Геликон-фононный резонанс в висмуте

© В.Г. Скобов, А.С. Чернов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
* Московский государственный инженерно-физический институт,
115409 Москва, Россия
E-mail: chernov@theor.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 11 апреля 2005 г.)

Показано, что в висмуте возможен геликон-фононный резонанс. Он должен иметь место в диапазоне коротких радиоволн в геометрии, когда постоянное магнитное поле **H** направлено вдоль биссекторной оси кристалла, ориентированной по нормали к поверхности пластины. Резонанс обусловлен деформационным взаимодействием дырок со звуковой волной. Резонанс происходит в сравнительно слабых магнитных полях порядка десятков эрстед в ситуации, в которой пространственная неоднородность волнового поля несущественна для электронов, но важна для дырок.

PACS: 63.20.Kr, 72.15.Eb, 72.50.+b

1. В работе [1] было показано, что в висмуте возможно распространение геликонов в диапазоне коротких радиоволн. В геометрии, когда постоянное магнитное поле **H** и нормаль к поверхности пластины висмута направлены вдоль биссекторной оси кристалла, реализуется ситуация, в которой неоднородность волнового поля несущественна для электронов, но важна для дырок. В этой ситуации в висмуте возможно распространение геликонной волны, спектр которой определяется локальной холловской проводимостью электронов, а затухание — бесстолкновительным поглощением дырками. Фазовая скорость этой волны невелика, причем ее величина пропорциональна $\sqrt{H}$. Изменяя H, скорость геликона можно сделать равной скорости звука в кристалле. При этом будет происходить резонансное связывание геликонной и звуковой волн, а также их взаимная трансформация. Теории геликон-фононного резонанса в висмуте и посвящена настоящая работа.

2. Распространение волн в металле описывается уравнениями Максвелла и уравнениями колебаний решетки, которые связаны между собой благодаря взаимодействию электронов проводимости со звуком и электромагнитным полем. Эти уравнения имеют вид [2]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\rho\,\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + f_\alpha. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле в точке $\mathbf{r}$ в момент t; $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — плотность тока; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор смещения в звуковой волне; ρ — плотность металла; $\hat{\lambda}$ — тензор модулей упругости; c — скорость света; $\mathbf{f}$ — объемная плотность силы, действующей со стороны носителей на решетку; по дважды встречающимся индексам производится суммирование. В уравнениях Максвелла мы исключили переменное магнитное поле и пренебрегли током смещения. Векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{f}$ должны быть найдены из кинетического уравнения для функции распределения носителей, в котором учитывается их взаимодействие с электрическим и звуковым полями. Вообще говоря, имеется три различных члена, описывающие взаимодействие носителей с колебаниями решетки: деформационный член, индукционный член и член, связанный с эффектом Стюарта–Толмена. Последний обычно мал и не играет роли. В условиях геликон-фононного резонанса в типичных металлах, который рассматривался в [2], основным было индукционное взаимодействие электронов со звуковой волной. В висмуте же концентрация носителей на пять порядков меньше и основным оказывается деформационное взаимодействие, учетом которого мы и ограничимся. Тогда для монохроматической плоской волны, поле которой описывается функцией $\exp\bigl(i(\mathbf{kr}-\omega t)\bigr)$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — частота волны, неравновесная часть функции распределения электронов проводимости имеет вид [2]

$$F_1 = \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_F}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau'\bigl(eE_\beta v_\beta + \Lambda_{\alpha\beta}\dot{u}_{\alpha\beta}\bigr)\,\Phi(\tau, \tau'), \tag{3}$$

$$\Phi(\tau, \tau') = \frac{1}{\omega_c} \times \exp\left[\frac{\nu}{\omega_c}(\tau' - \tau) + i\,\frac{k_\gamma}{\omega_c}\int\limits_{\tau}^{\tau'} v_\gamma(\tau'')\,d\tau''\right], \tag{4}$$

F_0 — функция Ферми от аргумента $(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_F)/T$, $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — энергия электрона проводимости с импульсом $\mathbf{p}$, ε_F — энергия Ферми, T — температура в энергетических единицах, $\omega_c = eH/m_c c$ и m_c — циклотронная частота и циклотронная масса носителя соответственно, e — величина заряда электрона, $\mathbf{v}$ — скорость, ν — частота столкновений с рассеивателями, $\tau = \omega_c t$ — безразмерное время движения носителя по орбите в магнитном поле, $\Lambda_{\alpha\beta}$ — тензор деформационного потенциала, $u_{\alpha\beta} = (\partial u_\alpha/\partial x_\beta + \partial u_\beta/\partial x_\alpha)/2$ — тензор деформации, точка сверху означает частную производную по времени t. Плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность силы $\mathbf{f}$ определяются следующими формулами [2]:

$$j_\alpha = \sum_j \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int v_\alpha F_1 d^3p,$$

$$f_\alpha = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \Lambda_{\alpha\beta} F_1 d^3p, \tag{5}$$

где j — номер группы носителей.

