Рассеяние волны Рэлея статистической неоднородностью плотности массы

© *В.Н. Чуков*

Институт химической физики им. Н.Н.Семенова Российской академии наук,
117977 Москва, Россия

*(Поступила в Редакцию 10 марта 1996 г.
В окончательной редакции 3 сентября 1996 г.)*

В борновском приближении теории возмущений решена задача рассеяния волны Рэлея поверхностной неоднородностью плотности массы изотропного твердого тела. Неоднородность является статистической с гауссовой формой корреляционной функции в плоскости, параллельной поверхности, и детерминированной с экспоненциально убывающей зависимостью от координаты перпендикулярно поверхности. Получены выражения для полей смещения в рассеянных продольных (P), поперечных (SV, SH) и рэлеевских (R) волнах на больших расстояниях от неоднородности. Вычислены коэффициенты рассеяния волны Рэлея по энергии в зависимости от длины волны λ, радиуса корреляции неоднородности a, глубины нарушенного слоя d и коэффициента Пуассона среды σ. Определено угловое распределение энергии рассеянной волны Рэлея. Получены асимптотические выражения для коэффициентов рассеяния в различных предельных случаях по параметрам a/λ и λ/d. Установлено соотношение энергии в рассеянных P-, SV-, SH-, R-волнах. По полученным фомулам произведен численный расчет коэффициентов рассеяния в широком диапазоне изменения параметров a/λ, λ/d, a/d, σ; результаты представлены в виде графиков и таблицы. Построена физическая картина рассеяния, в ее рамках дана интерпретация полученных результатов.

1. Различные задачи, рассматривающие распространение упругих волн в твердом теле с поверхностными, подповерхностными и объемными неоднородностями [1–34], вызывают интерес в связи с исследованиями условий и закономерностей существования, дисперсии и затухания волн [1–24] и в связи с изучением структуры и свойств твердых тел [25–34]. Практический интерес к ним обусловлен использованием результатов в сейсмологии и геофизике [31,32], акустоэлектронике (в связи с технологией ионной имплантации) [25–30], в дефектоскопии [12,13,33,34].

Распространение волны Рэлея в твердом теле со статистической неоднородностью теоретически рассматривается в [16–19].

В экспериментальной работе [34] установлено, что коэффициент затухания рэлеевской волны из-за рассеяния на неоднородностях нарушенного слоя может иметь разные частотные зависимости при различных способах обработки образцов. Возможна разная физическая интерпретация данных зависимостей. В связи с этим отметим, что трехмерная статистическая изотропная модель неоднородностей дает результаты менее богатые различными формами частотной зависимости [14], чем модель, статистически изотропная по двум координатам и детерминированная по третьей координате. Это связано с тем, что кроме радиуса корреляции есть еще один параметр — глубина нарушенного слоя.

В работах [20–23] установлено, что основные закономерности рассеяния рэлеевских и объемных волн на статистической шероховатости поверхности определяются взаимодействием трех факторов: геометрии рассеяния, граничных условий и структуры шероховатости. В частности, существенное значение для характера рассеяния и частотной зависимости коэффициентов рассеяния имели наличие щели в спектре между объемными и поверхностными волнами и направление рассеяния. При этом отмеченная щель в спектре определяется граничными условиями на нешероховатой поверхности, а направление рассеяния — всеми тремя указанными выше факторами. Интересно проследить, какую роль данные факторы играют при рассеянии на неоднородностях нарушенного слоя.

В данной работе решена задача рассеяния волны Рэлея статистической неоднородностью плотности массы, описываемой гауссовым коррелятором в плоскости, параллельной поверхности, и детерминированной экспонентой (перпендикулярно поверхности). Данная модель отличается от модели [19] зависимостью от радиуса корреляции и глубины нарушенного слоя. В качестве "конечных состояний" системы рассматриваются собственные волны непосредственно полубесконечной упругой среды, содержащей неоднородность в области конечных размеров.

2. Полубесконечная изотропная упругая среда со свободной поверхностью занимает полупространство $x_3 \geqslant 0$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор в декартовой системе координат). Среда имеет неоднородную по плотности массы область, лежащую в пределах $|x_1| \leqslant L_1/2$, $|x_2| \leqslant L_2/2$, $0 \leqslant x_3 \leqslant \infty$. Плотность описывается функцией координат

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho^{(0)}(\mathbf{x}) + \Delta\rho(\mathbf{x}),\ \ \rho^{(0)}(\mathbf{x}) = \vartheta(x_3)\rho,$$
$$\Delta\rho(\mathbf{x}) = \vartheta(x_3)\rho^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где ρ — постоянная плотность однородной части среды, $\rho^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x})$ — функция, описывающая неоднородность и отличная от нуля только в пределах неоднородной области, $\vartheta(x_3)$ — функция Хевисайда, равная единице при $x_3 \geqslant 0$ и 0 при $x_3 < 0$. Статистическая однородная и изотропная по координатам x_1, x_2 и детерминированная по координате x_3 неоднородность имеет вид

$$\rho^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x}) = \rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x}_{\parallel})e^{-gx_3}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, x_2, 0)$, $d = 1/g$ — глубина нарушенного слоя, $\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x}_{\parallel})$ — случайная функция, $\langle\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}\rangle = 0$. Корреляционная функция неоднородности [20–23] имеет гауссову форму

$$W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|) = \rho_{\mathrm{inh}}^2 e^{-(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{x}'_{\parallel})^2/a^2},$$

$$W(\mathbf{k}_{\parallel}) = \pi\rho_{\mathrm{inh}}^2 a^2 e^{-a^2\mathbf{k}_{\parallel}^2/4}, \tag{3}$$

где $W(\mathbf{k}_{\parallel})$ — фурье-образ коррелятора, ρ_{inh} — среднеквадратичная амплитуда неоднородности, a — ее радиус корреляции. Модули упругости имеюют вид

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{x}) = \vartheta(x_3)C_{\alpha\beta\mu\nu},$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda_0\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \mu_0(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}),$$

$$\lambda_0 = \rho(c_l^2 - 2c_t^2), \mu_0 = \rho c_t^2, \tag{4}$$

где λ_0, μ_0 — постоянные коэффициенты Ламе, c_l, c_t — скорости продольных и поперечных волн соответственно, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

На неоднородную область падает поверхностная волна Рэлея [22,35], распространяющаяся в положительном направлении оси x_1. Неоднородность предполагается малой $|\rho^{(\mathrm{inh})}| \ll \rho$. Требуется решить задачу рассеяния в борновском приближении теории возмущений, найти векторы смещения в рассеянных волнах на больших расстояниях от неоднородности, потоки энергии в рассеяных волнах и коэффициенты рассеяния (по энергии).

