R} \int \sigma(M) \\ & \times \left\{ \int \frac{1}{r_{MQ}} Y_{lm}^*(Q) \right\} dS_M \\ & = -2\mu_0 \int (\mathbf{n}_Q \mathbf{H}^0(Q)) Y_{lm}^*(Q) d\Omega_Q. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисляя интеграл в фигурных скобках, приведем (5) к виду

$$\int \sigma Y_{lm}^* d\Omega + \frac{1}{2l+1} \int \sigma Y_{lm}^* d\Omega = -2\mu_0 \int H_n^0 Y_{lm}^*(Q) d\Omega_Q, \quad (6)$$

откуда

$$\int \sigma(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega_M = -\mu_0 \frac{2l+1}{l+1} \int H_n^0 Y_{lm}^*(M) d\Omega_M \quad (7)$$

и окончательно

$$\sigma(Q) = -\mu_0 \sum \frac{2l+1}{l+1} Y_{lm}(Q) \int H_n^0(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega_M. \quad (8)$$

Представим потенциал внешнего поля в окрестности шара в форме

$$\varphi^0 = \sum \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \alpha_{lm}^* r^l Y_{lm}(Q). \quad (9)$$

Из граничного условия $H_n + H_n^0 = 0$ найдем

$$\alpha_{lm}^0 = -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{lR^{l-1}} \int H_n^0(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega_M. \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты разложения внешнего поля в ряд по сферическим функциям выражаются через коэффициенты разложения проекции внешнего поля на внешнюю нормаль к шару в ряд

по сферическим функциям. Подставляя (10) в (9), получим

$$\varphi_0 = - \sum \frac{r^l}{lR^{l-1}} \left\{ \int H_n^0(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega_M \right\} Y_{lm}(Q). \quad (11)$$

Определив по φ^0 поле \mathbf{H}^0 , найдем полное поле на поверхности сверхпроводящей сферы, а затем поверхностный ток

$$\mathbf{i} = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_l] = \sum \frac{2l+1}{l(l+1)} [\mathbf{n} \times \nabla_\Omega] Y_{lm}(Q) \times \int H_n^0(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega_M. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$\int H_n^0(M) Y_{lm}^*(M) d\Omega = i \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} R^{l-1} \times \int \frac{j \mathbf{Y}_{lm}^{0*}(P_k)}{r_{P_k}^{l+1}} dV_k, \quad (13)$$

найдем, что единичный ток, возбуждаемый k -й катушкой на поверхности шара, равен

$$\mathbf{i}_k^0(Q) = - \frac{W_k}{S_k} \sum Y_{lm}^0(Q) R^{l-1} \times \int \frac{\mathbf{t}_k(P_k) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_k)}{r_{P_k}^{l+1}} dV_k. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{Y}_{lm}^0 — шаровой вектор, определяемый формулой

$$\mathbf{Y}_{lm}^0 = \frac{-i}{\sqrt{l(l+1)}} [\mathbf{n} \times \nabla_\Omega] Y_{lm};$$

r_{P_k} — расстояние от центра шара до точки P_k на катушке.

Вычислением $\mathbf{i}_k^0(Q)$ кончается первый этап метода. Следуя нашей методике, мы должны вычислить коэффициенты индуктивности $S_{\mu k}$. Для этого вначале найдем, используя формулу (14), интеграл

$$\int \frac{\mathbf{i}_\mu^0(M)}{r_{MP_k}} dS_M = - \frac{W_k}{S_\mu} \sum R^{l-1} \times \int \frac{\mathbf{t}_\mu(P_k) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu)}{r_P^{l+1}} dV_k \int \frac{\mathbf{Y}_{lm}^{0*}(M)}{r_{MP_k}} dS_M. \quad (15)$$

Вычисляя интеграл по поверхности, получаем

$$\int \frac{\mathbf{Y}_{lm}^{0*}(M)}{r_{MP_k}} dS_M = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{\mathbf{Y}_{lm}^{0*}(P_k)}{r_{P_k}^{l+2}} R^{l+2}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), имеем

$$\oint \frac{\mathbf{i}_\mu^0(M)}{r_{MP_k}} dS_M = - 4\pi \frac{W_\mu}{S_\mu} \sum \frac{R^{2l+1}}{2l+1} \frac{\mathbf{Y}_{lm}^0(P_k)}{r_P^{l+1}} \times \int \frac{\mathbf{t}_\mu(P_\mu) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu)}{r_P^{l+1}} dV_\mu. \quad (17)$$