Подстановка (3) в (5) дает

$$j_\alpha = j_\alpha^{(c)} + j_\alpha^{(\Lambda)} = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta + j_\alpha^{(\Lambda)}, \tag{6}$$

$$f_\alpha = f_\alpha^{(E)} + f_\alpha^{(\Lambda)}, \tag{7}$$

где деформационный ток $j_\alpha^{(\Lambda)}$ и сила $f_\alpha^{(E)}$ описываются выражениями

$$j_\alpha^{(\Lambda)} = \sum_j \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p v_\alpha \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_F} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau' \Lambda_{\gamma\beta} \dot{u}_{\gamma\beta} \Phi(\tau, \tau'), \tag{8}$$

$$f_\alpha^{(E)} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \times \int d^3p \Lambda_{\alpha\beta}(\tau) \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon_F} \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau' e E_\gamma v_\gamma(\tau') \Phi(\tau, \tau'), \tag{9}$$

ток проводимости $j_\alpha^{(c)}$ определяется выражением, которое получается из (8) в результате замены $\Lambda_{\alpha\beta}\dot{u}_{\alpha\beta}$ на $eE_\beta v_\beta(\tau')$, а $f_\alpha^{(\Lambda)}$ — выражением, которое получается из (9) в результате замены $eE_\gamma v_\gamma(\tau')$ на $\Lambda_{\gamma\delta}\dot{u}_{\gamma\delta}$.

3. Рассмотрим геликон-фононный резонанс в висмуте в геометрии, когда вектор распространения волны $\mathbf{k}$ и постоянное магнитное поле $\mathbf{H}$ направлены вдоль биссекторной оси кристалла ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H} \parallel z$). В этой геометрии максимальные площади сечения всех трех электронных эллипсоидов в плоскости xy, перпендикулярной вектору $\mathbf{H}$, в десятки раз меньше максимальной площади сечения дырочного эллипсоида. В результате циклотронные массы электронов и их максимальные смещения за циклотронный период также оказываются в десятки раз меньше соответствующих величин для дырок. Поэтому существует область k, в которой длина волны много меньше максимального смещения дырок за циклотронный период, но много больше максимальных смещений электронов. Эта область k нас и будет интересовать. Для таких k вклад электронов в j_α и f_α хорошо описывается локальным приближением. При этом вклад электронов нужно учитывать только при вычислении тока проводимости $j_\alpha^{(c)}$, а электронные вклады в $j_\alpha^{(\Lambda)}$ и f_α оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с соответствующими дырочными вкладами. Кроме того, в окрестности резонанса слагаемым $f_\alpha^{(\Lambda)}$ можно пренебречь по сравнению с $f_\alpha^{(E)}$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнения (1) и (2) для монохроматических плоских волн принимают вид

$$k^2c^2E_\alpha = 4\pi i\omega\sigma_{\alpha\beta}E_\beta = 4\pi i\omega j_\alpha^{(\Lambda)}, \tag{10}$$

$$\rho\left(-\omega^2 + k^2s^2\right)u_\alpha = f_\alpha^{(E)}, \quad \alpha = x, y, \tag{11}$$

где s — скорость поперечного звука. Как было показано в [1], поле геликона в висмуте вращается по кругу в ту же сторону, что и электроны в магнитном поле (поляризация „минус“). Поэтому от декартовых компонент векторов A_α удобно перейти к циркулярно поляризованным величинам $A_\pm = A_x \pm iA_y$. Тогда уравнение (10), (11) для электромагнитной и звуковой волн записываются в виде

$$\left(k^2c^2 - 4\pi i\omega\sigma_-\right)E_- = 4\pi i\omega j_-^{(\Lambda)}, \tag{12}$$

$$\rho\left(k^2s^2 - \omega^2\right)u_- = f_-^{(E)}, \tag{13}$$

где

$$\sigma_- = \sigma_{xx} - i\sigma_{yx} + \sigma_{yy} + i\sigma_{xy}. \tag{14}$$

Выражение для проводимости σ_- было получено в [1]. В интересующей нас области значений k оно имеет вид

$$\sigma_- = -i\,\frac{nec}{H} + \frac{3\pi}{4|q|}\,\frac{nec}{H}, \tag{15}$$

где

$$q = \frac{kcp}{eH}, \tag{16}$$

$$p = \sqrt{2m_1\varepsilon_F}, \quad m_1 = 0.54m, \quad \varepsilon_F = 2 \cdot 10^{-14}\,\text{erg},$$