Уравнение движения теории упругости [35]

$$\rho(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{x})\right]\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_\beta\partial x_\nu}, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор смещения, с учетом (1) и с помощью функции Грина $D_{\mu\beta}$ для полубесконечной однородной среды со свободной поверхностью [20–24] можно переписать в форме

$$u_\mu^{(s)}(\mathbf{x}, t) \equiv u_\mu(\mathbf{x}, t) - u_\mu^{(0)}(\mathbf{x}, t)$$
$$= -\int a^3x'\int dt' D_{\mu\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t')\Delta L_{\beta\gamma}(\mathbf{x}', t')u_\gamma(\mathbf{x}', t'), \tag{6}$$

где $\mathbf{u}^{(0)}$ — вектор смещения волны Рэлея в однородной среде, $\mathbf{u}^{(s)}$ — вектор смещения в рассеянных волнах (по определению),

$$\Delta L_{\alpha\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho}\left[-\Delta\rho(\mathbf{x})\delta_{\alpha\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \tag{7}$$

— дифференциальный оператор. Заметим, что граничные условия для свободной поверхности включены в уравнения движения (5) с помощью формализма сингулярных функций [23].

После перехода к фурье-представлению для функций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $D_{\mu\beta}(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}; t - t'|x_3, x'_3)$, $\rho^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x})$ по координатам x_1, x_2 и по времени t уравнение (6) с учетом (1), (4) дает для поля смещения в рассеянных волнах в борновском приближении

$$u_\mu^{(s)}(\mathbf{k}_{\parallel}, \omega|x_3) = -\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{+\infty} dx'_3 \int \frac{d^2g_{\parallel}}{(2\pi)^2} D_{\mu\beta}(\mathbf{k}_{\parallel}, \omega|x_3, x'_3)$$
$$\times\,\omega^2\delta_{\beta\gamma}\rho^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{g}_{\parallel}|x'_3)u_\gamma^{(0)}(\mathbf{g}_{\parallel}, \omega|x'_3). \tag{8}$$

Используя найденное явное выражение для фурье-образа $u_\mu^{(s)}(\mathbf{k}_{\parallel}, \omega|x_3)$ и вычисляя интеграл по $d^2k_{\parallel}$ обратного фурье-преобразования с помощью методов стационарной фазы и контурных интегралов [20–24], получим выражения для векторов смещения в рассеянных волнах на больших расстояниях от области рассеяния.

1) Рассеянная продольная волна (P-волна)

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{P})}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}A\left[\frac{\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\parallel}^{(l)} - \mathbf{k}_{\parallel}^{(0)})}{\rho}\right]P(\mathbf{k}^{(l)}; g; \sigma)x^{-1}$$
$$\times\exp[(i\omega x/c_l) - i\omega t], \tag{9}$$

где $\mathbf{e} = (\sin\vartheta_s\cos\varphi_s;\, \sin\vartheta_s\sin\varphi_s;\, \cos\vartheta_s)$ — орт в направлении радиус-вектора, $\mathbf{k}_{\parallel}^{(l)} = (\omega/c_l)(\sin\vartheta_s\cos\vartheta_s;\, \sin\vartheta_s\sin\varphi_s;\, 0)$, $\mathbf{k}_{\parallel}^{(0)} = \omega/c_{\mathrm{R}}(1;\, 0;\, 0)$, A — комплексная амплитуда x_1-компоненты падающей волны Рэлея [20–24], $\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\parallel})$ — фурье-образ функции $\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{x}_{\parallel})$ (2), σ — коэффициент Пуассона, c_{R} — скорость рэлеевской волны, ω — угловая частота.

2) Рассеянная поперечная волна вертикальной поляризации (SV-волна)

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{SV})}(\mathbf{x}, t) = \big[\mathbf{e}[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_{\parallel}]\big]A\left[\frac{\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\parallel}^{(t)} - \mathbf{k}_{\parallel}^{(0)})}{\rho}\right]$$
$$\times S_v(\mathbf{k}^{(t)}; g; \sigma)x^{-1}\exp[(i\omega x/c_t) - i\omega t], \tag{10}$$

где в двойное векторное произведение входят $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_{\parallel}$ — орты в направлении оси x_3 и $\mathbf{x}_{\parallel}$ соответственно, $\mathbf{k}_{\parallel}^{(t)} = (\omega/c_t)(\sin\vartheta_s\cos\varphi_s;\, \sin\vartheta_s\sin\varphi_s;\, 0)$.

3) Рассеянная поперечная волна горизонтальной поляризации (SH-волна)

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{SH})}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3]A\left[\frac{\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\parallel}^{(t)} - \mathbf{k}_{\parallel}^{(0)})}{\rho}\right]$$
$$\times S_h(\mathbf{k}^{(t)}; g; \sigma)x^{-1}\exp[(i\omega x/c_t) - i\omega t]. \tag{11}$$

Зависимость функций $f_1^{(\mathrm{P;SV;SH;B;R})}$ от коэффициента Пуассона среды σ в случае $a/\lambda \ll 1$ для разных значений параметра λ/d $\left(\mathrm{R/B} = f_1^{(\mathrm{R})}/f_1^{(\mathrm{B})}\right)$

