Письма в ЖТФ, том 15, вып. 14 26 июля 1989 г.

01

КАРТИНА ИСКАЖЕНИЯ ПРОФИЛЯ ПУАЗЕЙЛЯ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ОБЛАСТЬ ПЕРЕХОДА

Ю.Л. Климонтович

Полуэмпирическая теория турбулентности [1–5] эффективна в области развитой турбулентности. Начала интенсивно развиваться и теория перехода от ламинарного течения к турбулентному [6]. Область перехода изучается и численными методами (например, [7]). Остается открытым, однако, вопрос о физической картине перехода, в частности о механизме нарушения структуры профиля Пуазейля. В такой ситуации оправдано развитие качественных представлений о переходе от ламинарного течения к турбулентному и обобщение полуэмпирической теории турбулентности на область перехода.

В работе приведены два результата. 1) На основе качественного рассмотрения получено замкнутое уравнение для осредненной скорости, которое описывает локальное изменение профиля Пуазейля на начальной стадии перехода от стационарного ламинарного течения к осредненному турбулентному течению. 2) Приводится обобщенное выражение для турбулентной вязкости, использование которого позволяет распространить полуэмпирическую теорию Прандтля–Кармана на область перехода.

При решении первой задачи исходными служат уравнения (1), (2) [8] квазилинейного приближения теории турбулентности. Путем исключения в них напряжения Рейнольдса $\langle \delta u_x \delta u_y \rangle$ (ось x направлена вдоль канала, а y – перпендикулярно плоскостям) получается следующее уравнение для осредненной скорости:

$$\left[\frac{\langle \delta u_y \delta u_y \rangle}{(\omega/k - u(y))^2 + \nu^2 k^2} + 1\right] \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\rho l}. \tag{1}$$

Оно незамкнуто, т.к. в него входит напряжение Рейнольдса $\langle \delta u_y \delta u_y \rangle$. Однако в силу узости резонанса достаточна оценка функции $\langle \delta u_y \delta u_y \rangle$ лишь в точке волнового резонанса y_0. Величина y_0 определяется уравнением $u(y_0) = \omega/k$. Ниже $kh = 1$, где h – полуширина канала. Величина $u(y_0)$ (или ω) оценивается по профилю Пуазейля. Как и в [8], принимаем, что величина y_0 определяется толщиной ламинарного подслоя $l_\Lambda = \delta \nu / v_*$. Здесь v_* – динамическая скорость, δ – числовая константа. Ниже при оценке критического числа Рейнольдса полагаем $\delta = 7.8$. За δ принимаем одну из констант полуэмпирической теории развитой турбулентности [2, 3, 5, 8].

Два масштаба длины h, δ_Λ позволяют оценить число турбулентных степеней свободы для области перехода. Это позволяет оценить значение $\langle \delta U_y \delta U_y \rangle_{y=y_0}$ по формуле относительной дисперсии скорости:

$$N_{турб} = \frac{h^3}{l_\Lambda^3}; \quad \frac{\langle \delta U_y \delta U_y \rangle_{y=y_0}}{\bar{u}^2} = \frac{1}{N_{турб}}, \quad \bar{u} = \frac{2}{3} U_{max}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{U}$ и U_{max} средняя и максимальная скорости течения Пуазейля. Из (2) следует, что „затравочная" дисперсия флуктуаций скорости при зарождении стационарного турбулентного потока является малой, т.к. $l_\Lambda \ll h$. Она значительно больше дисперсии тепловых флуктуаций. Это дает основание рассматривать возникновение турбулентности как жесткое возбуждение.

Определение (2) приводит к следующей оценке критического числа Рейнольдса, близкой к полученной ранее в [8]:

$$R_{кр} = \frac{9}{4} N_{турб} = \frac{9}{4} \left(\frac{h}{l_\Lambda} \right)^3 \approx \frac{8}{5} \left(\frac{\delta}{2} \right)^6. \tag{3}$$

При δ=7.8 получаем значение $R_{кр}$ =5623, которое хорошо согласуется с результатами теории гидродинамической устойчивости. С помощью (1)-(3) получаем следующее замкнутое уравнение для профиля скорости осредненного течения при зарождении стационарного турбулентного течения. Записываем его в безразмерных переменных:

$$\left[\frac{1}{R_{кр}} \frac{1}{(U(y_0) - U(y))^2 + 1/R^2_{кр}} + 1 \right] \frac{d^2 U}{dy^2} = -2. \tag{4}$$

