

Обменная энергия свободного электрона в полупроводнике

© О.В. Константинов, О.И. Оболенский, Б.В. Царенков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 25 апреля 1996 г. Принята к печати 16 сентября 1996 г.)

Получено общее выражение для энергии обменного взаимодействия электрона в полупроводнике для произвольной степени вырождения электронного газа. Одночастичная обменная энергия выражена через интегральную функцию, зависящую только от отношения энергии уровня Ферми, отсчитываемой от дна зоны проводимости, к тепловой энергии электрона. Для сильно вырожденного Ферми-газа и нулевой температуры это выражение переходит в формулу Слэтера для обменной энергии электрона в металле. С увеличением температуры обменная энергия монотонно уменьшается. В пределе невырожденного электронного газа общее выражение приобретает простой аналитический вид. На диэлектрической стороне перехода Мотта обменная энергия с ростом температуры изменяется немонотонно: она имеет максимум при температуре порядка энергии ионизации доноров. Показано, что анизотропия изоэнергетической поверхности электронов практически не влияет на величину обменной энергии. Приведены зависимости сужения запретной зоны от концентрации при нескольких температурах для кремния и арсенида галлия.

1. Введение

Известно, что в теории металлов при расчете формы поверхности Ферми важно учитывать обменную энергию газа свободных электронов. В некоторых задачах физики полупроводников обменная энергия также оказывается существенной. К числу таких задач относятся теория концентрационного сужения запретной зоны полупроводника [1], а также теория фазового перехода диэлектрик–металл в полупроводниках [2].

Влияние обменного взаимодействия может быть учтено при нахождении либо полной энергии системы, либо одночастичных уровней энергии электронов. Вклад обменной энергии в полную энергию системы был впервые получен Вигнером и Зейтцем [3–5] при расчете параметров решетки кристалла. Вигнер и Зейтц оперируют с обменной энергией, приходящейся на один электрон, которая получается делением полной обменной энергии на число электронов в системе. Однако, в приложениях, в том числе при расчете ширины запретной зоны полупроводника, требуется знать одночастичные собственные уровни энергии. Одночастичная обменная энергия, как было показано Слэтером [6], оказывается в 2 раза больше, чем обменная энергия, приходящаяся на один электрон. Выражение, предложенное Слэтером, имеет вид

$$U_{ex} = -\frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{\varepsilon} k_F, \quad (1)$$

где e — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость среды, принятая в [6] равной единице, k_F — фермиевский квазиволновой вектор, который в случае полупроводника определяется выражением

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 n}{M} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

где n — концентрация свободных электронов, M — число эквивалентных долин энергетического спектра электронов в k -пространстве анизотропного полупроводника.

Формула Слэтера (1) получила широкое распространение не только в теории металлов [7], но и в теории атома [8]. С ее помощью сложный нелокальный фоковский член был заменен простым локальным потенциалом. Эта идея легла в основу так называемого приближения локальной плотности [9]. В этом приближении кроме обменной энергии учитывается и корреляционная энергия, отвечающая взаимодействию Ферми-частиц с антипараллельными спинами [10]. Это корреляционное слагаемое для полупроводников составляет не более 1/8 от обменного слагаемого. В данной работе мы им пренебрегаем, поскольку для концентрационного смещения дна зоны проводимости оказывается гораздо более важным другое корреляционное слагаемое [11] — энергия Дебая-Хюккеля

$$U_{DH} = \frac{e^2}{2\varepsilon} \kappa, \quad (3)$$

где κ — обратная длина экранирования Дебая:

$$\kappa^2 = \frac{4\pi n e^2}{\varepsilon E_s}, \quad (4)$$

где E_s — энергия экранирования:

$$E_s = k_B T \frac{F_{-\frac{1}{2}}(\eta)}{F_{\frac{1}{2}}(\eta)}, \quad \eta = \frac{E_F}{k_B T}. \quad (5)$$

Выражение (1) получено для изотропного закона дисперсии и для предельно вырожденного Ферми-газа. В полупроводниках состояние электронного газа может изменяться от сильного вырожденного до невырожденного, и, кроме того, изоэнергетические поверхности во многих полупроводниках анизотропны.