λ/d	σ	$f_1^{(\mathrm{P})}$	$f_1^{(\mathrm{SV})}$	$f_1^{(\mathrm{SH})}$	$f_1^{(\mathrm{B})}$	$f_1^{(\mathrm{R})}$	R/B
0.01	0.05	$1.81 \cdot 10^{-1}$	$2.48 \cdot 10^{-2}$	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$2.21 \cdot 10^{-1}$	$6.26 \cdot 10^{-1}$	2.83
	0.17	$1.21 \cdot 10^{-1}$	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$6.49 \cdot 10^{-1}$	4.19
	0.34	$5.90 \cdot 10^{-2}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$8.20 \cdot 10^{-2}$	$6.71 \cdot 10^{-1}$	8.18
	0.49	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-3}$	$9.68 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$6.88 \cdot 10^{-1}$	39.5
1.0	0.05	$3.28 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-3}$	$5.72 \cdot 10^{-2}$	$8.48 \cdot 10^{-2}$	1.48
	0.17	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-2}$	$3.95 \cdot 10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-2}$	$7.45 \cdot 10^{-2}$	1.79
	0.34	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$1.77 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$	$2.66 \cdot 10^{-2}$	$5.94 \cdot 10^{-2}$	2.23
	0.49	$1.61 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$	$7.50 \cdot 10^{-4}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$4.70 \cdot 10^{-2}$	2.5
10.0	0.05	$8.24 \cdot 10^{-4}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-3}$	0.94
	0.17	$4.72 \cdot 10^{-4}$	$3.73 \cdot 10^{-4}$	$2.55 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	0.98
	0.34	$1.65 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-4}$	$1.61 \cdot 10^{-4}$	$6.55 \cdot 10^{-4}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$	0.99
	0.49	$3.69 \cdot 10^{-6}$	$2.99 \cdot 10^{-4}$	$9.27 \cdot 10^{-5}$	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	0.99

4) Рассеянная поверхностная волна Рэлея (R-волна)

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{R})}(\mathbf{x},t) = A\left[\frac{\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}(\mathbf{k}_{\mathrm{R}} - \mathbf{k}_{\parallel}^{(0)})}{\rho}\right]\frac{e^{i\pi/4}}{8\sqrt{2\pi}R_2}\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}\right)^{3/2}$$
$$\times R(gc_{\mathrm{R}}/\omega;\varphi_s;\sigma)x^{-1/2}\exp\left[(i\omega x_{\parallel}/c_{\mathrm{R}}) - i\omega t\right]$$
$$\times\left\{\mathbf{e}_{\parallel}\left[e^{-\alpha\frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}x_3} - \gamma e^{-\beta\frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}x_3}\right]\right.$$
$$\left. + \mathbf{e}_s\left[i\alpha e^{-\alpha\frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}x_3} - i\frac{\gamma}{\beta}e^{-\beta\frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}x_3}\right]\right\}. \tag{12}$$

где $\mathbf{k}_{\mathrm{R}} = (\omega/c_{\mathrm{R}})(\cos\varphi_s;\sin\varphi_s;0)$, R_2, α, β, γ — константы, зависящие от σ.

3. С помощью выражений (9)–(12) найдем потоки энергии в рассеянных волнах, усредненные по периоду колебаний по времени и по статистическому ансамблю неоднородностей с коррелятором (3) [20–24]. После этого вычислим коэффициент рассеяния по энергии

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l^{(\mathrm{P})}} + \frac{1}{l^{(\mathrm{SV})}} + \frac{1}{l^{(\mathrm{SH})}} + \frac{1}{l^{(\mathrm{R})}}, \tag{13}$$

по физическому смыслу являющийся коэффициентом затухания волны Рэлея за счет рассеяния в P-, SV-, SH-, R-волны ($1/l^{(\mathrm{P,SV,SH,R})}$ соответственно) [20–24].

$$\frac{1}{l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}} = \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}\frac{1}{a}f^{(\mathrm{P;SV;SH;R})},$$
$$f^{(\mathrm{B})} = f^{(\mathrm{P})} + f^{(\mathrm{SV})} + f^{(\mathrm{SH})} + f^{(\mathrm{R})},$$
$$f^{(\mathrm{P;SV;SH;B;R})} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^3 f_1^{(\mathrm{P;SV;SH;B;R})},$$
$$f^{(\mathrm{R})} = \int_0^{2\pi} F^{(\mathrm{R})}(\varphi_s)d\varphi_s. \tag{14}$$

Безразмерные функции f, f_1 зависят от a/λ, λ/d и σ. Они выражаются через модифицированные функции Бесселя и интегралы от них. Их выражения не приводятся здесь из-за громоздкости.

С помощью общих выражений (14) получим асимптотические формулы для коэффициентов рассеяния при малых и больших значениях параметров a/λ и λ/d: 1) при $a/\lambda \ll 1$, $\lambda/d \gg 1$

$$\frac{1}{l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{1,2,3,4}\frac{a^2d^2\omega^5}{c_{\mathrm{R}}^2c_{l,t,t,\mathrm{R}}^3}; \tag{15}$$

2) при $a/\lambda \ll 1$, $\lambda/d \ll 1$

$$\frac{1}{l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{5,6,7,8}\frac{a^2\omega^3}{c_{l,t,t,\mathrm{R}}^3}; \tag{16}$$

3) при $a/\lambda \gg 1$, $\lambda/d \ll 1$

$$\frac{1}{l^{(\mathrm{P;SV;SH})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{9,10,11}\frac{d^2\omega}{a^2c_{\mathrm{R}}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{a\omega}{c_{\mathrm{R}}}\right)^2\left[1 - \frac{c_{\mathrm{R}}}{c_{\ l,t,t}}\right]^2\right\},$$
$$\frac{1}{l^{(\mathrm{R})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{12}\frac{ad^2\omega^4}{c_{\mathrm{R}}^4}; \tag{17}$$

4) при $a/\lambda \gg 1$, $\lambda/d \ll 1$

$$\frac{1}{l^{(\mathrm{P;SV;SH})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{13,14,15}\frac{c_{\mathrm{R}}}{a^2\omega}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{a\omega}{c_{\mathrm{R}}}\right)^2\left[1 - \frac{c_{\mathrm{R}}}{c_{l,t,t}}\right]^2\right\},$$
$$\frac{1}{l^{(\mathrm{R})}} \simeq \frac{\rho_{\mathrm{inh}}^2}{\rho^2}Q_{16}\frac{a\omega^2}{c_{\mathrm{R}}^2}, \tag{18}$$

где $Q_1 - Q_{16}$ — константы, зависящие от σ.