Вне узкой резонансной области первый член в скобках мал и зависимость $U(y)$ определяется законом Пуазейля. Напротив, в точке волнового резонанса первый член в скобках в $R_{кр}$ раз больше второго. При этом из (4) следует, что вторая производная профиля

$$-\frac{d^2 U}{dy^2}\bigg|_{y=y_0} = \frac{2}{R_{кр}} \ll 1. \tag{5}$$

Таким образом, при $R = R_{кр}$ возникает локальное нарушение профиля Пуазейля. В нулевом приближении по $1/R_{кр}$ оно характеризуется появлением точки перегиба при $y = y_0 = l_\Lambda$, т.е. в точке волнового резонанса. Такого рода нарушение профиля ламинарного течения наблюдалось при определении последовательности стационарных профилей течения по мере увеличения числа Рейнольдса в области перехода. Измерения осредненной скорости проводились методом лазерной анемометрии (см. в [9]). Наблюдаемое таким образом искажение профиля Пуазейля трактуется в [9] как появление точки перегиба вблизи стенки канала или трубы.

После возникновения локального нарушения профиля Пуазейля в некотором интервале чисел Рейнольдса происходит расплывание

5 Заказ 1772

локального возмущения по всему профилю. В результате устанавливается течение, которое в рамках полуэмпирической теории можно описать путем введения турбулентной вязкости (ср. с [2, 5])

$$\nu_T(y)=\nu\left(1+F(R_e)f(y)\frac{R_*}{R^o_{кр}}\right);\ R_*=\frac{v_* h}{\nu},\ R^o_{кр}\equiv æ^{-1}\approx 2.5. \tag{6}$$

В (6) введен новый фактор

$$F(R_e)=\frac{R_e-R_{кр}}{R_e}\theta(R_e-R_{кр});\ \theta(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0\\ 0 \text{ при } x<0\end{cases}, \tag{7}$$

который равен единице в области развитой турбулентности и равен нулю при $R_e=R_{кр}$. В формуле (6) $æ$ =0.4 – постоянная Кармана. Функция $f(y)$ в (6) определяется по экспериментальным данным [1–5].

В рамках полуэмпирической теории переход от ламинарного течения к турбулентному можно рассматривать как неравновесный фазовый переход с параметром порядка [5]

$$\langle \delta U_x \delta U_y\rangle=\frac{\nu_T(y)-\nu}{\nu_T(y)}v_*^2\frac{y}{h}. \tag{8}$$

При $R_e=R_{кр}$ параметр порядка обращается в нуль.

Решение уравнения для $U(r)$ при течении в трубе с турбулентной вязкостью (6) приводит к следующей зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса (в [5] $F(Re)=1$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{R^o_{кр}}{2\sqrt{2}F(Re)}\left[\left(\frac{8\sqrt{2}R^o_{кр}}{\sqrt{\lambda}R_eF(R_e)}+B\right)ln\left(1+B\frac{\sqrt{\lambda}ReF(Re)}{8\sqrt{2}R^o_{кр}}\right)-B\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{\lambda}Re}{64}(1-B^2);\quad B=\left(1-\frac{l_\Lambda}{a}\right)^2. \tag{9}$$

В нулевом приближении по параметру $F(R_e)$ (по превышению над порогом) из (9) следует известное для течения Пуазейля выражение $\lambda=64/R_e$. В пределе развитой турбулентности уравнение (9) близко к эмпирическому уравнению Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0.87\,ln\left(\sqrt{\lambda}R_e\right)-0.8. \tag{10}$$

Уравнение (9) дает качественное описание зависимости $\lambda(R_e)$ при всех значениях числа Рейнольдса, т.е. и для области перехода от ламинарного течения к турбулентному.

Список литературы

[1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.

[2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

[3] Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и трубах. М.: Наука, 1969.

[4] Новожилов В.В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя. Л.: Судостроение, 1977.

[5] Климонтович Ю.Л., Энгель-Херберт Х. Осредненные стационарные турбулентные течения Куэтта и Пуазейля в несжимаемой жидкости. - ЖТФ. 1984. Т. 54. С. 440.

[6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

[7] Rozhdestvensky B.L., Simakin I.N. // J. Fluid. Mech. 1984. V. 147. P. 261.

[8] Климонтович Ю.Л. // Письма в ЖТФ. 1984. Т.10. С. 326.

[9] Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С. Методы лазерной допплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.

Московский
государственный
университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
12 февраля 1988 г.

От редакции

Редакция журнала „Письма в ЖТФ" приносит свои глубокие извинения Ю. Л. Климонтовичу за длительную задержку публикации его статьи.