Цель настоящей работы — получить выражение, пригодное для определения одночастичной обменной энергии в полупроводнике.

2. Вычисление энергии обменного взаимодействия электрона в полупроводнике

2.1. Общий метод получения обменной поправки к полной энергии частицы. Рассмотрим поправку 1-го порядка к энергии электрона в состоянии с квазиволновым вектором \mathbf{k} и каким-либо определенным направлением спина, возникающую за счет обменного взаимодействия данного электрона с другим электроном, находящимся в состоянии \mathbf{k}' и с тем же направлением спина. Известно [12], что обменное взаимодействие уменьшает полную энергию частицы на величину обменного интеграла

$$\Delta\varepsilon_{\mathbf{k}'}(\mathbf{k}) = V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Выражение для обменного интеграла $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ будет приведено далее.

Если просуммировать обменное взаимодействие по всем состояниям \mathbf{k}' при фиксированном \mathbf{k} с учетом вероятности заполнения этих состояний, то тогда полную энергию квазичастицы в состоянии с квазиволновым вектором \mathbf{k} и с каким-то определенным направлением спина, можно записать в виде

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = E_k - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}, \quad (7)$$

где

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_{\parallel}^2}{m_{\parallel}} + \frac{k_{\perp}^2}{m_{\perp}} \right) \quad (8)$$

— кинетическая энергия, m_{\parallel} и m_{\perp} — продольная и поперечная эффективные массы, k_{\parallel} и k_{\perp} — аналогичные составляющие квазиволнового вектора;

$$f_k = \frac{1}{e^{\frac{E_k - E_F}{k_B T}} + 1} \quad (9)$$

— функция заполнения Ферми, где E_F — энергия уровня Ферми, $k_B T$ — тепловая энергия.

Обменный интеграл $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ в (6) определяется выражением

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{e^2}{\varepsilon} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_1) \Psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (10)$$

В приближении эффективной массы блоховские волновые функции $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ можно заменить плоскими волнами

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (11)$$

где V — нормировочный объем. Кроме того, в этом приближении надо считать, что все волновые функции, входящие в интеграл (10), относятся к одной и той же долине энергетического спектра электрона.

Сделаем замену переменных интегрирования в (10):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (12)$$

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}. \quad (13)$$

Тогда интегрирование по \mathbf{r}' дает объем системы V и обменный интеграл принимает вид

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{e^2}{\varepsilon V} \int d^3 r \frac{e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}}}{r}. \quad (14)$$

Заменяя в (7) суммирование по \mathbf{k}' интегрированием, получаем одночастичную энергию

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = E_k - \frac{2e^2}{\pi\varepsilon} Q_{\mathbf{k}}, \quad (15)$$

где

$$Q_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3 k' f_{\mathbf{k}'} \int d^3 r \frac{e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}}}{r}. \quad (16)$$

Второе слагаемое в (15) дает одночастичную обменную энергию [13,14], которая зависит от квазиволнового вектора \mathbf{k} . В литературе (см., например [15]), как правило, производится усреднение одночастичной обменной поправки к полной энергии квазичастицы по величине квазиволнового вектора:

$$Q = g^{-1}(0) \int d^3 k Q_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}, \quad (17)$$

где нормировочная постоянная

$$g(0) = \int d^3 k f_{\mathbf{k}}. \quad (18)$$

Таким образом, усредненная одночастичная обменная энергия

$$U_{\text{ex}} = -\frac{2e^2}{\pi\varepsilon} Q. \quad (19)$$

Величине Q , определяемой согласно (17), можно придать вид

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} g^{-1}(0) \int \frac{d^3 r}{r} |g(\mathbf{r})|^2, \quad (20)$$

