Индекс
70298

ISSN 0044–4642 Журн. техн. физики. 1997. Т. 67. Вып. 1. С. 1–144

Зав. редакцией Л.Н.Шитова. Техн. ред. Е.В.Траскевич
Корректоры Л.М. Бова и Э.Г. Рабинович

Компьютерный набор и изготовление оригинал-макета
Вычислительный центр ФТИ им.А.Ф.Иоффе РАН
194021 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

ЛР № 020297 от 27.11.91. Подписано к печати 25.12.96. Формат 60×90 1/8.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18.
Уч.-изд. л. 14. Тираж . Тип. зак. 498. С 1561

Санкт-Петербургская издательская фирма РАН
199034 Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1
Журнал технической физики
Телефон (812) 218–36–12

Санкт-Петербургская типография № 1 РАН
199034 Санкт-Петербург, 9 линия, 12

Журнал технической физики, 1997, том 67, № 1

01;12

Теория расчета силовых характеристик электромагнитного подвеса сверхпроводящего тела

© *Ю.М. Урман*

Нижегородский государственный педагогический университет,
Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 26 сентября 1995 г.)

Разрабатывается теория расчета магнитного поля и силовых характеристик электромагнитного подвеса сверхпроводящего тела, основанная на методе вторичных источников. Этот метод приводит к системе векторных интергальных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности вторичных источников, решение которых позволяет найти поверхностные токи на сверхпроводящих телах, а затем простым интегрированием магнитное поле и силовые характеристики подвеса. Показывается, как переформулировать задачу, чтобы свести ее к определению скалярных вторичных источников (магнитных зарядов), приводящую к интегральным уравнениям меньшей размерности. Даются примеры расчета скалярных вторичных источников для сверхпроводящих полупространства и цилиндра.

Введение

На протяжении последних лет как в нашей стране, так и за рубежом техническое освоение космоса, прогресс точного приборо- и машиностроения, повышение скоростей вращения роторных устройств, увеличение дальности, скорости и ресурса действия подвижных объектов, реализация бестигельной плавки и т. д. привели к созданию новых технологических процессов и систем, технические характеристики которых во многом определяются динамическим поведением твердого тела, взаимодействующего с полем той или иной физической природы. Особый успех был достигнут при создании неконтактных подвесов и опор, приближающихся по своим свойствам к идеальным и основанных на левитации (свободном парении) твердых тел в электрическом или магнитном полях.

Достоинства, которые имеют неконтактные подвесы, открывают обширную область применений в экспериментальной технике и разработках новых приборов. Они используются в биологических центрифугах при создании полей центробежных сил, превышающих силу тяжести в 10^8 раз, в экспериментах ядерной физики, в космических аппаратах при создании трехстепенного шарового стабилизатора, для подвески моделей в аэродинамической трубе, для получения особо чистых веществ, материалов с улучшенными свойствами и совершенных монокристаллов, для плавки редких металлов, для создания высокоточных гироскопов, акселерометров, градиентометров и т. д.

Из исследований, проводимых по созданию неконтактных подвесов, многообещающими являются работы, для подвеса тела которых используется явление сверхпроводимости. Отсутствие сопротивления и идеальный диамагнетизм сверхпроводников позволяют создавать электромагнитные подвесы, отличающиеся от других подобных устройств большой стабильностью параметров и возможностью работать при отключенных источниках электропитания на незатухающих в сверхпроводящих катушках токах.

Обычно сверхпроводящее тело удерживается во взвешенном состоянии силами магнитного поля. Источниками поля служат короткозамкнутые сверхпроводящие катушки, по которым циркулируют незатухающие токи большой силы, либо катушки, питаемые от постоянных источников. Для формирования магнитного поля, обеспечивающего большую жесткость в сверхпроводящем подвесе, используются односвязные сверхпроводящие экраны, выполненные в виде кольца с двумя или несколькими разрезами. Распределение магнитного поля в объеме подвеса однозначно определяет такие параметры, как жесткость и перегрузочную способность. Пропорциональное увеличение напряженности магнитного поля в объеме подвеса приводит, вообще говоря, к росту того и другого параметра. Однако для любого конкретного подвеса достигнуть сколь угодно больших значений перегрузочной способности и жесткости перераспределением поля в пространстве и увеличением его напряженности не представляется возможным. Существуют ограничения, связанные как с тем, что на поверхности ротора напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ нигде не должна превосходить значение $H_{1\,\text{кр}}$ (критическое поле), так и с тем, что ток в обмотке подвеса должен быть меньше критического $I < I_{\text{кр}}$. Таким образом, основная задача, которая возникает при конструировании подвеса сверхпроводящего тела, — это при $H < H_{1\,\text{кр}}$ найти такую величину и конфигурацию поля, чтобы получить максимальную перегрузочную способность подвеса и максимальную жесткость.