Используя (17), находим формулу для коэффициента $S_{\mu k}$

$$S_{\mu k} = - \frac{W_k W_\mu}{S_k S_\mu} \sum \frac{R^{2l+1}}{2l+1} \int \frac{\mathbf{t}_\mu(P_\mu) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu)}{r_P^{l+1}} dV_\mu \times \int \frac{\mathbf{t}_k(P_k) \mathbf{Y}_{lm}^{0*}(P_k)}{r_P^{l+1}} dV_k. \quad (18)$$

Для окончательного определения коэффициента $S_{\mu k}$ остается при конкретной форме катушек вычислить интегралы, стоящие под знаком суммы. В качестве примера вычислим коэффициент $S_{\mu k}$ для осесимметричного подвеса шара, образованного N соосными круговыми токами разных радиусов. Будем считать, что центр шара не лежит на оси симметрии. Тогда $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_\mu - \rho$, где ρ — радиус-вектор, проведенный от некоторой точки на оси системы токов, принятой за начало отсчета (это может быть точка положения равновесия), до центра шара, \mathbf{r}_μ — радиус-вектор, проведенный из этой же точки к точкам μ -витка.

В Приложении показано, что

$$\int \frac{\mathbf{t}_\mu(P_\mu) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu)}{r_P^{l+1}} dV_\mu = (-1)^{l-m+1} 2\pi i S_\mu b_\mu \times \sqrt{\frac{l(2l+1)}{(l+1)(l+m)!(l-m)!}} \times \sum - \frac{(l_1+l-1)!}{\sqrt{(2l_1+1)(l_1+m)!(l_1-m)!}} \frac{\rho^{l_1}}{r_\mu^{l_1+l+1}} \times Y_{l_1 m}(\mathbf{l}_\rho) P_{l_1+l}^1(Q_\mu), \quad (19)$$

где b_μ — радиус μ -го витка, θ_μ — сферический угол положения μ -го витка, \mathbf{l}_ρ — единичный вектор направления ρ .

Подставляя это выражение в формулу (18), получим

$$S_{\mu k} = - 4\pi^2 W_k W_\mu \sum R^{2l+1} \frac{l b_\mu b_k}{(l_1+1)(l_1+m)!(l_1-m)!} \times \sum \frac{(l_1+l-1)!(l_2+l-1)!\rho^{l+l_1}}{[(2l_1+1)(2l_2+1)(l_1+m)!(l_2+m)! \times (l_1-m)!(l_2-m)!]^{1/2}} \times Y_{lm}(l_\rho) Y_{lm}^*(l_\rho) P_{l+l_1}^1(\theta_\mu) P_{l+l_1}^1(\theta_k) (r_\mu^{l+l+1} r_k^{l+l+1})^{-1}. \quad (20)$$

Распишем выражение (20) с точностью до квадратичных членов по координатам смещения центра шара относительно точки, принятой за начало координат. Выбирая (в силу осевой симметрии) смещение

центра шара в плоскости XZ , будем иметь

$$\begin{aligned}
S_{\mu k} = & -W_{\mu}W_k \frac{Rb_{\mu}b_k}{r_{\mu}r_k} \sum \frac{h^l}{l(l+1)} P_l^1(\theta_{\mu})P_l^1(\theta_k) \\
& - W_{\mu}W_k Z \frac{Rb_{\mu}b_k}{r_{\mu}r_k} \left[\frac{1}{r_k} \sum \frac{h^l}{l+1} P_l^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r_{\mu}} \sum \frac{h^l}{l+1} P_l^1(\theta_k)P_{l+1}^1(\theta_{\mu}) \right] - \frac{1}{4}W_{\mu}W_k(2z^2 - x^2) \\
& \times \frac{Rb_{\mu}b_k}{r_{\mu}r_k} \sum h^l P_l^1(\theta_{\mu})P_{l+2}^1(\theta_k) \\
& + \frac{1}{r_k^2} \sum h^l P_l^1(\theta_{\mu})P_{l+2}^1(\theta_k) - W_k W_{\mu} z^2 \\
& \times \frac{Rb_{\mu}b_k}{r_{\mu}^2 r_k^2} \sum h^l \frac{l}{l+1} P_{l+1}^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) - \frac{1}{2}W_{\mu}W_k x^2 \\
& \times \frac{Rb_{\mu}b_k}{r_{\mu}^2 r_k^2} \sum h^l \left(\frac{l}{l+1} \right) P_{l+1}^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k). \quad (21)
\end{aligned}$$