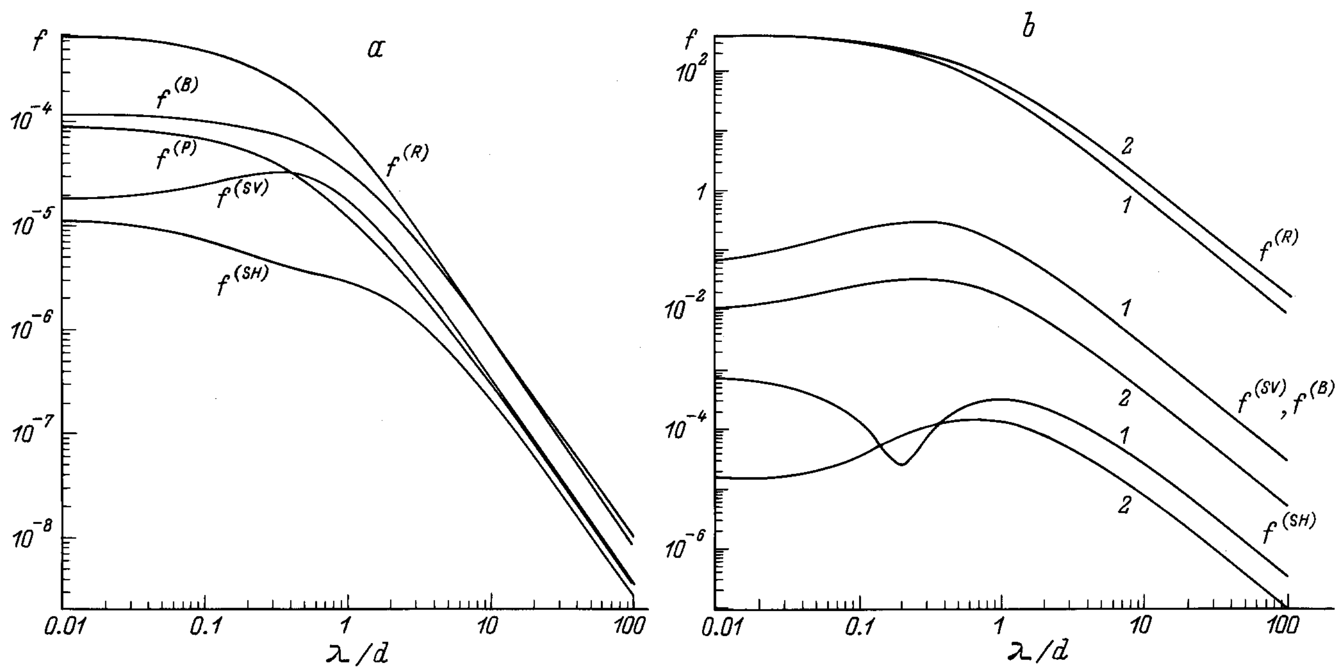


Рис. 1. Результаты численного расчета функций $f^{(\mathrm{P,SV,SH,B,R})}$ в зависимости от λ/d при постоянном $a/\lambda = 0.1$ (a) и 30.0 (b). σ: a) 0.25, b) *1* — 0.25, *2* — 0.05.

Условия применимости результатов данной работы следующие [23]: 1) $L_1/l \ll 1$; 2) $|\mathbf{x}_\parallel| \gg L_1, L_2$; 3) $a \ll L_1$, L_2; 4) $(1 - c_\mathrm{R}/c_t)L_1/\lambda \gg 1, L_2/\lambda \gg 1$.

4. На рис. 1–3 и в таблице представлены результаты численного расчета безразмерных функций $f^{(\mathrm{P;SV;SH;B;R})}$ и $F^{(\mathrm{R})}$.

Результаты решенной задачи рассеяния укладываются в принципиальные рамки физической картины, рассмотренной в [20–23] для рассеяния на статистической шероховатости. Основные закономерности рассеяния определяются взаимодействием трех факторов: динамики задачи (т. е. формы уравнений движения и граничных условий; динамика данной задачи такова, что возмущение системы, обусловленное наличием неоднородности плотности массы, входит не в граничные условия, а в традиционное уравнение движения, см.(5)–(8) и [23]), структуры неоднородности и геометрии рассеяния.

В длинноволновом пределе, когда длина волны много больше характерных размеров неоднородности $a \ll \lambda$, $d \ll \lambda$, структура неоднородности не "чувствует" структуру волны ни в горизонтальном (в пределах a), ни в вертикальном (в пределах d) направлениях. Эффективная глубина взаимодействия $\sim d$. Это проявляется при суммировании источников по глубине в (8). Энергия рассеянных волн распределена по направлениям примерно изотропно (кривая *1* на рис. 4). В этом случае основная доля энергии в падающей волне Рэлея находится за пределами нарушенного слоя. Коэффициенты рассеяния (15) $1/l \sim a^2 d^2 \omega^5$, что соответствует закону рэлеевского рассеяния (по частоте) для трехмерной неоднородности. Доли энергии, перешедшие в рассеянные рэлеевские и объемные волны, одного порядка (см. рис. 1,a, 3 и таблицу).

При увеличении a/λ неоднородность начинает "чувствовать" структуру волны в пределах радиуса корреляции a. В соответствии с этим в области высоких частот $a \gg \lambda$ взаимно не гасятся только те рассеянные волны, для которых выполняется условие

$$\left|\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{k}_\parallel^{(0)}\right|^2 \ll \frac{4}{a^2}, \qquad (19)$$

вид которого определяется формой коррелятора (3), т. е. структурой неоднородности в горизонтальной плоскости. Для выполнения условия (19) существенную роль играют наличие щели в спектре между рэлеевскими и объемными волнами, определяемое граничными условиями для однородной среды, и направление рассеяния, определяемое взаимодействием указанных выше трех факторов. Частотная зависимость коэффициентов рассеяния $1/l$ при $a \gg \lambda$ (зависимость от a/λ) определяется именно этими волнами и является более слабой (в отношении к скорости роста), чем при $a \ll \lambda$.