где $g(\mathbf{r})$ — фурье-образ функции распределения Ферми:

$$g(\mathbf{r}) = \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f_{\mathbf{k}}. \quad (21)$$

2.2. Общее выражение для одночастичной обменной энергии в полупроводнике. Формулы (19)–(21) полностью определяют одночастичную обменную энергию. Проведем их дальнейшее преобразование с целью уменьшения кратности интегрирования путем выделения угловой части и представления окончательного выражения для обменной энергии в удобном для практического применения виде.

В общем случае эллипсоидальных или сферических долин в полупроводнике нахождение одночастичной обменной энергии может быть сведено к вычислению двойного интеграла, зависящего только от одного параметра

η — отношения энергии уровня Ферми (отсчитываемой от дна зоны проводимости) к тепловой энергии $k_B T$:

$$U_{ex} = -\frac{e^2}{\pi \epsilon} A k_T \frac{K(\eta)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} F_{\frac{1}{2}}(\eta)}, \quad \eta = \frac{E_F}{k_B T}. \quad (22)$$

Здесь $K(\eta)$ — некоторая функция, определяемая как

$$K(\eta) = \int_0^\infty \rho J^2(\rho) d\rho, \quad (23)$$

$$J(\rho) = \int_0^\infty \cos(q\rho) \ln(e^{\eta - q^2} + 1) dq;$$

k_T — характерный тепловой импульс носителей:

$$k_T = \sqrt{\frac{2m_c k_B T}{\hbar^2}}; \quad (24)$$

$F_{\frac{1}{2}}(\eta)$ — фермиевский интеграл:

$$F_{\frac{1}{2}}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\gamma} d\gamma}{e^{\gamma - \eta} + 1}; \quad (25)$$

A — фактор анизотропии закона дисперсии:

$$A = \frac{m_c}{\sqrt{m_\perp(m_\perp - m_\parallel)}} \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{m_\perp}{m_\parallel}}\right), \quad (26)$$

$$m_\perp < m_\parallel;$$

$$A = \frac{m_c}{\sqrt{m_\perp(m_\perp + m_\parallel)}} \ln\left(\sqrt{\frac{m_\perp}{m_\parallel}} - 1 + \sqrt{\frac{m_\perp}{m_\parallel}}\right), \quad (27)$$

$$m_\perp > m_\parallel;$$

где

$$m_c^3 = m_\perp^2 m_\parallel. \quad (28)$$

Естественно, что для изотропного закона дисперсии ($m_\perp = m_\parallel$) фактор $A = 1$. Но и для широко распространенных анизотропных полупроводников значение A оказывается близким к единице. Например, для кремния, обладающего сравнительно большей анизотропией, $A = 0.94$. Поэтому можно считать, что анизотропия изоэнергетической поверхности электронов практически не влияет на величину обменной энергии.

Приведенное представление конечного результата удобно для практических расчетов, поскольку достаточно один раз вычислить и затабулировать функцию $K(\eta)$, чтобы легко получать величину одночастичной обменной энергии при различных соотношениях энергии уровня Ферми (отсчитываемой от дна зоны проводимости) и тепловой энергии $k_B T$.

Интегралы, входящие в функцию $K(\eta)$, могут быть вычислены аналитически в двух предельных случаях — для сильно вырожденного и невырожденного электронного газа.

