

Оптимизация режимов работы термоэлементов с учетом нелинейности температурного распределения

© С.В. Ордин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 24 декабря 1996 г. Принята к печати 17 января 1997 г.)

Показано, что в уравнении баланса тепловых потоков в объеме образца (упрощенное уравнение Иоффе–Стильбанса) необходимо учитывать теплоту Пельтье, которую раньше рассматривали как чисто контактную характеристику. В результате самосогласованного расчета с учетом температурной зависимости теплоты Пельтье получены аналитические выражения для распределения температуры в нагруженном термоэлементе, описывающие основные отклонения от линейного распределения. Получены формулы КПД термоэлемента, обобщающие формулы Иоффе на случай больших перепадов температуры и больших потоков тепла.

Введение. Феноменологический анализ термоэлектрических процессов

Активные исследования в области термоэлектричества и в последующем широкое использование термоэлектрических преобразователей начались с получения А.Ф. Иоффе в 1950 г. теоретических оценок КПД термоэлемента [1] и определения параметра Z , характеризующего термоэлектрическую добротность материалов:

$$Z = \frac{\alpha^2 \sigma}{\kappa}, \quad (1)$$

где α — термоэдс, σ и κ — удельные электро- и теплопроводность материала соответственно. В работе Иоффе [1] анализ тепловых потоков в термоэлементе базировался на принятом представлении о контактном характере теплоты Пельтье π , что соответствует предположению о линейном распределении температуры в термоэлементе. Отклонение температурного распределения от линейного пытались описать, в простейшем случае, для независимых от температуры термоэлектрических параметров, учитывая объемные тепловыделения за счет эффектов Томсона и Джоуля-Ленца [2]. В рамках этого подхода была предпринята попытка получения уточненных выражений для КПД [3]. Однако полученные в работе [3] поправки к формулам Иоффе оказались пренебрежимо малы и вопрос об уточнении формул для КПД термоэлемента полагали закрытым. Решение теплофизических задач с учетом термоэлектрических эффектов в тех случаях, когда они не малы (холодильный режим и режим теплового насоса), базировалось на модели, предложенной в работе [2], что нашло свое отражение практически во всех монографиях по термоэлектричеству [4–7].

С другой стороны, термоэлектрические эффекты описываются обобщенными кинетическими уравнениями [8–10]. Если выразить кинетические коэффициенты через термоэлектрические параметры, то для плотности

тока \mathbf{j} и плотности потока тепла \mathbf{q} в изотропной среде в отсутствие магнитного поля получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} + \alpha \sigma (-\nabla T), \\ \mathbf{q} &= \pi \mathbf{j} + \kappa (-\nabla T), \end{aligned} \quad (2)$$

где T — температура, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, $\pi = \alpha T$. Коэффициенты, входящие в уравнения (2), являются характеристиками макроскопических областей материала. Ввиду того что в общем случае нет никаких оснований полагать перекрестные члены равными 0, теплоту Пельтье π и термоэдс α также необходимо учитывать для нахождения температурного распределения в объеме термоэлемента, как σ и κ . Использование в работе [2] параметров теплоты Томсона τ и теплоты Джоуля σ , считавшихся и ранее объемными, являлось введением в уравнение для плотности теплового потока [2] π и α в неявном виде. Действительно, тепловыделения Томсона и Джоуля являются компонентами $\text{div}(\pi \mathbf{j})$, и использование их в уравнении баланса тепловых потоков [2,3] является ни чем иным, как приближенным восстановлением из $\text{div}(\pi \mathbf{j})$ теплового потока $\pi \mathbf{j}$.

Объемность теплоты Пельтье следует и из статистически микроскопического ее определения как теплоты, переносимой в объеме образца одним электроном [10]. Контактные эффекты могут быть существенны как для α и π , так и для σ и κ , но феноменологически должны быть учтены при рассмотрении граничных условий. Исключением являются лишь те случаи, когда влиянием границы (контакта) нельзя пренебречь во всем объеме термоэлемента. Проведенный феноменологический анализ показывает, что для решения теплофизических задач с учетом термоэлектрических эффектов необходимо учитывать объемность теплоты Пельтье, используя уравнения неравновесной термодинамики (2).

КПД термоэлектрического преобразования с учетом распределения температуры в термоэлементе