Расчет силовых характеристик подвеса без экранов относительно прост. При этом, однако, важно учитывать, как производится питание обмоток катушек, т. е.

подключены ли катушки к источнику постоянного тока или в системе питания содержатся устройства для возбуждения в обмотках катушек незатухающего тока. В первом случае расчет магнитного поля можно производить по известной методике решения уравнения Лапласа с учетом идеального диамагнетизма ротора при удовлетворении граничных условий на его поверхности. При замене катушки токовыми витками расчет силовых характеристик сверхпроводящего подвеса шара можно выполнить используя метод изображений [1–5]. Метод изображений годится и во втором случае, значительно более сложном из-за того, что вследствие сохранения потока через катушку ток в катушке зависит от смещения ротора и определение поля наталкивается на большие трудности, так как неизвестен закон, по которому меняется ток. Однако расчет сверхпроводящего подвеса, созданного несколькими сверхпроводящими катушками, методом изображений становится трудоемким. Он вообще отказывает, если учитывать при расчете силовых характеристик односвязные экраны.

Расчет поля и силовых характеристик сверхпроводящего подвеса как со сверхпроводящими односвязными экранами, так и без них можно провести, используя метод вторичных источников [6,7]. Этот метод состоит в следующем. Известно, что источниками магнитного поля являются как свободные токи (токи в катушках), так и связанные токи, наведенные на границе сред с различными, но постоянными по величине магнитными проницаемостями. Следовательно, магнитное поле при наличии сверхпроводников вблизи катушек с током можно рассчитывать как поле в пространстве, создаваемое связанными поверхностными токами и токами намагничивающих катушек. При этом задача сводится к определению неизвестных вторичных источников (поверхностных токов или магнитных зарядов на сверхпроводящих поверхностях). Такой метод приводит к системе интегральных уравнений Фрудгольма второго рода относительно плотностей вторичных источников. Решив эти интегральные уравнения и найдя распределение вторичных источников, легко простым интегрированием определить все поле, а затем силовые характеристики. Если тело по форме — шар, то можно найти функцию Грина системы шар–катушки с током и тогда решение интегральных уравнений сводится к квадратурам для катушечного подвеса и для катушечного экранного при малых зазорах между ротором и экранами и тонких экранах. В остальных случаях требуется численный счет.

Система интегральных уравнений для определения поверхностных токов, наведенных внешним полем на сверхпроводящих поверхностях

В электромагнитном подвесе сверхпроводящего тела эффект взвешивания достигается за счет идеального диамагнетизма сверхпроводников. Так как индукция $\mathbf{B}$ внутри сверхпроводника равна нулю, то в нем невозможны никакие объемные макроскопические токи, а всякий электрический ток, текущий в сверхпроводнике, является поверхностным током. Если сверхпроводящий ротор поместить в магнитное поле подвеса, то на его поверхности будут индуцироваться поверхностные токи. Эти токи не связаны с действием электрического поля и определяются скачком касательной компоненты индукции на границе тела. Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, то плотность поверхностного тока равна

$$\mathbf{i} = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_e], \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности сверхпроводника, $\mathbf{H}_e$ — магнитное поле вне проводника.

Так как взвешивание ротора происходит в результате взаимодействия поверхностного тока на сверхпроводнике с полем подвеса, то для определения силовых характеристик нужно в первую очередь найти этот ток. Для его определения, используя метод вторичных источников, составим систему векторных интегральных уравнений, решение которых дает нам искомый ток.