Здесь $h = R/(r_{\mu}r_k)$.

Ряды в формуле (21) суммируются, при этом получают следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
\sum \frac{h^l}{l(l+1)} P_l^1(\theta_{\mu})P_l^1(\theta_k) &= \frac{1}{2\pi} \int \delta^{-1} \cos \nu d\nu = L, \\
\sum \frac{h^l}{l+1} P_l^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) &= (\cos \theta_k - h \cos \theta_{\mu}) \frac{1}{2\pi} \int \delta^{-3} \cos \nu d\nu, \\
\sum h_l P_l^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) &= (3 \cos \theta_k - h \cos \theta_{\mu}) \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int \delta^{-5} \cos \nu d\nu - \frac{1}{2\pi} \int \delta^{-3} \cos \nu d\nu, \\
\sum h^l \frac{l}{l+1} P_{l+1}^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) &= h \frac{d^2 L}{dh^2} + \frac{dL}{dh} - \frac{1}{h} L, \\
\sum h^l \left(\frac{l}{l+1} \right)^2 P_{l+1}^1(\theta_{\mu})P_{l+1}^1(\theta_k) &= h \frac{d^2 L}{dh^2} + \frac{1}{h} \int \frac{1}{x} L(x) dx - \frac{1}{h} L.
\end{aligned}$$

В этих формулах $\delta = [1 - 2h(\cos \theta_{\mu} \cos \theta_k + \sin \theta_{\mu} \sin \theta_k \cos \nu) + h^2]^{1/2}$. Справедливость этих соотношений можно проверить разложением подынтегральных выражений по полиномам Лежандра и дальнейшем интегрировании по ν . Заменой переменной интегралы сводятся к полным эллиптическим первого \mathcal{K} , второго \mathcal{E} и третьего Π родов либо к интегралу

$$\int \frac{\sin^{2\mu-1} x \cos^{2\nu-1} x}{(1 - k^2 \sin^2 x)^P} dx = \frac{1}{2} B(\mu, \nu) F(P, \mu; \nu + \mu; k^2),$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера, $F(P, \mu; \nu + \mu; k^2)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$k^2 = \frac{4h \sin \theta_{\mu} \sin \theta_k}{1 - 2h \cos(\theta_{\mu} + \theta_k) + h^2}.$$

Так,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int \delta^{-1} \cos \nu d\nu &= \frac{1}{\pi \sqrt{h \sin \theta_{\mu} \sin \theta_k}} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \mathcal{K} - \frac{2}{k} \mathcal{E} \right], \\
\frac{1}{2\pi} \int \delta^{-1} \cos \nu d\nu &= \frac{k}{4\pi (h \sin \theta_{\mu} \sin \theta_k)^{3/2}} \left[\frac{2 - k^2}{1 - k^2} \mathcal{E} - \mathcal{K} \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Таким образом, вычисление коэффициентов $S_{\mu k}$, а с ними и силовых характеристик осесимметричного подвеса сверхпроводящего ротора приводится к табулированным функциям.

Вопросы удержания сверхпроводящего шара в поле системы круговых токов

Исследуем возможность устойчивого равновесия сверхпроводящего шара в системе коаксиальных круговых токов. Условие устойчивости определяется следующими требованиями: сила вдоль оси системы $F_z = P$, где P — вес шара, осевая k_z и боковая k_{\perp} жесткости больше нуля. Эти величины при постоянных токах можно получить простым дифференцированием магнитной энергии при учете формулы (21). Если размеры шара малы, проще воспользоваться рядами, так как в этом случае они быстро сходятся и достаточно взять несколько членов.