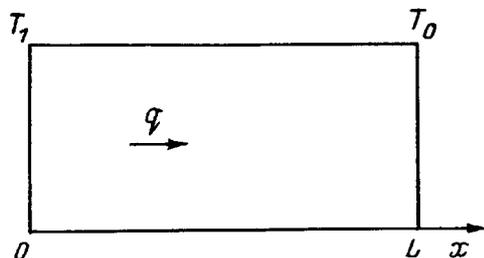
Рассмотрим распределение температуры в теплоизолированном с боковых сторон термоэлементе единичного сечения длиной L , работающем в генераторном режиме, по которому протекает тепловой поток q и ток j (рисунок). При этом используем то же допущение, что и в работе [2], — независимость от температуры термоэлектрических параметров α , σ , κ . Ввиду того что материалы для термоэлементов должны иметь высокую эффективность во всем рабочем интервале температур, данное допущение не сильно сужает область применимости искомых решений, но позволяет получить их в аналитическом виде. При заданных условиях температура в термоэлементе будет зависеть только от одной координаты x , параллельной оси термоэлемента, а уравнением баланса тепловых потоков является уравнение для теплового потока (2), переписанное в скалярном виде

$$q = \alpha j T - \kappa \frac{dT}{dx}. \quad (3)$$

Таким образом, для нахождения температурного распределения в термоэлементе необходимо решить дифференциальное уравнение 1-й степени с постоянными коэффициентами. Учитывая, что в генераторном режиме работы обычно стабилизируется температура холодного конца термоэлемента, зададим 1-е граничное условие $T(L) = T_0$ и получим следующее выражение для температурного распределения $T(x)$:

$$T(x) = T_0 \exp \left[-\frac{\alpha j}{\kappa} (L-x) \right] + \frac{q}{\alpha j} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\alpha j}{\kappa} (L-x) \right] \right\}. \quad (4)$$

Полученный явно нелинейный вид функции $T(x)$ связан с тем, что при протекании тока в генераторном режиме электроны, переходя из горячей области в холодную, рассеиваются, понижая теплоту Пельтье и увеличивая тем самым тепловую нагрузку (градиент) на член, определяемый теплопроводностью κ . Таким образом, рассеяние электронов приводит к перераспределению в объеме



Схематическое изображение термоэлемента и ориентации направления распространения в нем теплового потока q .

термоэлемента тепловой энергии между электронной и фононной подсистемами, что и определяет параметр π в каждой макроскопически локальной области материала.

В генераторном режиме термоэлемент может работать либо в режиме постоянного потока тепла q , протекающего через него, либо в режиме фиксированного перепада температуры на нем. Данные условия задают 2-е граничное условие, необходимое для получения решения уравнения (3).

В режиме с фиксированным потоком $q = q^* = \text{const}$, температурное распределение $T(x)$ задается формулой (4), в которой q заменяется на q^* . Используя полученное выражение $T(x)$, можно записать соотношение для перепада температуры на термоэлементе:

$$(-\Delta T) = T(0) - T(L) = \left(\frac{q^*}{\alpha j} - T_0 \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha j}{\kappa} L \right) \right]. \quad (5)$$

Используя уравнение для тока (2), найдем еще одно уравнение связи j и ΔT :

$$j = \frac{\alpha \sigma (-\Delta T)}{(1+m)L}, \quad (6)$$

где параметр m равен отношению сопротивления нагрузки R_l к внутреннему сопротивлению термоэлемента $R_i = L/\sigma$.

Подставляя в (6) выражение для $(-\Delta T)$, получаем уравнение для тока вида

$$j = F(j), \quad (7)$$

которое определяет ток как функцию заданных параметров q^* , R_l , α , σ , κ . Уравнение для тока (7) можно приближенно решить графически, аппроксимируя функционал $F(j)$ прямой линией, проходящей через точки

$$\left[\frac{\alpha \sigma q^*}{\kappa(1+m)}, 0 \right] \text{ и } \left[0, \frac{q^*}{\alpha T_0} \right].$$

Находя точку пересечения выбранной аппроксимации с величиной j , получим выражение для тока:

$$j = \frac{q^*}{\alpha T_0} \frac{Z T_0}{(1+m+Z T_0)}. \quad (8)$$

Это выражение для тока получается и при использовании разложения в ряд экспоненты в выражении (5), если ограничиться членом 1-й степени. Подставляя найденное выражение для тока (8) в соотношение для КПД η в режиме фиксированного потока тепла

$$\eta = \frac{j^2 R_l}{q^*}, \quad (9)$$

получим КПД термоэлемента при произвольной нагрузке

$$\eta = \frac{q^* R_l}{T_0} \frac{m Z T_0}{(1+m+Z T_0)^2}, \quad (10)$$

где $R_T = L/\kappa$ — тепловое сопротивление термоэлемента. Дифференцируя полученное выражение по m , находим условие максимума η : $m = 1 + ZT_0$ и само выражение η_{\max} , соответствующее оптимальной нагрузке:

$$\eta_{\max} = \frac{1}{4} \frac{q^* R_T}{T_0} \frac{ZT_0}{(1 + ZT_0)}. \quad (11)$$

Как видно из полученного выражения для η_{\max} , чем больше тепловое сопротивление R_T , тем выше КПД η_{\max} , кроме того параметр, определяющий термоэлектрическую добротность материала $\alpha^2 \sigma / \kappa^2$, отличается от Z . Однако естественным ограничением для рассмотренного режима работы является максимально допустимый перепад температуры, при котором в соответствии с циклом Карно достигается максимальный КПД. Поэтому рассмотрим также режим работы термоэлемента с фиксированным перепадом температуры. Такой режим на термоэлементе зададим граничным условием на горячем конце термоэлемента, зафиксировав его температуру: $T(0) = T_1 = \text{const}$. При этом выражение для температурного распределения (4) принимает следующий вид:

$$T(x) = T_0 + (-\Delta T) \frac{1 - \exp[-(\alpha j / \kappa)(L - x)]}{1 - \exp(-\alpha j L / \kappa)}. \quad (12)$$