Рассмотрим сверхпроводящий подвес, состоящий из подвижного элемента (ротора) и N — сверхпроводящих катушек с L — сверхпроводящими односвязными экранами. Для получения интергальных уравнений метода вторичных источников будем считать, что поле в любой точке пространства вне сверхпроводника создается связанными поверхностными токами плотности $\mathbf{i}$ и токами плотности $\mathbf{j}$ в катушках. При этом область интегрирования представляет собой совокупность $L+1$ замкнутых границ раздела сверхпроводник вакуум и может быть представлена в виде суммы $S = U^L S_k$. Будем считать, что поверхность S_0 относится к подвижному элементу (ротору), форму которого мы пока не конкретизируем.

Магнитное поле, создаваемое такой системой токов в некоторой точке пространства Q, будет определяться выражением

$$\mathbf{H}(Q) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{L}\oint\limits_{S_k}\left[\mathbf{i}_k(M_k), \nabla_Q \frac{1}{r_{QM_k}}\right] dS_{M_k} - \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{V_k}\left[\mathbf{j}_k(P_k), \nabla_Q \frac{1}{r_{QP_k}}\right] dV_{P_k}, \tag{2}$$

величины r_{QM_k} и r_{QP_k} представляют собой расстояние от точки интегрирования M_k и P_k до точки наблюдения Q. Операция градиента берется по точкам наблюдения, что обозначается значком Q перед знаком градиента.

Для получения системы интегральных уравнений надо в выражении (2) точку Q устремить к точке Q_ν на сверхпроводящей поверхности и воспользоваться граничным условием (1). Однако при этом надо учесть, что для предельных значений напряженности поля $\mathbf{H}_e(Q)$, созданного поверхностным распределением тока $\mathbf{i}$, справедливы соотношения [6]

$$\Big[\mathbf{n}_{Q_\nu}, \mathbf{H}_e(Q_\nu)\Big] = \frac{\mathbf{i}(Q_\nu)}{2}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{L}\oint\limits_{S_k}\left[\mathbf{i}_k(M_k), \nabla_{Q_\nu}\frac{1}{r_{Q_\nu M_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_\nu}dS_{M_k}. \quad (3)$$

Учитывая (3), подставим выражение (2) в граничное условие (1). Тогда получим

$$\mathbf{i}_\nu(Q_\nu) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{L}\oint\limits_{S_k}\left[\mathbf{i}_k(M_k), \nabla_{Q_\nu}\frac{1}{r_{Q_\nu M_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_\nu}dS_{M_k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{V_k}\left[\mathbf{j}_k(P_k), \nabla_{Q_\nu}\frac{1}{r_{Q_\nu P_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_\nu}dV_{P_k} \quad (4)$$

$\nu = 0, 1, 2, \ldots, L.$

Уравнения (4) представляют собой компактную запись системы $L+1$ векторных интегральных уравнений Фредгольма для определения поверхностных токов на сверхпроводниках. Если не учитывать экраны, то будет только одно интегральное уравнение для определения поверхностных токов на подвижном элементе

$$\mathbf{i}(Q_0) - \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{S_0}\left[\mathbf{i}(M_0), \nabla_{Q_0}\frac{1}{r_{Q_0 M_0}}\right]\mathbf{n}_{Q_0}dS_{M_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{V_k}\left[\mathbf{j}_k(P_k), \nabla_{Q_0}\frac{1}{r_{Q_0 P_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_0}dV_{P_k}. \quad (5)$$

При выводе уравнений (4) мы считали, что плотность тока $\mathbf{j}_k$ непрерывна по объему катушек. Однако на практике приходится иметь дело с катушкой, состоящей из большого числа витков тонкого провода постоянного сечения. Поэтому будем считать, что k-я катушка состоит из W_k витков тонкого провода. Во всех витках такой катушки протекает одинаковый ток I_k. Модуль плотности тока $|\mathbf{j}_k|$ в каждой катушке обычно постоянен. Он зависит от плотности намотки витков и определяется из соотношения $j_k S_k = I_k W_k$, где S_k — сечение витков катушки. Представим поэтому вектор плотности тока в катушке в виде

$$\mathbf{j}_k(P_k) = |\mathbf{j}_k(P_k)|\mathbf{t}_k(P_k) = \frac{I_k W_k}{S_k}\mathbf{t}_k(P_k), \quad (6)$$

где $\mathbf{t}_k(P_k)$ — единичный вектор, касательный оси трубки тока.