ε_F — энергия Ферми дырок, m_1 — эффективная масса дырок вдоль тригональной оси, m — масса свободного электрона, p — величина размерности импульса, которая определяет смещение дырок вдоль магнитного поля за циклотронный период. Первое слагаемое в (15) представляет собой локальную холловскую проводимость, обусловленную электронами, а второе — нелокальную проводимость, обусловленную бесстолкновительным циклотронным поглощением волны дырками. В (15) и далее пренебрегается членами порядка ν/ω_c и ω/ω_c, которые предполагаются малыми.

4. Для вычисления $j_-^{(\Lambda)}$ и f_- необходимо знать зависимость тензора деформационного потенциала $\Lambda_{\alpha\beta}$ от импульса дырки p. Рассмотрим модель, в которой

$$\Lambda_{\alpha\beta} = Mv_\alpha v_\beta, \tag{18}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m_2}, \tag{19}$$

$m_2 = 0.06m$ — эффективная масса дырки в базовой плоскости кристалла, M — константа размерности массы. Величина M определяется из условия, что деформационный потенциал имеет величину порядка атомной энергии (10^{-11} erg). Отсюда следует, что M должна быть порядка 10^{-24} g.

В этой модели свертка $\Lambda_{\alpha\beta}\dot{u}_{\alpha\beta}$, входящая в формулу (7) для $j_{-}^{(\Lambda)}$, сводится к выражению

$$\Lambda_{\alpha\beta}\dot{u}_{\alpha\beta} = \omega k M v_z v u = \frac{1}{2}\,\omega k M v_z (v_+ u_- + v_- u_+), \tag{20}$$

$$v_\pm = \frac{1}{2}\,(v_1 \pm v_2)e^{i\tau} + \frac{1}{2}\,(v_1 \mp v_2)e^{-i\tau},$$

$$v_1^2 = \frac{2}{m_1}\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m_2}\right), \quad v_2^2 = \frac{2}{m_2}\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m_2}\right). \tag{21}$$

Подставляя (20), (21) в (8) и учитывая, что

$$\Phi(\tau,\tau') = \frac{1}{\omega_c}\exp\left[\frac{\nu + ikv_z}{\omega_c}\,(\tau' - \tau)\right], \tag{22}$$

$$m_c = \sqrt{m_1 m_2}, \quad d^3p = m_c d\varepsilon\, dp_z\, d\tau,$$

получаем

$$j_{-}^{(\Lambda)} = \frac{4\pi e}{(2\pi\hbar)^3}\,\omega k M \int\limits_{-p_F}^{p_F}\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m_2}\right)\frac{v_z\, dp_z}{i(kv_z + \omega_c)}\, u_-, \tag{23}$$

где $p_F = \sqrt{2m_2\varepsilon_F}$. Поскольку мы рассматриваем случай $q \gg 1$, слагаемое kv_z в знаменателе подынтегральной функции в (23) много больше ω_c и выражение для $j_{-}^{(\Lambda)}$ принимает вид

$$j_{-}^{(\Lambda)} = -ie\,\frac{M}{m_c}\,\omega u_- \frac{4\pi m_c}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-p_F}^{p_F}\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m_2}\right)dp_z$$

или

$$j_{-}^{(\Lambda)} = -ine\,\frac{M}{m_c}\,\omega u_-, \tag{24}$$

где n — концентрация дырок.

Аналогичное вычисление силы $f_{-}^{(E)}$ дает

$$f_{-}^{(E)} = ne\,\frac{M}{m_c}\,E_-. \tag{25}$$

5. Подставим теперь выражения (15) и (24) в уравнение (12), а выражение (25) — в (13). В результате получаем

$$\left[k^2 - k_H^2\left(1 + i\,\frac{\kappa}{k}\right)\right]c^2E_- = 4\pi ne\,\frac{M}{m_c}\,\omega^2 u_-, \tag{26}$$

$$\left(k^2s^2 - \omega^2\right)u_- = \frac{1}{\rho}\,ne\,\frac{M}{m_c}\,E_-, \tag{27}$$

$$k_H^2 = \frac{4\pi\omega ne}{cH}, \quad \kappa = \frac{3\pi}{4}\,\frac{eH}{pc}. \tag{28}$$

В приближении $M \to 0$, в котором деформационный ток $j^{(\Lambda)}$, обусловленный звуковой волной, и электрическая сила $f^{(E)}$, действующая со стороны носителей на решетку, отсутствуют, электромагнитная и звуковая волны являются независимыми. При этом уравнение (26) описывает геликонную волну, спектр и затухание которой определяются выражением

$$k = k_H + i\,\frac{\kappa}{2}, \tag{29}$$

а уравнение (27) — звуковую волну с волновым вектором $k = \omega/s$.