Так, для подвеса, образованного одним круговым током, аналитическая зависимость силы и жесткости при $R/r \ll 1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
F = -F_0 \frac{\eta}{(1 + \eta^2)^4}, \quad k_z = \frac{F_0}{b} \frac{7\eta^2 - 1}{(1 + \eta^2)^5}, \\
k_{\perp} = \frac{F}{4b} \frac{(2 - 5\eta^2)}{(1 + \eta^2)^5}, \quad F_0 = \frac{3}{2} \pi \mu_0 I^2, \quad (23)
\end{aligned}$$

где b — радиус кругового тока величиной I ; $\eta = z/b$ — отнормированное на радиус витка смещение центра шара вдоль оси, отсчитываемое от плоскости кольца.

Из формул (22) следует, что в интервале $0.378 < \eta < 0.63$ подвес будет консервативно устойчив. При этом вес ротора будет ограничиваться условием

$$0.97 < \frac{P}{F_0} < 1.12. \quad (24)$$

Пределы, в которых может варьироваться вес поддерживаемого шара, как видно из (24), составляют всего лишь 15%. Если он слишком тяжел, то проваливается сквозь кольцо, а если слишком легкий, то поднимается выше и скатывается вбок. Графическая зависимость жесткостей и силы от параметра η , характеризующего относительное смещение шара от плоскости витка, приведена на рис. 1.

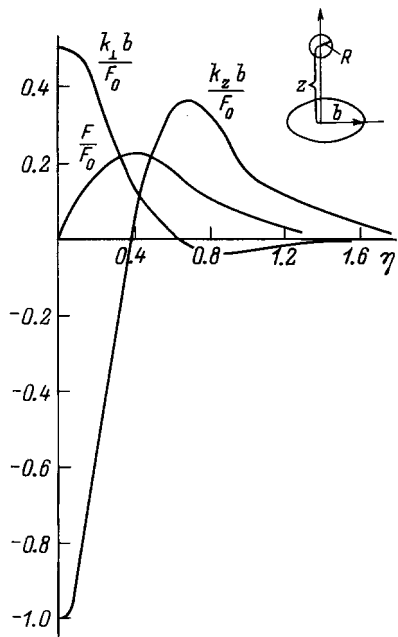


Рис. 1.

С увеличением размера шара область устойчивости сверхпроводящего шара в поле токового кольца изменяется незначительно. Так, сравнение границ устойчивости малого шара, поддерживаемого полем одного кольца против силы тяжести, с аналогичными данными поддержания шара с $R = 0.56b$, показывает, что разница в числах находится в пределах 30%: $R \ll b$ устойчивость при $0.316 < \eta < 0.63$, $R = 0.56b$ устойчивость при $0.435 < \eta < 0.767$. Для шара произвольного радиуса энергия взаимодействия с одним кольцом тока

$$U = -\frac{\mu_0}{2} I^2 b \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \mathcal{K} - \frac{2}{k} \mathcal{E} \right] = \mu_0 I^2 \Delta L \quad (25)$$

и сила, действующая на шар,

$$F = \mu_0 I^2 \frac{\partial \Delta L}{\partial z} \quad (26)$$

выражаются через эллиптические интегралы. Аргумент этих функций

$$k^2 = \frac{4R^2 b^2}{(R^2 + b^2)^2 + (b^2 - R^2)z^2 + z^4}, \quad (27)$$

ΔL — изменение входной индуктивности под влиянием шара.

Сила F при заданном токе I имеет максимум на расстоянии около $\eta = 0.4$, слабо перемещаясь при изменении размеров шара (лишь бы $R < b$). Если шар больше кольца, то, естественно, сила обращается в бесконечность, когда шар касается тока. При малом зазоре между токовым кольцом и шаром сила определяется выражением

$$F = \mu_0 I^2 \frac{R \sin \theta \cos \theta}{\delta}, \quad (28)$$

где δ — расстояние (зазор) между шаром и контуром с током, $\delta \ll 1$; θ — угол, под которым видно токовое кольцо из центра шара.