Температурное распределение (12) имеет явно нелинейный вид. При выводе соотношения (12) было использовано выражение для потока тепла q , полученное из граничного условия на горячем конце термоэлемента

$$q = \alpha j \left[T_0 + \frac{(-\Delta T)}{1 - \exp(-\alpha j L / \kappa)} \right], \quad (13)$$

которое в силу непрерывности потока должно быть одно и то же в любом сечении термоэлемента. Подставляя выражение для $T(x)$ (12) в исходное уравнение (3), легко убедиться в выполнении условия $q(x) = \text{const}$. Так как в данном режиме работы перепад температуры задан, можно, непосредственно используя выражение для тока (6), а также полученное выражение для суммарного потока (13), написать формулу КПД термоэлемента при произвольной нагрузке:

$$\eta = \frac{(-\Delta T)}{T_1} \frac{1 - \exp[z(-\Delta T)/(1 + m)]}{1 - (T_0/T_1) \exp[z(-\Delta T)/(1 + m)]} \times \frac{m}{(m + 1)}. \quad (14)$$

При малых значениях параметра $Z(-\Delta T)/(1 + m)$, что достаточно строго соблюдается в реальных условиях работы, выражение (14) упрощается и принимает вид

$$\eta = \frac{(-\Delta T)}{T_1} \frac{ZT_1}{(1 + m + ZT_0)} \frac{m}{(m + 1)}. \quad (15)$$

В формуле Иоффе [1], приведенной к аналогичному виду, в знаменателе вместо члена ZT_0 стоит член $ZT_0 + (-\Delta T)[1 - 1/2(1 + m)]$, появление которого

связано с тем, что учет нелинейности температурного распределения заменен качественным предположением о равномерном распределении джоулева тепла между горячим и холодными концами термоэлемента. Дифференцируя выражение (15) по m , получим условие максимума η :

$$m = (1 + ZT_0)^{1/2},$$

а также само выражение для η_{\max} при соответствующей оптимальной нагрузке в режиме фиксированного перепада температуры:

$$\eta_{\max} = \frac{(-\Delta T)}{T_1} \frac{ZT_1}{(1 + \sqrt{1 + ZT_0})^2}. \quad (16)$$

Выражения для η_{\max} (11), (16) получены строго в 1-м приближении и могут быть использованы при реально используемых плотностях потоков тепла и перепадах температуры, тогда как формулы Иоффе, представляющие нулевое приближение, справедливы для предельно малых тепловых потоков и перепадов температуры. Современный уровень программирования в принципе позволяет использовать для оптимизации режимов работы термоэлементов и строгое выражение для КПД (14) и найти с заданной точностью решение уравнения для тока (7). Более того, численно можно решать исходное уравнение (3), задав реальные температурные зависимости термоэлектрических параметров.

Автор выражает большую благодарность А.Ю. Зюзину, М.И. Федорову и Т.А. Полянской за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

- [1] А.Ф. Иоффе. *Полупроводниковые термоэлементы* (М.-Л., Изд-во АН СССР, 1960).
- [2] А.Ф. Иоффе, Л.С. Стилбанс, Е.К. Иорданишвили, Т.С. Ставицкая. *Термоэлектрическое охлаждение* (М.-Л., Изд-во АН СССР, 1956).
- [3] А.И. Бурштейн. *Физические основы расчета полупроводниковых термоэлектрических устройств* (М., Физматгиз, 1962).
- [4] А.С. Охотин, А.А. Ефремов, В.С. Охотин, А.С. Пушкирский. *Термоэлектрические генераторы* (М., Атомиздат, 1971) с. 147.
- [5] Л.Н. Анатыхук. *Термоэлементы и термоэлектрические устройства* (Киев, Наук. думка, 1979) с. 79.
- [6] А.А. Саркисов, В.А. Якимов, Е.П. Каплар. *Термоэлектрические генераторы с ядерными источниками тепла* (М., Энергоатомиздат, 1987) с. 11.
- [7] *CRC Handbook of Thermoelectrics*, ed. by D.M. Rowe (N.Y.-London, CRC Press, 1995).
- [8] А.С. Beer. *Galvanomagnetic effects in semiconductors* (N.Y.-London, Academic Press, 1963).
- [9] Б.М. Аскеров. *Электронные явления переноса в полупроводниках* (М., Наука, 1985).
- [10] Дж. Займан. *Принципы теории твердого тела* (М., Мир, 1974) с. 262–272.

Редактор Т.А. Полянская

**Optimization of working regimes of
thermoelements with consideration of the
non-linearity of temperature distribution**

S.V. Ordin

A.F. Ioffe Physicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St.-Petersburg, Russia