Так, условие (19) при $a \gg \lambda$ выполняется для волн Рэлея, углы рассеяния которых лежат в пределах

$$|\varphi_s| \ll 2\lambda/a, \qquad (20)$$

Значит, вследствие структуры неоднородности максимальное рассеяние в волны Рэлея должно происходить на нулевой угол $\varphi_s = 0$, т. е. "вперед". В данном случае предкорреляционный множитель в выражении для потока энергии в рассеянной рэлеевской волне

$$\frac{dE^{(\mathrm{R})}}{dt} = |A|^2 L_1 L_2 \rho \left[\frac{\rho_{\mathrm{inh}}}{\rho}\right]^2 \frac{a^2\omega^4 c_l^2 R_1}{256 R_2^2 c_{\mathrm{R}}^3} \times \int_0^{2\pi} d\varphi_s e^{-a^2\left|\mathbf{k}_\parallel^{(\mathrm{R})}-\mathbf{k}_\parallel^{(0)}\right|^2/4}\left[R_3\cos\varphi_s + R_4\right]^2 \quad (21)$$

(где $R_{3,4} = 8p_{1,2}[1/(2\alpha + gc_{\mathrm{R}}/\omega) - 2p_{3,4}/(\alpha + \beta + gc_{\mathrm{R}}/\omega) + p_{5,6}/(2\beta + gc_{\mathrm{R}}/\omega)]$, $p_1 = \gamma^2/\alpha$, $p_2 = \alpha\gamma^2$, $p_3 = \gamma$, $p_4 = 1/\gamma$, $p_5 = \gamma^2$, $p_6 = 1/\gamma^2$, $\alpha, \beta = (1 - c_{\mathrm{R}}^2/c_{l,t}^2)^{1/2}$, $\gamma = 1 - c_{\mathrm{R}}^2/2c_t^2$, R_1 зависит от σ) не обращается в нуль ни при каких значениях φ_s, т. е. все направления являются разрешенными для рассеяния в волны Рэлея. Таким образом, разрешенное (граничными условиями) направление "вперед" и является направлением максимального рассеяния (рис. 4,*b*), а коэффициент рассеяния во вторичные волны Рэлея при $a \gg \lambda$, $d \ll \lambda$ (см. (17)) $1/l^{(\mathrm{R})} \sim ad^2\omega^4/c_{\mathrm{R}}^4$.

Для рассеянных объемных волн при $a \gg \lambda$ условие (19) не может быть выполнено ни при каких углах рассеяния ϑ_s, φ_s вследствие наличия щели в спектре между рэлеевскими и объемными волнами. Поэтому коэффициенты рассеяния во все объемные волны $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH})}$ при увеличении частоты, когда $a \gg \lambda$, экспоненциально стремятся к нулю (17), (18). Но форма показателя экспоненты и частотная зависимость предэкспоненциального множителя определяются взаимодействием отмеченных выше трех факторов. Вследствие данной структуры неоднородности

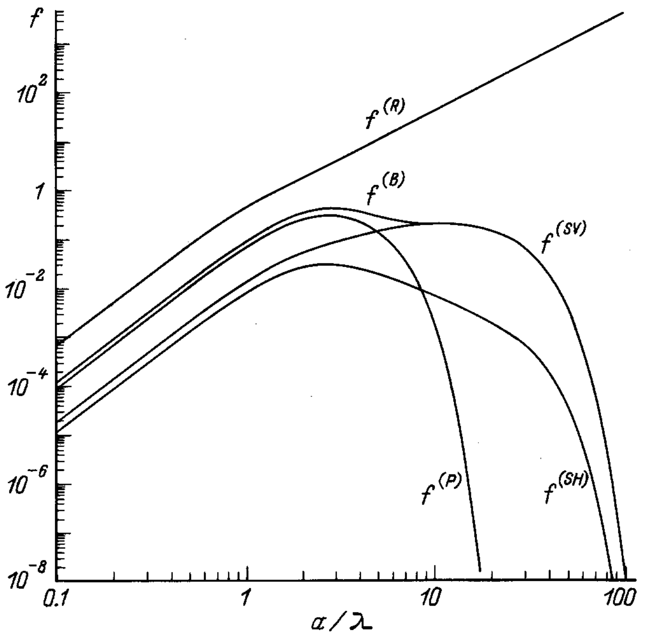


Рис. 2. Результаты численного расчета функций $f^{(\mathrm{P,SV;SH,B,R})}$ в зависимости от a/λ при постоянном $\lambda/d = 0.01$, $\sigma = 0.25$.

(горизонтально) направление "вперед" ($\vartheta_s = \pi/2$, $\varphi_s = 0$) является главным и для рассеяния в объемные волны (показатель экспоненты коррелятора максимален). Но граничные условия запрещают это направление рассеяния (точно равен нулю предкорреляционный множитель для $\vartheta_s = \pi/2$, $\varphi_s = 0$). И вследствие сферичности рассеянных объемных волн (т. е. геометрии рассеяния) максимальное рассеяние происходит на углы, близкие к направлению "вперед". Частотная зависимость при $a \gg \lambda$, $d \ll \lambda$ предэкспоненты $\sim \omega$ в (17) определяется этими волнами. Математически она определяется поведением предкорреляционных множителей вблизи направления "вперед" (они $\sim (\vartheta_s - \pi/2)^2$ для P-, SV-волн и $\sim \varphi_s^2$ для SH-волны) при вычислении функций f (14) методом Лапласа [36].

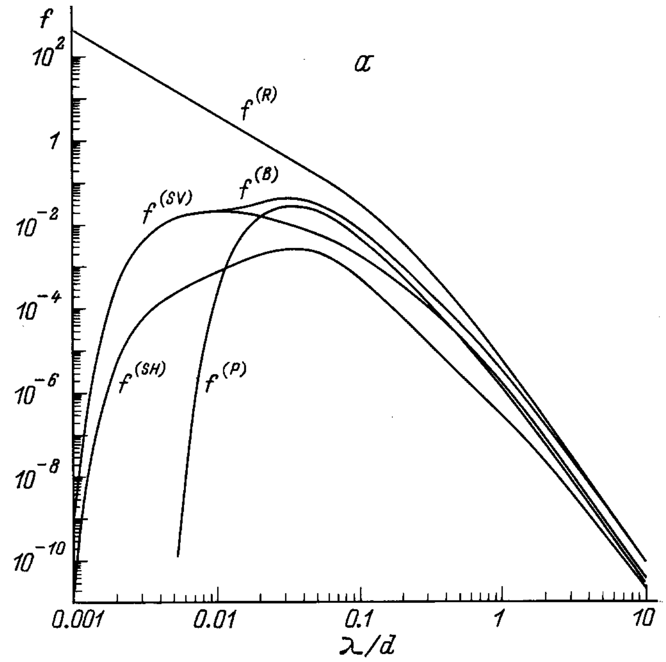
В результате при $a \gg \lambda$ рассеяние происходит во вторичные волны Рэлея и растет с частотой, а рассеяние в объемные волны экспоненциально стремится к нулю. Причем для продольных волн экспонента является более резкой (рис. 1,*b*, 2, 3).