При заданном магнитном потоке ψ , пронизывающем токовое кольцо, ток $I = \psi/L$. В силу уменьшения индуктивности L при приближении шара к кольцу сила F возрастает быстрее, чем при $I = \text{const}$ и максимум достигается ближе к кольцу с большим значением F_{max} .

В индуктивность $L = L_0 - \Delta L$ входит постоянная самоиндукция кольца L_0 , которая определяется его конструкцией. Сила при заданном потоке выражается

$$F = \mu_0 \frac{\psi^2}{(L_0 - \Delta L)^2} \frac{d\Delta L}{dz}. \quad (29)$$

При любых параметрах системы фокусирующая сила положительна вблизи токового кольца, но быстро падает и переходит в нуль. При последующем удалении шара поле оказывает фокусирующее действие.

Потенциальный барьер поля двух токовых колец допускает равновесие шара в средней плоскости на оси системы (если отсутствуют внешние силы). Если по кольцам текут однонаправленные токи, то условия устойчивости для боковых и осевых смещений несовместны. Если же в кольцах токи встречные, то устойчивое равновесие маленького шара выполняется, так как при удалении от центральной точки, где поле равняется нулю, оно возрастает во все стороны. На рис. 2, 3 показана зависимость силовых характеристик от смещения $\eta = z/b$ при расстоянии между плоскостями токов $2h = b$ для маленького шара $\xi = 0.1$ и шара с $\xi = 0.5$ ($\xi = R/b$ — относительный радиус шара).

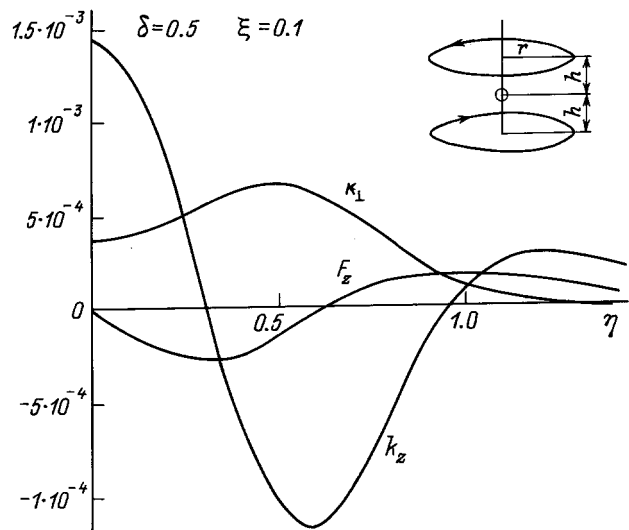


Рис. 2.

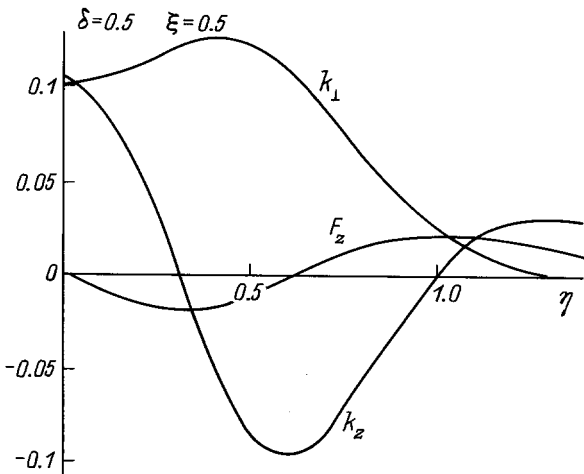


Рис. 3.

При фиксированном расстоянии между токовыми кольцами области устойчивости мало зависят от размеров шара. Характер изменения силовых характеристик одинаков как для подвеса с постоянным током, так и с постоянным потоком. По величине же значения функций при постоянном потоке несколько больше, чем при постоянном токе, что уже отмечалось в одновитковом подвесе. Как видно из рисунков, равновесное удержание в центре подвеса (сферическая потенциальная яма) шара малых размеров невозможно. Однако для шаров большого размера можно при определенных условиях добиться равновесного удержания даже в центре подвеса. Зависимость поперечной и продольной жесткостей от угла θ положения круговых токов при фиксированном радиусе шара и малом зазоре между шаром и витком определяется следующими формулами:

$$k_z = \mu_0 I^2 R \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\delta^2}, \quad k_x = \frac{\mu_0 I^2 R \sin^3 \theta}{2 \delta^2}. \quad (30)$$

Откуда следует, что условие равновесности дается соотношением $\text{tg } \theta = \sqrt{2}$.