В силу линейности уравнений (4) наведенный поверхностный ток на ν-й поверхности сверхпроводника можно представить в виде суммы токов, которые наводились бы каждой катушкой в отдельности, если бы в остальных катушках токи отсутствовали.

Тогда полный ток, наводимый на ν-й поверхности всеми катушками, можно представить в виде

$$\mathbf{i}_\nu(Q_\nu) = \sum I_k \mathbf{i}_k^0(Q_\nu), \quad \nu = 0, 1, \ldots, L, \quad (7)$$

где $\mathbf{i}_k^0(Q_\nu)$ — поверхностный ток, возбуждаемый единичным током k-й катушки на ν-й поверхности сверхпроводника.

Используя (7), уравнения для определения $\mathbf{i}_k^0(Q_\nu)$ запишутся

$$\mathbf{i}_k^0(Q_\nu) - \frac{1}{2\pi}\sum\oint\left[\mathbf{i}_k^0(M_k), \nabla_{Q_\nu}\frac{1}{r_{Q_\nu M_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_\nu}dS_{M_k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{W_k}{S_k}\int\left[\mathbf{t}_k(P_k), \nabla_{Q_\nu}\frac{1}{r_{Q_\nu P_k}}\right]\mathbf{n}_{Q_\nu}dV_{P_k}, \quad (8)$$

$\nu = 0, 1, \ldots, L$

Таким образом, чтобы определить наведенный ток на ν-й поверхности односвязного проводника, необходимо решить систему векторных интегральных уравнений (8). Если в поле N катушек с током находится лишь один сверхпроводящий элемент "правильной" формы (плоскость, бесконечный цилиндр, шар, эллипсоид), то уравнение можно решить аналитически. В следующей работе будет найдено решение интегрального уравнения для сверхпроводящего шара в поле N токовых катушек. Однако при наличии в поле нескольких сверхпроводящих тел (ротор и экраны) аналитическое решение системы уравнений (8) практически невозможно и необходимо использовать численные методы на ЭВМ.

При численном решении интегральные уравнения заменяют эквивалентной системой алгебраических уравнений высокого порядка. Чем выше требуемая точность решения задачи, тем выше порядок эквивалентной алгебраической системы. С другой стороны, при увеличении порядка алгебраической системы резко растет объем счета, необходимый для ее решения. Так как уравнения системы (8) векторные, то наличие L-тел в поле приводит к L-векторным либо к $2L$-скалярным (поверхностный ток в общем случае имеет две компоненты) уравнениям, поэтому естественно переформулировать задачу так, чтобы найти ток, решая систему интегральных уравнений для определения вторичных источников возможно меньшей размерности. В дальнейшем будет показано, что для этого нужно искать не векторные вторичные источники (поверхностные токи), а скалярные (магнитные заряды) на сверхпроводниках. Однако в этом случае для определения поверхностных токов необходимо еще одно интегрирование по вторичным источникам.

Определение потокосцепления и индуктивности

Для дальнейшего изложения введем понятие потокосцепления ψ поля с катушкой. Под потокосцеплением поля с катушкой понимают полное число сцеплений единичных линий магнитной индукции со всеми элементарными трубками тока. Представим себе всю катушку разделенной на элементарные трубки тока. Поток, сцепляющийся с одной из таких трубок, равен циркуляции векторного потенциала вдоль оси этой трубки. Этот поток сцепляется с током dI, протекающим в рассматриваемой трубке и составляющим долю dI/I всего тока I в проводнике. Следовательно, он вносит в значение ψ долю равную

$$d\psi = \frac{dI}{I} \oint\limits_C \mathbf{A}(Q)\, d\mathbf{l}_Q, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $d\mathbf{l}$ — элемент контура C, Q — некоторая точка трубки тока.