2.3. Сильно вырожденный электронный газ. В предельном случае сильного вырождения

$$K(\eta) = \eta^2, \quad (29)$$

$$F_{\frac{1}{2}}(\eta) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \eta^{\frac{3}{2}} \quad (30)$$

и следовательно,

$$U_{ex} = -\frac{3e^2}{2\pi \epsilon} A k_F. \quad (31)$$

Для изотропного закона дисперсии формула (31) переходит в формулу Слэтера (1). Выражение для Q_k , которое получается в этом случае из формулы (16), совпадает с законом дисперсии квазичастицы, приведенным в [13] и [14]:

$$Q_k = k_F F(x), \quad x = \frac{k}{k_F}; \quad (32)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - x^2}{2x} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \right). \quad (33)$$

Отметим, что анизотропия изоэнергетической поверхности электронов в полупроводнике (для случая $m_\perp < m_\parallel$) впервые была учтена в работе [16]; полученное в [16] выражение для U_{ex} было затем уточнено в [17].

2.4. Невырожденный электронный газ. В случае невырожденного электронного газа

$$K(\eta) = \frac{\pi}{4} e^{2\eta}, \quad (34)$$

$$F_{\frac{1}{2}}(\eta) = e^\eta \quad (35)$$

и следовательно,

$$U_{ex} = -\frac{e^2}{2\sqrt{\pi} \epsilon} A k_T e^{\frac{E_F}{k_B T}}. \quad (36)$$

Обсуждение этой формулы будет проведено в следующем разделе.

3. Связь обменного взаимодействия с параметрами системы электронов

3.1 Преобразование итоговых асимптотических выражений. Итак, одночастичная энергия обменного взаимодействия представлена в простом аналитическом виде для двух предельных состояний электронного газа в полупроводнике: вырожденного (формула (31)) и невырожденного (формула (36)). Эти формулы могут быть преобразованы к наглядному и симметризованному виду, если ввести в рассмотрение характерную для электронов длину волны де-Бройля ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$, где k — характерный квазиволновой вектор) и среднее расстояние между электронами ($a = n^{-\frac{1}{3}}$). Величина a определяет энергию кулоновского взаимодействия между двумя электронами $\frac{e^2}{\epsilon a}$, а отношение $\frac{\lambda}{a}$ — степень перекрытия волновых функций, т.е. интенсивность обменного взаимодействия. Тогда формулы (31) и (36) можно записать в едином виде:

$$U_{ex} \sim -\frac{A e^2}{M \epsilon a} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2. \quad (37)$$

Числовой множитель для вырожденного электронного газа равен $\frac{9}{8\pi}$, а для невырожденного — $\frac{1}{2\pi}$. В выражении (37) λ — де-Бройлевская длина волны электронов, связанная с их характерной энергией:

$$\lambda = \lambda_F \left(1 - \frac{5\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right), \quad \lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}, \quad T \rightarrow 0 \quad (38)$$

для вырожденного электронного газа;

$$\lambda = \lambda_T = \frac{2\pi}{k_T} \quad (39)$$

для невырожденного электронного газа.

Формула (37) отражает то обстоятельство, что чем больше длина волны электронов и чем меньше расстояние между ними, тем сильнее обменное взаимодействие.

3.2 Температурная зависимость одночастичной энергии обменного взаимодействия. Рассмотрим температурную зависимость одночастичной обменной энергии в полупроводнике в случае вырожденного и невырожденного арсенида галлия. Она была рассчитана по формуле (22) и представлена на рис. 1 и 2. Для ясного понимания этих зависимостей достаточно проанализировать формулу (37) для обменной энергии в двух предельных состояниях электронного газа.

В вырожденном полупроводнике величина одночастичной обменной энергии монотонно падает с ростом температуры (рис. 1). Это падение обусловлено температурным уменьшением характерной де-Бройлевской длины волны электронов λ , поскольку a от температуры не зависит (концентрация электронов в зоне проводимости постоянна).