Определение магнитного поля в подвесе и условие, при котором оно меньше критического

При анализе силовых характеристик подвеса в предыдущем разделе мы нигде не использовали ограничение на величину тока. Однако функционирование сверхпроводящих подвесов ограничивается критической напряженностью магнитного поля ротора, а следовательно, величиной тока.

Поле в любой точке осесимметричного подвеса можно найти, взяв операцию ротора от выражения

векторного потенциала \mathbf{A} , полученного в [2],

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \int \left[\mathbf{j} \times \frac{\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_k|^3} \right] dV_k - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \int \left[\mathbf{j} \times \frac{r_k^2 \mathbf{r}_Q - R^2 \mathbf{r}_k}{[R^4 - 2R^2 \mathbf{r}_Q \mathbf{r}_k + r_k^2 \mathbf{r}_k^2]^{3/2}} \right] dV_k. \quad (31)$$

Устремляя точку Q к точкам на поверхности шара, получим

$$\mathbf{H}_s = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R} \sum [\mathbf{j} \times \mathbf{n}_Q] \frac{(R^2 - r_k^2) dV_k}{(R^2 - 2R \mathbf{n}_Q \mathbf{r}_k + r_k^2)^{3/2}}. \quad (32)$$

Здесь \mathbf{n}_Q — вектор внешней нормали к точке Q на шаре. Из выражения (32) следует, что величина поля на шаре зависит как от положения источников \mathbf{r}_Q , так и положения точки Q на шаре. Рассмотрим формулу (32) для одного кругового тока, тогда

$$\mathbf{H}_s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \oint [d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{n}_Q] \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2R \mathbf{n}_Q \mathbf{r} + r^2)^{3/2}}. \quad (33)$$

Пусть при некотором зазоре δ_0 между шаром и круговым током магнитное поле на поверхности шара в некоторой точке Q достигает максимального значения H_{max} . Очевидно, что в силу аксиальной симметрии это максимальное значение будет достигаться в целом контуре, описанном на шаре, имеющем угловые параметры те же, что и точка Q . Величина тока, при котором будет достигаться это значение поля, равна

$$I_{\text{max}} = \frac{H_{\text{max}} R 4\pi}{\mu_0 (R^2 - r^2) G(\delta_0, \theta)}, \quad (34)$$

где

$$G(\delta_0, \theta) = \int (R^2 - 2R \mathbf{r} \mathbf{n}_Q + r^2)^{3/2} \cos \nu \, d\nu.$$

С уменьшением зазора незатухающий ток вследствие сохранения потока начнет возрастать, что будет приводить к увеличению магнитного поля. Увеличение H_{max} до критического значения $H_{1\text{кр}}$ является ограничивающим условием функционирования подвеса. Для выполнения этого условия необходимо знать, какой ток нужно возбудить в катушке при зазоре δ_0 , чтобы при смещении ротора напряженность магнитного поля не превысила допустимого значения. Пусть на зазоре δ_0 ток достиг значения I_δ . В силу сохранения потоков ток

$$I_{\delta_0} \leq \frac{I_{\text{кр}} L(\delta)}{L(\delta_0)}. \quad (35)$$

Подставляя в (35) формулу (34), получаем условие на величину I_{δ_0}

$$I_{\delta_0} \leq \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{H_{\text{кр}} R L(\delta)}{(R^2 - r^2) G(\delta_0, \theta) L(\delta_0)}. \quad (36)$$