Так как ток имеет dI постоянное значение вдоль всей трубки тока, то его можно внести под знак интеграла. Обозначив через dS сечение трубки тока и через $\mathbf{j}$ плотность тока в этом сечении, можем написать $dI = \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$. Тогда (9) примет вид

$$d\psi = \frac{1}{I}\oint\limits_C \Big(\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}_0\Big)\Big(\mathbf{A}(Q)\cdot d\mathbf{l}_Q\Big) = \frac{1}{I}\oint\limits_C \Big(\mathbf{j}(Q)\mathbf{A}\Big)\Big(d\mathbf{l}_Q\cdot d\mathbf{S}_Q\Big).$$

Второе равенство следует из того, что векторы $\mathbf{j}(Q)$ и $d\mathbf{l}$ имеют одно и то же направление. Интегрируя по всему сечению, получим

$$\psi = \frac{1}{I}\int\limits_S \oint\limits_C \Big(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\Big)\Big(d\mathbf{l}_Q\cdot d\mathbf{S}_Q\Big) = \frac{1}{I}\int \mathbf{j}(Q)\mathbf{A}(Q)\, dV_Q, \tag{10}$$

так как $dl_Q\, dS_Q$ — элемент объема dV_Q проводника.

Таким образом, мы получили выражение потокосцепления при непрерывном распределении тока по катушке.

В нашем случае, учитывая (6), потокосцепление с k-катушкой можно представить в виде

$$\psi_k = \frac{W_k}{S_k}\int\limits_V \mathbf{A}(P_k)\mathbf{t}_k(P_k)\cdot dV_k. \tag{11}$$

Покажем теперь, что потокосцепление со сверхпроводящей катушкой, в которой циркулирует незатухающий ток, равно постоянной величине. Для этого запишем закон индукции Фарадея в интегральном виде для трубки тока

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \frac{d\Phi}{dt}. \tag{12}$$

Умножим (12) на $(dI)/I$ и проинтегрируем по поверхности сечения проводника, тогда

$$\int\limits_S \frac{dI}{I}\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int\limits_S \frac{dI}{I}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \oint \frac{dI}{I}\mathbf{A}\, d\mathbf{l}$$

$$= -\frac{d}{dt}\int\limits_S \oint \mathbf{j}\,\mathbf{A}\frac{d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{S}}{I} = -\frac{d}{dt}\frac{1}{I}\int\limits_S \mathbf{j}\,\mathbf{A}\cdot dV = \frac{d\psi}{dt}. \tag{13}$$

Здесь выполнены выкладки, аналогичные проделанным при определении потокосцепления. Так как в сверхпроводнике $\mathbf{E} = 0$, то оно равно нулю и на любой трубке тока, поэтому $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$ и из (13) следует, что $\psi = \mathrm{const}$. Таким образом, потокосцепление с k-й сверхпроводящей катушкой, если нет сторонних эдс, равно постоянной величине.

Получим общее выражение для потокосцепления с k-й катушкой. Для этого запишем векторный потенциал, создаваемый в точке P_k k-й катушки как токами, наведенными на всех сверхпроводящих поверхностях, так и всех катушек

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{A}(P_k) = \sum\int \frac{\mathbf{j}_\mu(P_\mu)}{r_{P_kP_\mu}}dV_\mu + \sum\oint \frac{\mathbf{i}_\nu(M_\nu)}{r_{P_kM_\nu}}dS_{M_\nu}$$

$$= \sum\frac{I_\mu W_\mu}{S_\mu}\int \frac{\mathbf{t}_\mu(P_\mu)}{r_{P_kP_\mu}}d\nu_\mu + \sum\sum I_\mu \oint \frac{\mathbf{i}_{\mu\nu}(M_\nu)}{r_{P_kM_\nu}}dS_{M_\nu}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11), имеем

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\psi_k = \sum\frac{I_\mu W_\mu W_k}{S_\mu S_k}\int dV_{P_k}\int \frac{\mathbf{t}_k(P_k)\mathbf{t}_\mu(P_\mu)}{r_{P_kP_\mu}}dV_{P_\mu}$$

$$+ \sum\frac{I_\mu W_k}{S_k}\sum\oint \mathbf{i}^0_{\mu\nu}(M_\nu)\left\{\int \frac{\mathbf{t}_k(P_k)}{r_{P_kM_\nu}}dV_{P_k}\right\}dS_{M_\nu}. \tag{15}$$