В невырожденном полупроводнике величина обменной энергии изменяется с ростом температуры не монотонно (рис. 2). При малых температурах энергия

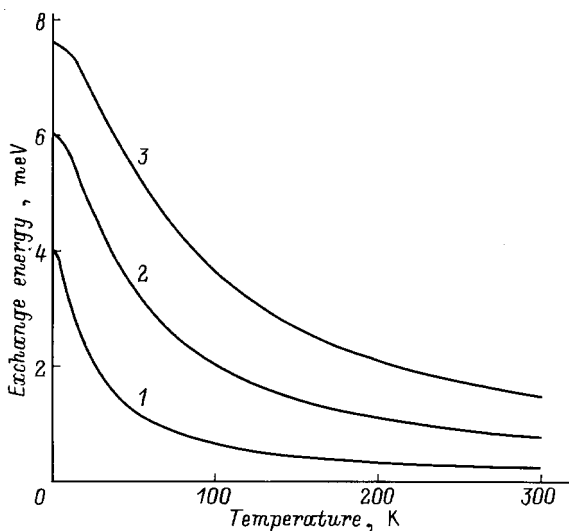


Рис. 1. Температурная зависимость одночастичной обменной энергии в вырожденном GaAs при различных уровнях легирования N_D , 10^{16} см^{-3} : 1 — 1.5, 2 — 5, 3 — 10. Параметры: эффективная масса электрона $m_c = 0.067m_0$, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 12.9$.

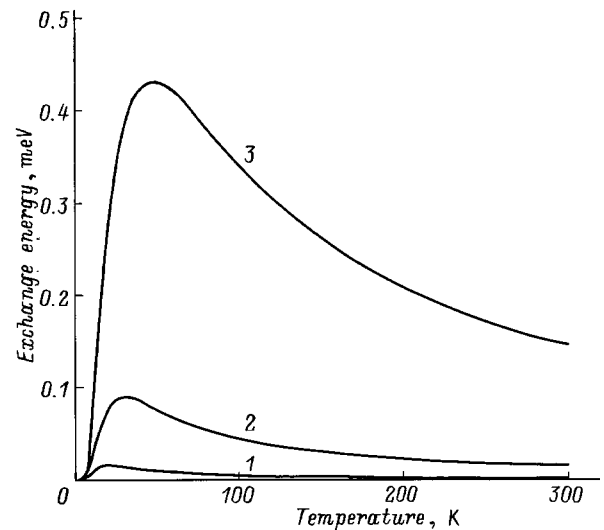


Рис. 2. Температурная зависимость одночастичной обменной энергии в невырожденном GaAs при различных уровнях легирования N_D , 10^{15} см^{-3} : 1 — 0.1, 2 — 1, 3 — 10. Параметры полупроводника те же, что и на рис. 1.

обменного взаимодействия растет за счет уменьшения a (концентрация электронов растет) и достигает максимума при температуре ионизации всех доноров, когда происходит насыщение роста концентрации носителей. Затем начинается спад обменной энергии, обусловленный уже температурным уменьшением λ , т.е. уменьшением перекрытия волновых функций. Такая температурная зависимость обменной энергии в невырожденном полупроводнике приводит к тому, что обменная поправка к ширине запрещенной зоны в невырожденном полупроводнике существенно меньше обменной поправки в вырожденном полупроводнике.

4. Концентрационное сужение запрещенной зоны

Межэлектронное взаимодействие приводит к сужению запрещенной зоны полупроводника. Существует несколько механизмов такого сужения, которые мы рассмотрим на примере полупроводника n -типа. Основной вклад вносят Дебай-Хюккелевское понижение дна зоны проводимости (3) и равно ему повышение потолка валентной зоны (если считать, что электроны и дырки экранируются электронным газом одинаково) (см., например, [11]), а также понижение дна зоны проводимости на величину энергии обменного взаимодействия (22). Тогда полное сужение запрещенной зоны

$$\Delta E_g = 2U_{DH} + U_{ex}. \quad (40)$$

С помощью этой формулы были рассчитаны концентрационные зависимости сужения запрещенной зоны для кремния и арсенида галлия n -типа, представленные на рис. 3 и 4. Результаты расчета хорошо согласуются

