

- [7] W a s u Y.A., X u e Y.Y., H u a n g Z.J., G a o L., B e s h o l d J., C h u C.W. // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. N 12. P.1174-1177.
- [8] Б о й к о в Ю.А., К у т а с о в В.А. // ФТТ, 1987. Т. 29. № 5. С. 1604-1606.

Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе АН СССР,
Ленинград

Поступило в Редакцию
1 марта 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 15, вып. 10

26 мая 1989 г.

01

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗЕРКАЛ ДЛЯ ПЕРЕНОСА КАУСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С.Н. В л а с о в, М.А. Ш а п и р о

Как известно, в приближении геометрической оптики асимптотическому представлению собственной волны в ограниченной области соответствует система лучей, образующих каустику [1, 2]. Поэтому преобразование типов волн можно производить с помощью зеркальных трансформаторов, преобразующих системы лучей [3-5]. В данной заметке мы рассмотрим преобразование и перенос двумерных полей, определяемых лучевыми структурами в плоскости. При этом ограничимся исследованием трансформации простейших структур в виде систем лучей, выходящих из фокуса, либо соскальзывающих с каустики-окружности по касательным к ней.

Перенос каустики и изменение ее радиуса производится с помощью зеркальной поверхности, которая переводит лучи, касающиеся одной окружности, в лучи, касающиеся другой окружности. В двумерном случае указанным свойством обладают кривые, относящиеся к семейству биэвольвент.

Биэвольвентой к выпуклой кривой L [1] называется кривая, которая характеризуется постоянной для всех ее точек длиной замкнутой линии, складывающейся из отрезков касательных к L и участка кривой L между точками касания. Как показано в [1], зеркало в виде биэвольвенты к L обеспечивает существование каустики в виде кривой L . В случае эллиптической каустики биэвольвентой является эллипс с теми же фокусами.

Рассмотрим преобразование каустики-окружности радиуса α_1 в каустику-окружность радиуса α_2 при расстоянии $2F$ между их центрами. Искомая кривая описывается дифференциальным уравнением, представляющим собой условие равенства углов между касательными к каустикам (лучами) и касательной к кривой. В полярных

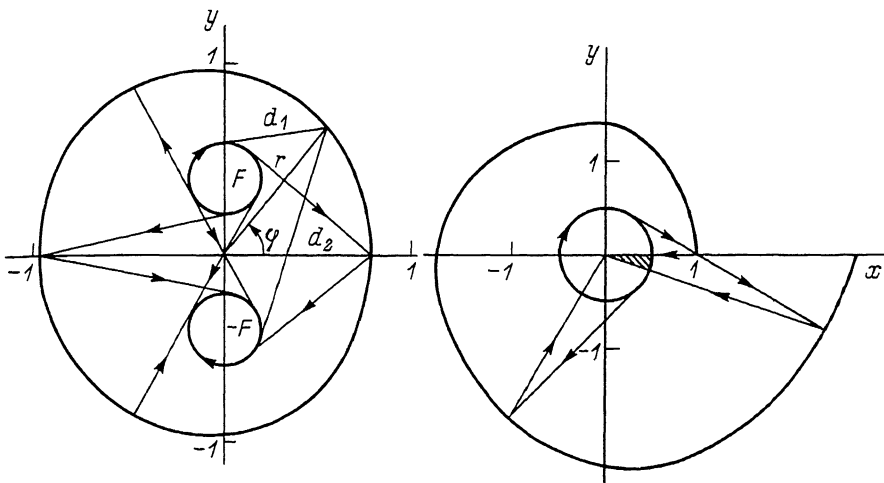


Рис. 1. а) Биэвольвента двух окружностей: $a_1 = a_2 = 0.2$, $F = 0.4$. б) Биэвольвента окружности и точки: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0$, $F = 0$.

координатах (r, φ) (рис. 1) уравнение такой кривой имеет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg}(\varphi - \beta), \quad (1)$$

где $\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, $\alpha_{1,2}$ - углы между касательными к каустикам с радиусами $a_{1,2}$ и осью x :

$$\alpha_1 = \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{F}{r \cos \varphi}\right) - \operatorname{arctg} \frac{a_1}{d_1}, \quad \alpha_2 = \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{F}{r \cos \varphi}\right) + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{d_2}$$

$$d_1 = \sqrt{r^2 - 2Fr \sin \varphi + F^2 - a_1^2}, \quad d_2 = \sqrt{r^2 + 2Fr \sin \varphi + F^2 - a_2^2}.$$

Биэвольвентой к двум окружностям является кривая, которая описывается уравнением

$$-a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + d_1 + d_2 = \operatorname{const}. \quad (2)$$