Обозначим члены в формуле (15), не зависящие от величины тока, через

$$M_{\mu k} = \frac{\mu_0}{4_\pi}\frac{W_\mu W_k}{S_\mu S_k}\int dV_{P_k}\int \frac{\mathbf{t}_k(P_k)\mathbf{t}_\mu(P_\mu)}{r_{P_kP_\mu}}dV_{P_\mu}, \tag{16}$$

$$S_{\mu k} = \frac{\mu_0}{4_\pi}\frac{W_k}{S_k}\sum\oint \mathbf{i}^0_{\mu\nu}(M_\nu)\left\{\int \frac{\mathbf{t}_k(P_k)}{r_{P_kM_\nu}}dV_{P_k}\right\}dS_{M_\nu}. \tag{17}$$

Коэффициент $M_{\mu k}$ при $\mu = k$ определяет самоиндукцию k-й катушки, а при $\mu \neq k$ — взаимную индукцию. Этот коэффициент при смещении ротора в подвесе не меняется, он определяется только конфигурацией катушек и их расположением относительно друг друга. Коэффициент $S_{\mu k}$ отвечает части индуктивностей катушек из-за присутствия подвижного элемента и экранов. В частности, если бы экранов не было, то он определялся бы формулой

$$S^0_{\mu k} = \frac{\mu_0}{4_\pi}\frac{W_k}{S_k}\oint \mathbf{i}^0_\mu(M_0)\left\{\int \frac{\mathbf{t}_k(P_k)}{r_{P_kM_0}}dV_{P_k}\right\}dS_{M_0} \tag{18}$$

и зависел бы только от смещения ротора относительно катушек. Присутствие экранов меняет коэффициент $S^0_{\mu k}$, так как смещение ротора вызывает перераспределение поверхностных токов на экранах. В общем случае коэффициент (17) есть функция зазора между поверхностью ротора и экрана.

Используя введенные обозначения, потокосцепление с k-й катушкой можно записать в виде

$$\psi = \sum I_\mu \big(M_{\mu k} + S_{\mu k}\big) = \sum I_\mu L_{\mu k}, \tag{19}$$

где $L_{\mu k}$ — индуктивность с учетом подвижного элемента и экранов.

Для сверхпроводящих катушек с заданным потоком в них

$$\psi^0_k = \mathrm{const} = \sum I_\mu L_{\mu k}$$

или в тензорной записи (предлагается суммирование по дважды встречающемуся индексу)

$$I_\mu L_{\mu k} = \psi^0_k \tag{20}$$

из (20) величина тока в μ-й катушке определяется формулой

$$I_\mu = \psi^0_k L^{-1}_{\mu k}, \tag{21}$$

где L^{-1} — матрица обратная к $L_{\mu k}$.

Определение магнитной энергии и силовых характеристик сверхпроводящего подвеса

Для определения силового воздействия поля на ротор гироскопа удобно воспользоваться магнитной энергией взаимодействия сверхпроводящего ротора с полем подвеса.

Магнитная энергия, как известно, определяется выражением

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\,\mathbf{j}dV, \tag{22}$$

где интегрирование проводится по объему, занятому свободными токами.

Сравнивая эту формулу с формулой (10) для потокосцепления, легко видеть, что

$$U = \frac{1}{2}\sum \psi_k I_k. \tag{23}$$

Подставляя в (23) выражение для потокосцепления (19), получим, что энергия поля при питании катушек от постоянного источника равна

$$U_I = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,k} I_\mu I_k L_{\mu k}. \tag{24}$$

При постоянных токах, используя формулу (21), получаем

$$U_\psi = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,k} \psi^0_\mu \psi^0_k L^{-1}_{\mu k}. \tag{25}$$

Так как $L_{\mu k}$ есть функция положения центра масс и углов поворота ротора относительно системы координат, жестко связанный с подвесом, то для определения сил или моментов сил, действующих на ротор, нужно продифференцировать (24) или (25) по обобщенным координатам. Причем, если рассматривается случай постоянных токов, надо помнить, что выражение (24) дифференцируется без изменения знака, а (25) — с изменением знака, т.е. в первом случае магнитная энергия играет роль кинетической энергии (I — обобщенная скорость), а во втором — потенциальной энергии.