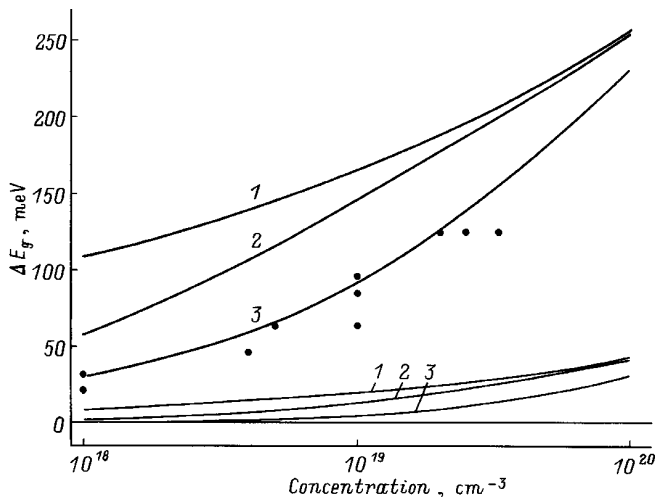


Рис. 3. Сужение запрещенной зоны в Si как функция концентрации свободных носителей при различных температурах T , К: 1 — 4, 2 — 77, 3 — 300. Толстые линии — полное сужение, тонкие — обменное слагаемое. Для температуры $T = 300$ К имеются экспериментальные данные [19] (на рисунке они обозначены точками). Параметры: эффективные массы $m_{||} = 0.98m_0$, $m_{\perp} = 0.19m_0$, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 11.9$.

с экспериментальными данными только для кремния. Для арсенида галлия полученные нами значения сужения запрещенной зоны в 1.5–2 раза меньше имеющихся экспериментальных значений [18]. Возможно, это связано с различными методами проведения эксперимента: в арсениде галлия измерения проводились по спектрам фотолюминесценции, а в кремнии данные о сужении запрещенной зоны получены путем измерения коэффициента переноса в транзисторах с различной степенью легирова-

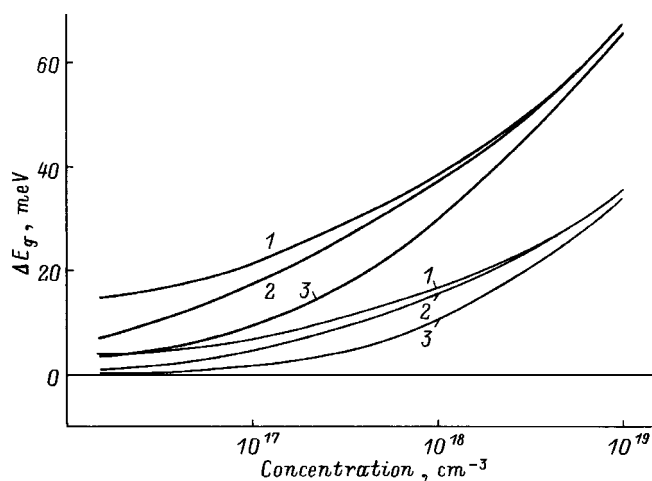


Рис. 4. Сужение запрещенной зоны в GaAs как функция концентрации свободных носителей при различных температурах T , К: 1 — 4, 2 — 77, 3 — 300. Толстые линии — полное сужение, тонкие — обменное слагаемое. Параметры полупроводника те же, что и на рис. 1 и 2.

ния эмиттера [19]. Этот метод представляется нам более надежным, т. к. хвосты плотности состояний практически не могут оказывать влияния на коэффициент переноса носителей, но в то же время могут быть очень существенны в формировании спектра фотолюминесценции.