При учете деформационного тока $j^{(\Lambda)}$ и силы $f^{(E)}$ колебания электромагнитного и звукового полей оказываются связанными. Кроме величин n и M связь волн зависит от того, насколько близки их фазовые скорости. Чем ближе фазовая скорость геликона ω/k_H к скорости звука s, тем в большей мере связаны эти волны. При равенстве скоростей ($k_H = \omega/s$), т.е. при значении магнитного поля $H = H_0$, где

$$H_0 = \frac{4\pi nes^2}{\omega c}, \tag{30}$$

имеет место геликон-фононный резонанс, при котором связь волн является максимальной.

Из (26), (27) следует, что дисперсионное уравнение, определяющее спектр и затухание связанных волн, имеет вид

$$\left[k^2 - k_H^2\left(1 + i\,\frac{\kappa}{k}\right)\right]\left(\frac{k^2s^2}{\omega^2} - 1\right) = \frac{4\pi}{\rho c^2}\left(ne\,\frac{M}{m_c}\right)^2. \tag{31}$$

Вследствие низкой концентрации носителей n в висмуте величина в правой части (31) и, следовательно, степень связи волн оказываются малыми. Поэтому спектр волн даже в окрестности резонанса изменяется незначительно. В то же время влияние резонанса сильно сказывается на затухании звуковой волны. Чтобы определить это затухание, достаточно заменить k в квадратных скобках в (31) на ω/s. В результате дисперсионное уравнение для звуковой волны принимает вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{s^2} + \frac{2\eta}{1 - \frac{H_0}{H} - i\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}, \tag{32}$$

где H_0 дается формулой (30),

$$\eta = \frac{2\pi}{\rho c^2}\left(ne\,\frac{M}{m_c}\right)^2, \tag{33}$$

$$\Omega^2 = 3\pi^2\,\frac{ne^2s^3}{pc^2}. \tag{34}$$

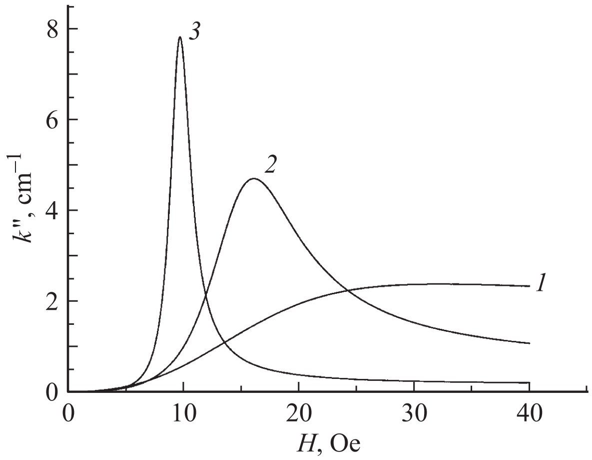
Подстановка значений

$$n = 3\cdot 10^{17}\,\text{cm}^{-3}, \quad s = 10^5\,\text{cm/s}, \quad p = 5\cdot 10^{-21}\,\text{g}\cdot\text{cm/s}$$

в (34) дает для Ω величину порядка $2\cdot 10^7$ rad/s. Эта величина определяет нижнюю границу частотного диапазона, в котором имеет место геликон-фононный резонанс в висмуте.

Из (32) следует, что затухание звуковой волны $k'' \equiv \operatorname{Im} k$ определяется формулой

$$k'' = \frac{s\eta}{\omega}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\left[\left(1 - \frac{H_0}{H}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^4\right]^{-1}. \tag{35}$$



Графики зависимости затухания звуковой воны от поля H при частотах 3 (*1*), 6 (*2*) и 10 MHz (*3*).

На рисунке приведены результаты расчета зависимости k'' от H для частоты $\omega/2\pi = 3$ (кривая *1*), 6 (кривая *2*) и 10 MHz (кривая *3*). Видно, что при частоте 3 MHz резонанс практически не проявляется, но при частотах 6 и 10 MHz он хорошо выражен: кривые *2* и *3* имеют резонансные максимумы при $H = 16$ и 10 Oe соответственно.

Список литературы

[1] В.Г. Скобов, А.С. Чернов. ФТТ **45**, *10*, 1770 (2003).
[2] В.Г. Скобов, Э.А. Канер. ЖЭТФ **46**, *1*, 273 (1964).