Скажем несколько слов о составлении уравнений движения ротора в сверхпроводящем подвесе. Составим функцию Лагранжа–Максвелла $\mathcal{L}$, которая состоит из механической части (кинетическая энергия ротора, потенциальная энергия внешних потенциальных сил) и магнитной энергии. Причем при постоянных источниках тока магнитную энергию надо отнести к кинетической, а при постоянных потоках — к потенциальной. Тогда уравнения движения ротора в сверхпроводящем подвесе будут иметь вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = Q_{q_s}, \tag{26}$$

где Q_{q_s} — обобщенные силы неконсервативной природы, отнесенные к обобщенной координате q_s.

Случай постоянства потоков через катушку означает наличие циклических интегралов в системе, поэтому вместо функции Лагранжа–Максвелла можно построить функцию Рауса–Максвелла. Очевидно, что оба способа построения уравнений движения эквивалентны.

Таким образом, общий метод составления уравнений движения ротора в сверхпроводящем подвесе состоит из трех последовательных этапов: 1) составляются и решаются интегральные уравнения для определения поверхностных токов (8); 2) вычисляются коэффициенты самоиндукции и взаимоиндукции $L_{\mu k} = M_{\mu k} + S_{\mu k}$; 3) составляется магнитная энергия и строится функция Лагранжа–Максвелла, что позволяет получить полную систему уравнений движения ротора в сверхпроводящем подвесе, если известны обобщенные неконсервативные силы.

Интегральные уравнения для скалярных вторичных источников

Основная трудность расчета по изложенной методике состоит в решении интегрального уравнения (8). Эта трудность значительно возрастает при наличии в поле нескольких сверхпроводящих тел (ротор и экраны). Поэтому, как уже отмечалось, естественно попытаться сформулировать задачу так, чтобы система интегральных уравнений имела возможно меньшую размерность.

Такая возможность формулировки задачи имеется и она основана на следующих соображениях. Рассмотрим сверхпроводящее тело, помещенное в заданное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Полное магнитное поле $\mathbf{H}$, создаваемое некоторой системой токов $\mathbf{j}$ при наличии в пространстве сверхпроводящего тела, есть сумма "первичного" поля $\mathbf{H}_0$ и "вторичного" поля $\mathbf{H}'$, обязанного своим появлением наличию сверхпроводящего тела. Это поле описывается уравнениями

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathrm{rot}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{27}$$

тогда как первичное поле $\mathbf{H}_0$ — уравнениями

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}_0 = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H}_0 = 0. \tag{28}$$

Вычитая из первого уравнения (27) первое уравнение (28), получим $\mathrm{rot}\mathbf{H}' = 0$, т. е. вторичное поле имеет потенциальный характер и, следовательно, может быть найдено, если известно распределение поверхностных магнитных зарядов на сверхпроводнике. Таким образом, вместо того чтобы искать векторные вторичные источники (поверхностные токи), можно поставить задачу об определении скалярных вторичных источников (магнитных зарядов), которая сведется к интегральному уравнению меньшей размерности.

Знание поверхностных магнитных зарядов позволяет определить поверхностный ток на сверхпроводнике по формуле (1), где магнитное поле $\mathbf{H}_e$ определяется выражением

$$\mathbf{H}_e(Q) = \mathbf{H}_0(Q) - \nabla_Q \int \frac{\sigma(M)}{r_{QM}} dS_M \frac{1}{4\pi\mu_0} \tag{29}$$

(здесь σ — плотность поверхностных магнитных зарядов), а затем перейти к второму и третьему этапам составления уравнений движения ротора в сверхпроводящем подвесе.

Перейдем к выводу интегрального уравнения для определения магнитных зарядов. Рассмотрим сверхпроводник, помещенный во внешнее поле $\mathbf{H}_0$. При внесении сверхпроводника поле изменится. Изменившееся поле можно рассматривать как результат наложения двух полей: исходного, созданного первичными токами, и нового, созданного вторичными зарядами. Для определения вторичных магнитных зарядов можно воспользоваться тем, что нормальная компонента полного поля на поверхности сверхпроводника равна нулю. Тогда [7]

$$(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}) = \frac{\sigma}{2\mu_0} + (\mathbf{H}'\mathbf{n}) + (\mathbf{H}^0\mathbf{n}) = 0, \tag{30}$$

где штрих означает напряженность, обусловленную зарядами поверхности S; σ — плотность зарядов в точке Q.