На рис. 3 и 4 жирными кривыми представлено полное сужение запрещенной зоны, а тонкими кривыми — вклад обменной энергии, изучавшийся нами в настоящей работе. Из рис. 3 видно, что в кремнии влияние обменного механизма является малым по сравнению с Дебай–Хюккелевским корреляционным механизмом. В арсениде галлия, напротив, влияние обменного взаимодействия оказывается очень существенным, как это видно из рис. 4. При концентрации свободных электронов 10^{19} см⁻³ обменное слагаемое становится таким же, как и корреляционное. Это связано с тем обстоятельством, что обменное взаимодействие возникает только между электронами, находящимися в одной и той же долине k -пространства. Поэтому наличие 6 долин в кремнии при вычислении обменной энергии эквивалентно уменьшению концентрации электронов в 6 раз. Напротив, корреляционная энергия зависит только от полной концентрации электронов в зоне проводимости, и, следовательно, относительный вклад обменного взаимодействия в полное сужение запрещенной зоны уменьшается с увеличением числа долин.

Список литературы

- [1] K.E. Berggren, B.E. Sernelius. *Phys. Rev. B*, **24**, 1971 (1981).
- [2] Д.Н. Бычковский, О.В. Константинов, Б.В. Царенков. *ФТП*, **29**, 152 (1995).
- [3] E. Wigner, F. Seitz. *Phys. Rev.*, **43**, 804 (1933).
- [4] E. Wigner, F. Seitz. *Phys. Rev.*, **46**, 509 (1934).
- [5] E. Wigner. *Trans. Faraday Soc.*, **34**, 678 (1938).
- [6] J.C. Slater. *Phys. Rev.*, **81**, 385 (1951).
- [7] А. Крэкнелл, К. Уонг. *Поверхность Ферми* (М., Атомиздат, 1978).
- [8] F. Herman, Sh. Skillman. *Atomic Structure Calculations* (Prentice-Hall inc., 1963).
- [9] *Теория неоднородного электронного газа*, под ред. С. Лундквиста, Н. Марча (М., Мир, 1987).
- [10] O. Gunnarsson, V.I. Lundqvist. *Phys. Rev. B*, **13**, 4274 (1976).
- [11] Д.Н. Бычковский, О.В. Константинов, Б.В. Царенков. *ФТП*, **24**, 1848 (1990).
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика* (М., Наука, 1989).
- [13] Н. Ашкрофт, Н. Мермин. *Физика твердого тела* (М., Мир, 1979).
- [14] Ф. Зейц. *Современная теория твердого тела* (М.; Л, ГТТИ, 1949).
- [15] Дж. Слэтер. *Диэлектрики, полупроводники, металлы* (М., Мир, 1969).
- [16] В.Л. Бонч-Бруевич, Р. Розман. *ФТТ*, **6**, 2535 (1964).
- [17] А.А. Рогачев. Автореф. докт. дис. (Л., ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР, 1967).
- [18] Huade Yao, A. Compaan. *Appl. Phys. Lett.*, **57**, 147 (1990).
- [19] С. Зи. *Физика полупроводниковых приборов* (М., Мир, 1984) т. 1, гл. 3, рис. 8.

Редактор В.В. Чалдышев

Exchange energy of a free electron in a semiconductor

O.V. Konstantinov, O.I. Obolensky, B.V. Tsarenkov

A.F. Ioffe Physicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St. Petersburg, Russia

Abstract A general formula for the electron exchange energy for an arbitrary degree of the electron gas degeneration has been obtained. The one-particle electron energy has been expressed through an integral function which depends on the ratio of the Fermi energy to the thermal energy only.

For the degenerated Fermi gas at zero temperature the formula obtained coincides with the Slater's formula for the electron exchange energy in metals. Exchange energy decreases monotonically with temperature.

In the limit of the nondegenerated electron gas the general formula transforms to a simple analytical expression. On the dielectric side of the Mott transition the exchange energy depends on temperature in a nonmonotonic way: it has a maximum at the temperature of order of donor ionization energy.

It has been shown that anisotropy of the electron energy does not actually affect the exchange energy.

The concentration dependences of the band gap narrowings are given for silicon and gallium arsenide at several temperatures.