При уменьшении λ/d большая доля энергии падающей волны Рэлея эффективно взаимодействует с неоднородностью, поэтому увеличивается (при постоянных a, λ) рассеяние как в рэлеевские, так и в объемные волны (см. рис. 1 и таблицу). При $\lambda \ll d$ падающая волна перестает "чувствовать" структуру неоднородности (вертикально) при изменении d; рост рассеяния с увеличением d замедляется. Эффективная глубина взаимодействия в (8) $\sim \lambda$. Степень частотной зависимости коэффициентов рассеяния уменьшается на два. $1/l$ не зависят от глубины нарушенного слоя d (16), (18). Соотношение между энергией, рассеянной в объемные и в рэлеевские волны, определяется значением параметра a/λ и коэффициента Пуассона среды σ (см. рис. 1 и таблицу).

Так, при $a \ll \lambda$, $\lambda \ll d$ $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})} \sim a^2\omega^3$ (16), а соотношение энергии в рассеянных волнах сильно зависит от σ (см. таблицу).

При $a \gg \lambda$, $\lambda \ll d$ (18) $1/l^{(\mathrm{R})} \sim a\omega^2$, а $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH})}$ по частоте ω экспоненциально стремятся к нулю. Рассеяние происходит в волны Рэлея.

Если a, d постоянны, а частота падающей волны Рэлея изменяется в широком диапазоне (от $\lambda/d \ll 1$, $a/\lambda \gg 1$ до $\lambda/d \gg 1$, $a/\lambda \ll 1$), то для характера рассеяния и зависимости $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}$ от частоты ω важную роль играют и горизонтальная, и вертикальная структуры неоднородности, так как изменяются оба параметра: a/λ и λ/d. Это проявляется, например, в том, что коэффициенты рассеяния при $\lambda/d \to 0$ не выходят на константу (как при постоянных a, λ). При $\lambda/d \to 0$ $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH})}$ стремятся к нулю экспоненциально по частоте (18), при увеличении λ/d они имеют максимум и далее убывают (15) как λ^{-6} при $\lambda/d \gg 1$ (т. е. более резко, чем при $a/\lambda = \mathrm{const}$ ($\sim \lambda^{-3}$)). При $\lambda/d \to 0$ $1/l^{(\mathrm{R})}$ возрастает (18) как λ^{-2}. Таким образом, при $\lambda/d \ll 1$ рассеяние происходит в



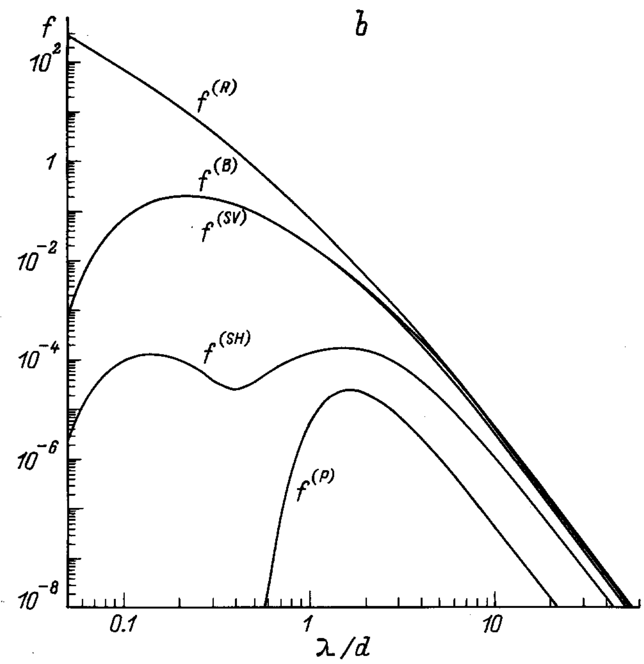


Рис. 3. Результаты численного расчета функций $f^{(\mathrm{P,SV,SH,B,R})}$ в зависимости от λ/d при постоянном $a/d = 0.1$ (a) и 5.0 (b). σ: a — 0.25, b — 0.49.

волны Рэлея. При увеличении λ/d $1/l^{(\mathrm{R})}$ монотонно убывает (при $\lambda/d \gg 1$ (15) как λ^{-6}, а не как λ^{-3} при $a/\lambda = \mathrm{const}$) и становится того же порядка, что и $1/l^{(\mathrm{B})} = 1/l^{(\mathrm{P})} + 1/l^{(\mathrm{SV})} + 1/l^{(\mathrm{SH})}$ (см. рис. 3 и таблицу). Кроме того, при $a/d \ll 1$ или $a/d \gg 1$ имеются области частот, в которых поведение коэффициентов рассеяния описывается формулами (16) и (17) соответственно. В промежуточной по λ/d области соотношение между частями энергии, рассеянными в объемные и в рэлеевские волны, определяется значением a/λ и σ (рис. 3).

Отметим, что, хотя величина ноеднородности монотонно убывает при увеличении расстояния от поверхности (2), функции $1/l^{(\mathrm{SV})}$, $1/l^{(\mathrm{SH})}$ имеют максимумы и минимумы в зависимости от λ/d при постоянных a, λ (рис. 1,b, 2). Экстремумы проявляются более резко при увеличении параметра a/λ. В рамках рассматриваемой физической картины наличие максимумов и минимумов плотности потока энергии по λ/d (при a, $\lambda = \mathrm{const}$) для данного направления рассеяния обусловлено взаимодействием с неоднородностью двух компонент (скалярной и векторной) волны Рэлея, имеющих поверхностный характер. Рассеянные SH-волны имеют экстремумы для направления "вперед" и вблизи него, SV-волны — для разных направлений при разных значениях λ/d, но наиболее резкие для направления "вперед". При вычислении суммарного по углам потока энергии в случае $a/\lambda \ll 1$ экстремумы сглаживаются. При $a/\lambda \gg 1$ рассеяние происходит в основном в направлении "вперед", экстремумы имеют наиболее выраженный характер.