Учитывая, что

$$(\mathbf{H}'\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \sigma(M) \frac{(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{MQ})}{r^3_{MQ}} dS_M,$$

из (30) получаем интегральное уравнение

$$\sigma(Q) + \frac{1}{2\pi} \int \sigma(M) \frac{(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{r}_{MQ})}{r^3_{MQ}} dS_M = -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big). \tag{31}$$

Если в магнитном поле находятся m сверхпроводников, то, обозначив через Q_ν произвольную точку на поверхности S_ν сверхпроводника, а через M_k переменную точку поверхности этого сверхпроводника, получим систему уравнений

$$\sigma(Q_\nu) + \frac{1}{2\pi} \sum \int \frac{\sigma(M_k)(\mathbf{r}_{M_k Q_\nu} \cdot \mathbf{n}_{Q_\nu})}{M_k Q_\nu} dS_{M_k}$$
$$= -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_{Q_\nu} \cdot \mathbf{H}^0(Q_\nu)\Big), \tag{32}$$

$\nu = 1, 2, \ldots, m$.

Аналогично может быть рассмотрен случай плоского поля. При этом потенциал, создаваемый вторичными источниками, должен быть взят в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\mu_0} \int \sigma \ln \frac{1}{r} dl. \tag{33}$$

Тогда легко показать, что интегральное уравнение принимает вид

$$\sigma(Q) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma(M)(\mathbf{r}_{MQ} \cdot \mathbf{n}_Q)}{r^3_{M_k Q_\nu}} dl = -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big), \tag{34}$$

где интегрирование проводится по контуру l.

Рассмотрим несколько примеров расчета вторичных источников.

1. Поверхность S представляет собой полупространство. Тогда $(\mathbf{r}_{MQ} \cdot \mathbf{n}_Q) = 0$ и из уравнения (34) получаем, что

$$\sigma(Q) = -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big), \tag{35}$$

т. е. плотность магнитных зарядов равняется нормальной составляющей внешнего магнитного поля, взятого с обратным знаком и умноженного на $2\mu_0$. Из этого результата следует метод изображений в плоскости.

2. Цилиндр в произвольном внешнем поле $\mathbf{H}^0$. Для цилиндра выполняется равенство $(\mathbf{r}_{MQ} \cdot \mathbf{n}_Q)/r^2_{MQ} = (1/2)R$, где R — радиус цилиндра. Учитывая, что элемент длины $dl = Rd\theta$, (32) приобретает вид

$$\sigma(Q) + \frac{1}{2\pi} \int \sigma d\theta = -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(\theta)\Big). \tag{36}$$

Обозначим $1/(2\pi)\int \sigma d\theta = C$, тогда

$$\sigma(Q) = -2\mu_0 \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big) - C. \tag{37}$$

Пусть положение точки Q определяется полярной координатой α, тогда, умножая последнее уравнение на $d\alpha/2\pi$ и интегрируя по α в пределах от 0 до 2π, найдем

$$\frac{1}{2\pi}\int \sigma(\alpha)d\alpha = C = -2\frac{\mu_0}{2\pi}\int \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big)d\alpha - C.$$

Решая правое равенство относительно C, получим

$$C = -\frac{\mu_0}{2\pi}\int \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(\alpha)\Big)d\alpha.$$

Подставляя полученное значение C в (37), имеем

$$\sigma(Q) = -2\mu_0\Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(Q)\Big) + \frac{\mu_0}{2\pi}\int \Big(\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{H}^0(\alpha)\Big)d\alpha. \tag{38}$$

Таким образом, и в этом случае вторичные источники легко определяются простым интегрированием нормальной компоненты внешнего поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 95-01-00612.

Список литературы

[1] *Левин М.Л.* // ЖТФ. 1964. Т. 34. Вып. 3. С. 395–398.
[2] *Белозеров В.Н., Левин М.Л.* // ЖТФ. 1964. Т. 36. Вып. 1. С. 3–6.
[3] *Белозеров В.Н.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 5. С. 852–859.
[4] *Белозеров В.Н., Левин М.Л., Никулин М.Г.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 4. С. 669–672.
[5] *Журавлев В.Ф., Руденко В.М.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 9–15.
[6] *Тозони О.В., Маергойз И.О.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974.
[7] *Тозони О.В.* Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1974.