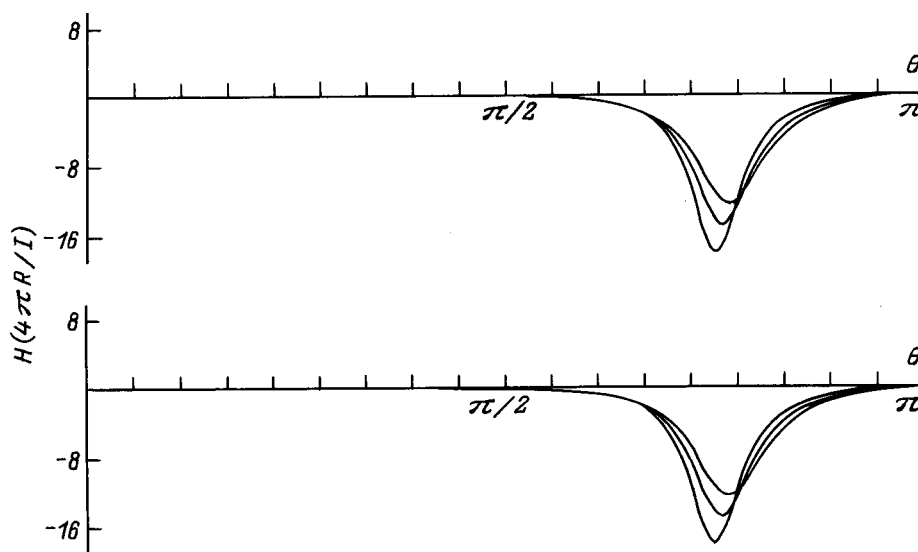


Рис. 4.

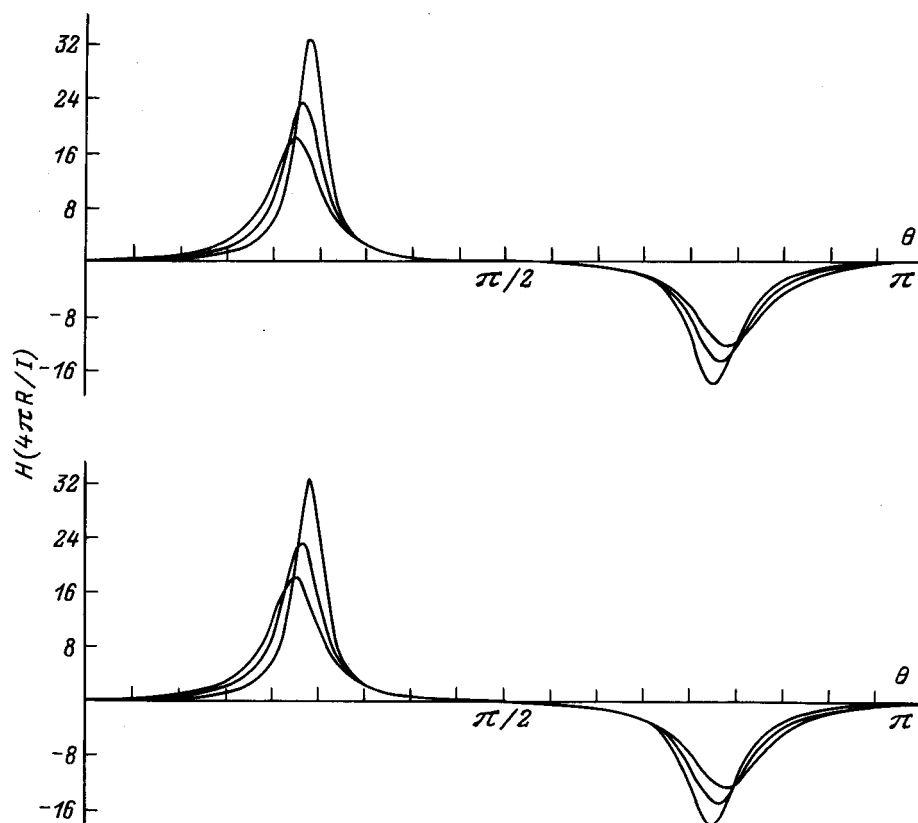


Рис. 5.