В рамках рассматриваемой физической картины рассеянное поле формируется в области с размерами порядка радиуса корреляции a (горизонтально) и глубины нарушенного слоя d (вертикально). В силу выбранной модели неоднородности (2), (3) $\rho_{\parallel}^{(\mathrm{inh})}$ не зависит от $g = 1/d$, а ρ_{inh} — от a. Поэтому при увеличении a и d увеличивается интегральная "дефектная масса" в пределах a и d, и рассеяние, т. е. $1/l$ (15)–(18), растет. В случаях когда вертикальный размер эффективной области рассеяния $\sim \lambda \ll d$, $1/l$ не зависит от d (16), (18).

Численный расчет показал, что в целом коэффициенты рассеяния сильно зависят от коэффициента Пуассона среды σ (см. рис. 1,b, 3 и таблицу). При $a/\lambda \ll 1$, $\lambda/d \ll 1$ рассеяние в волны Рэлея растет при увеличении σ, а рассеяние в объемные волны уменьшается. Отношение долей энергии, рассеянных в рэлеевские и в объемные волны, изменяется более чем на порядок: при $0 < \sigma \leqslant 0.25$ они одного порядка, при $0.25 < \sigma < 0.5$ рассеяние в волны Рэлея на порядок больше. В данном пределе при значении σ, близком к нулю, рассеяние в продольные волны примерно на порядок превышает рассеяние в SV- и SH-волны. При увеличении σ $1/l^{(\mathrm{P})}$ становится меньше, чем $1/l^{(\mathrm{SV})}$, $1/l^{(\mathrm{SH})}$, но примерно одного порядка с ними. При $a/\lambda \ll 1$, $\lambda \gg d$ с ростом σ уменьшается рассеяние как в объемные, так и в рэлеевские волны, а соответствующие им доли энергии почти равны во всем диапазоне σ. Коэффициенты рассеяния $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH})}$ при значении σ, близком к нулю, одного порядка, с ростом σ они монотонно уменьшаются и при σ, близком к 0.5, $1/l^{(\mathrm{P})}$ более чем на порядок меньше, чем $1/l^{(\mathrm{SV;SH})}$.

На рис. 5 представлен пример расчета по формулам (14) коэффициента затухания волны Рэлея в зависимости от частоты для среды с $\sigma = 0.31$ и различными значениями a и d. Кривые имеют разный наклон, что соответствует разным частотным зависимостям. В эксперименте [34] также наблюдаются разные частотные зависимости коэффициента затухания при различных способах обработки поверхности образцов.

В данной работе также проведен расчет рассеяния по формулам (14) для плотности и корреляционной функции вида

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho + \Delta\rho(\mathbf{x}), \quad \Delta\rho(\mathbf{x}) = \Delta\rho(\mathbf{x}_\parallel) g e^{-gx_3},$$

$$\langle \Delta\rho(\mathbf{x}_\parallel)\Delta\rho(\mathbf{x}'_\parallel)\rangle = \overline{\Delta\rho}^2 W^{(1)}(|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|/a),$$

$$W^{(1)}(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|/a) = \frac{\mathrm{const}}{\pi a^2} e^{-|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|^2/a^2}, \qquad (22)$$

где $\langle \dots \rangle$ и черта над буквой обозначают усреднение по ансамблю неоднородностей. Модель неоднородности (22) использована в [19]. Чтобы получить $1/l^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}$ для неоднородности (22), нужно безразмерные функции $f^{(\mathrm{P;SV;SH;R})}$ данной работы умножить на $\mathrm{const}/(d^2a^3)$. Отметим, что функции (22) при $g \to \infty$ (т.е. $d \to 0$) и $a \to 0$ переходит в δ-функцию Дирака от x_3 и $(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel)$ соответственно. Физически это соответствует тому, что интегральная "дефектная масса" в области с размерами $\sim a$ (горизонтально) и $\sim d$ (вертикально) при изменении a и d остается постоянной. Поэтому зависимость $1/l$ от a и d для неоднородности (22) отличается от соответствующей зависимости для модели неоднородности (1)–(3).

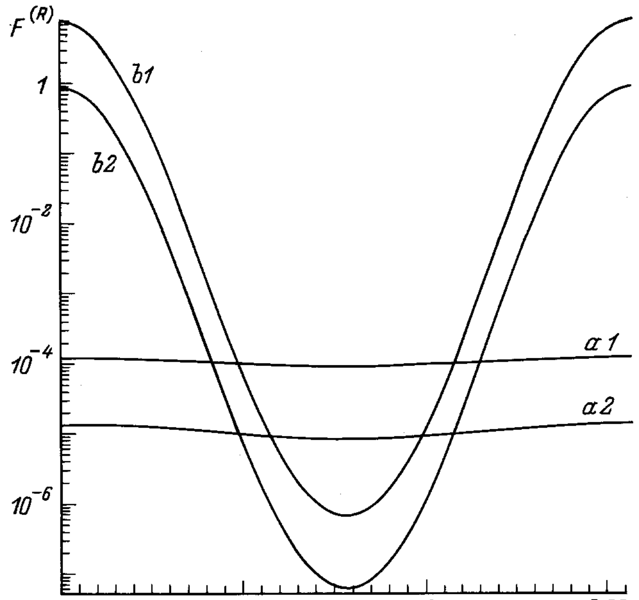


Рис. 4. Угловое распределение рассеяния в волны Рэлея $F^{(\mathrm{R})}$ (φ_s), $\sigma = 0.25$. a/λ: a — 0.1, b — 4.0. λ/d: *1* — 0.01, *2* — 1.0.

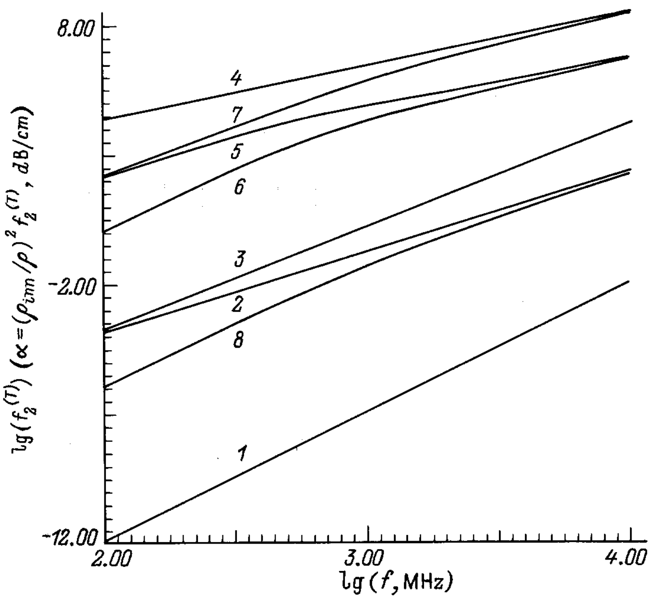


Рис. 5. Зависимость коэффициента затухания α от частоты $f = w/2\pi$. $\sigma = 0.31$, $C_{\mathrm{R}} = 3.485 \cdot 10^5\,\mathrm{cm/s}$, $c_t = 3.751 \cdot 10^5\,\mathrm{cm/s}$, $c_l = 7.136 \cdot 10^5\,\mathrm{cm/s}$. $a\,(\mu\mathrm{m})$ и $d\,(\mu\mathrm{m})$: *1* — 10^{-3} и 10^{-3}, *2* — 10^{-3} и 50, *3* — 50 и 10^{-3}, *4* — 50 и 50, *5* — 1 и 50, *6* — 1 и 1, *7* — 50 и 1, *8* — 10^{-3} и 1.

Результаты для суммарного коэффициента затухания $1/l$ на неоднородности (22) сравнивались с результатами численного расчета работы [19]. Результаты хорошо согласуются для двух верхних кривых рис. 3,a в [19] и для начальных участков всех остальных кривых рис. 3,a,b в [19]. Но в конечных точках расчета для двух нижних кривых рис. 3,a и всех кривых рис. 3,b в [19] значения в 1.5–2 раза меньше значений настоящей работы. Соответственно в окрестности данных точек отличаются наклоны кривых. Формулы (15)–(18) могут быть использованы для экспериментального определения параметров a и d нарушенного слоя.

Автор выражает благодарность В.М. Левину и всем сотрудникам Центра акустической микроскопии за поддержку при выполнении данной работы.

Список литературы

[1] K. Sezawa. Bull. Earthqu. Res. Inst. (Tokyo) **9**, 310 (1931).
[2] Н.В. Зволинский. Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. **9**, *3*, 261 (1945).
[3] A. Chattopadhyay. Gerland Beitr. Geophysik (Leipzig) **85**, *1*, 71 (1976).
[4] И.А. Кайбичев. Акуст. журн. **32**, *5*, 688 (1986).
[5] J.E. Gubernatis, A.A. Maradudin. Wave Motion **9**, *2*, 111 (1987).

[6] F.C. Karal, J.B. Keller. J. Mathemat. Phys. **5**, *4*, 537 (1964).
[7] K. Собчик. Механика. Периодич. сб. переводов иностр. ст., *6*, 142 (1974).
[8] Л.А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М. (1975).
[9] H.S. Tuan. J. Appl. Phys. **47**, *4*, 1248 (1976).
[10] H.S. Tuan. IEEE Trans. Son. and Ultrason. **SU-23**, *4*, 232 (1976).
[11] K.L. Dutta, S.K. Chakraborty. Indian J. Pure Appl. Math. **20**, *6*, 646 (1989).
[12] И.М. Лифшиц, Г.Д. Пархомовский. ЖЭТФ **20**, *2*, 175 (1950).
[13] F.E. Stanke, G.S. Kino. J. Acoust. Soc. Am. **75**, *3*, 665 (1984).
[14] L. Knopoff, J.A. Hudson. J. Acoust. Soc. Am. **42**, *1*, 18 (1967).
[15] R.G. Steg, P.G. Klemens. J. Appl. Phys. **45**, *1*, 23 (1974).
[16] J.A. Hudson. Proc. Camb. Phil. Soc. **67**, *25*, 215 (1970).
[17] А.В. Чигарев. Механика твердого тела, *4*, 87 (1970).
[18] Z. Hryniewicz, A.J. Hermans. J. Sound Vibration **115**, *2* 351 (1987).
[19] M. Narita, T. Sakuma. J. Appl. Phys. **49**, *11*, 5507 (1978).
[20] В.В. Косачев, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ЖЭТФ **94**, *9*, 162 (1988).
[21] В.В. Косачев, Лохов Ю.Н., В.Н. Чуков. ФТТ **31**, *6*, 105 (1989).
[22] В.В. Косачев, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ФТТ **32**, *7*, 2045 (1990).
[23] В.Н. Чуков. МИФИ, М. (1994). 20 с.
[24] A.A. Maradudin, D.L. Mills. Ann. Phys. (N.Y.) **100**, 262 (1976).
[25] J.A. Bucaro, L. Flax. J. Appl. Phys. **45**, *2*, 765 (1974).
[26] T.L. Szabo. J. Appl. Phys. **46**, *4*, 1448 (1975).
[27] P. Hartemann, M. Morizot. Ultrasonics Symp. Proc. IEEE Cat. 74CHO 896-1SU (1974). P. 307.
[28] R.V. Schmidt. Appl. Phys. Lett. **27**, *1*, 8 (1975).
[29] B.R. Tittmann, L.A. Ahlberg, J.M. Richardson, R.B. Thompson. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectrics Frequency Control **UFFC-34**, *5*, 500 (1987).
[30] S.D. Kwon, H.C. Kim. J. Appl. Phys. **62**, *7*, 2660 (1987).
[31] M. Roth, M. Korn. Geophys. J. Int. **112**, 124 (1993).
[32] M. Hoshiba. J. Geophys. Res. **98**, *B9*, 15809 (1993).
[33] В.П. Алехин. Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М. (1983). 280 с.
[34] A.D. Hyndman, S.B. Palmer. Ultrasonics **20**, *2*, 73 (1982).
[35] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. М. (1987). 248 с.
[36] А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М. (1962). 127 с.