На рис. 4,5 приведены зависимости $H(\theta)/(\mu_0/4\pi)IR$ на шаре в однокатушечном и двухкатушечном подвесах. Как видно, модуль магнитного поля на шаре от одной катушки имеет ярко выраженный максимум, причем этот максимум при смещении шара вдоль оси катушки смещается в сторону больших Q , а его величина уменьшается. В случае двух катушек величина поля имеет по

абсолютной величине два максимума. На рисунках приведена зависимость величины поля от угла θ в случае расположения ротора в центре подвеса и смещение ротора (вверх) относительно центра витка. При смещении ротора вдоль оси подвеса симметрия рисунка нарушается. При расчете $R = 2.5 \cdot 10^{-2}$ м отнормированное на R смещение шара относительно центра витков бралось $d = 0$,

0.004, 0.08. Витки располагались под углами $\theta_0 = \pi/4$ и $3\pi/4$ и отнормированный радиус витков $r_b = 0.792$. Отнормированный радиус сферы, на котором расположены витки, равен 1.12.

Приложение

Введем в рассмотрение иррегулярную в точке $r = 0$ функцию

$$\mathfrak{A}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{L+1}} \mathbf{Y}_{jM}^{LS}(\Omega_r), \quad (\text{П1})$$

где $\mathbf{Y}_{jM}^{LS}(\Omega_r)$ — шаровой тензор [3].

Используя формулы работы [4], получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{jM}^{LS}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}) &= \sum_{\substack{l, Q, h \\ l+Q=h}} (-1)^{S+l+h} \sqrt{\frac{(2Q+1)!(2h+1)}{(2L)!(2l)!}} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} l & Q & L \\ j & S & h \end{matrix} \right\} \frac{r_1^l}{a^{Q+1}} \{ \mathbf{Y}_h^{l+S}(\Omega_1) \oplus Y_Q(\Omega_a) \}_{jM}. \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

Полагая в (П2) индекс $S = 1$ будем иметь разложения шарового вектора. Выбирая далее $i = j$ и учитывая, что $\mathbf{Y}_{iM}^j = \mathbf{Y}_{jM}^0$, а также раскрывая значения $6 - j$ символов, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{jM}^0(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}) &= \frac{\mathbf{Y}_{jM}^0(\Omega_r)}{r^{j+1}} = \sqrt{\frac{4\pi}{(2j)!}} \sum_{\substack{l_1 l_2 \\ l_2 - l_1 = j}}^{\infty} (-1)^{l+j+1} \\ &\times \sqrt{\frac{(2l_2)!}{(2l_1+1)!}} \frac{r_1^{l_1}}{a^{l_1+1}} \left[\sqrt{\frac{l_1}{l_2(j+1)}} \{ Y_{l_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{Y}_{l_2-1}^{l_1}(\Omega_a) \}_j \right. \\ &\left. - \sqrt{\frac{j(l_2+1)}{l_2(j+1)}} \{ Y_{l_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{Y}_{l_2}^{l_1}(\Omega_2) \}_j \right]. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

При замене катушки витком

$$\begin{aligned} \int_{V_\mu} \frac{\mathbf{t}_\mu(P_\mu) \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu)}{r_{P_\mu}^{l+1}} &= S_\mu \frac{1}{r_{P_\mu}^{l+1}} \int_C d\mathbf{l}_\mu \mathbf{Y}_{lm}^0(P_\mu) \\ &= \frac{S_\mu b_\mu}{r_{P_\mu}^{l+1}} \oint_C \mathbf{1}_\varphi \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Умножая скалярно формулу (П3) на $d\mathbf{l}$, интегрируя по контуру витка и принимая во внимание, что $\oint d\mathbf{Y}_{l_2-1}^{l_1}(\Omega_1) = 0$, а

$$\oint d\mathbf{Y}_{l_2}^{l_1}(\Omega_2) = -\frac{2\pi i}{\sqrt{l_2/(l_2+1)}} \sqrt{\frac{2l_2+1}{4\pi}} b P_{l_2}^1(\theta),$$

после соответствующего переобозначения и раскрытия коэффициентов Клебша–Гордана получим формулу (19) основного текста.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 95-01-00612.

Список литературы

- [1] Урман Ю.М. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 1.
- [2] Веселитский И.В., Урман Ю.М. // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 8. С. 1585–1587.
- [3] Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [4] Урман Ю.М. // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 3. С. 457–462.