Дифференцированием (2) можно убедиться в том, что координаты биэвольвенты удовлетворяют уравнению (1). Заметим, что форма кривой зависит от направления соскальзывания лучей. Если биэвольвентой двух совпадающих каустикоокружностей с одинаковым направлением соскальзывания является также окружность, то для каустика с противоположными направлениями соскальзывания биэвольвентой является эвольвента окружности. В (1) и (2) направление соскаль-

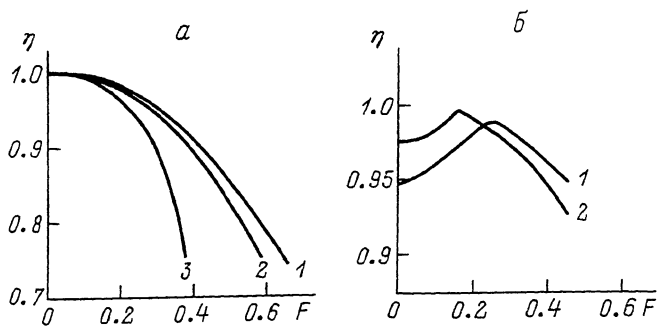


Рис. 2. Коэффициент преобразования при переносе и преобразовании каустика. а - 1 - $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 2 - $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$, 3 - $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.4$; б - 1 - $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0$, 2 - $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0$.

звания учитывается знаком радиусов α_1 и α_2 . В случае противоположных направлений радиусы имеют разные знаки.

При одинаковых радиусах $\alpha_1 = \alpha_2$ биэвольвента двух окружностей - замкнутая кривая (рис. 1,а), являющаяся эллипсом при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. При $\alpha_1 > \alpha_2$ биэвольвента представляет собой раскручивающуюся спираль (рис. 1,б).

Оценим эффективность преобразования лучевых структур. Равенство (2) является условием формирования в окрестности фокуса или каустики-окружности радиуса α_2 необходимой фазы поля. В то же время интенсивность поля $I(\alpha_2)$ в окрестности каустики при заданном значении угла α_2 определяется угловым размером лучевой трубки, соединяющей элементарные участки каустик:

$$I(\alpha_2) = I_0 \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}.$$

Здесь I_0 - постоянная интенсивность поля, формируемого лучами, соскальзывающими с окружности радиуса α_1 или выходящими из фокуса. Поскольку для элемента рассматриваемой кривой справедливо равенство

$$\frac{d_1 d\alpha_1}{\cos(\beta - \alpha_1)} = \frac{d_2 d\alpha_2}{\cos(\beta - \alpha_2)} = \frac{r d\varphi}{\cos(\beta - \varphi)}, \quad (3)$$

амплитудная зависимость возбуждаемого поля имеет вид

$$A(\alpha_2) = \sqrt{\frac{I(\alpha_2)}{I_0}} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}.$$

Поскольку амплитуда поля промодулирована по α_2 , то в окрестности каустики радиуса α_2 возбуждается набор волн с различными каустиками. Коэффициент преобразования в волну с радиусом каус-

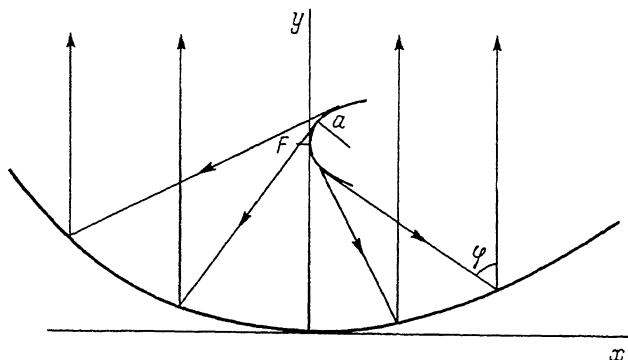


Рис. 3. Преобразование системы лучей, касающихся участка каустики, в поток параллельных лучей.

тики α_2 определим через постоянную составляющую в спектре функции $A(\alpha_2)$ с учетом (3):

$$\eta = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_2}^{\alpha_2 + 2\pi} A(\alpha_2) d\alpha_2 \right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r}{\sqrt{d_1 d_2}} \frac{\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}{\cos(\varphi - \beta)} d\varphi \right)^2, \quad (4)$$

где отрезок интегрирования (φ_1, φ_2) соответствует изменению α_2 на 2π .

Сравним эффективность переноса каустики биевольвентным зеркалом для различных величин F и $a = a_1 = a_2$. Будем рассматривать биевольвентные кривые, имеющие одинаковый максимальный радиус, равный 1. При указанном на рис. 1,а направлении соскальзывания лучей максимальному радиусу соответствуют точки кривой, для которых $\alpha_1 = \alpha_2$. Результаты расчетов коэффициента преобразования (4) приведены на рис. 2,а: перенос каустики на расстояние $2F > 0.3-0.4$ сопровождается существенными потерями.

Случай преобразования каустики проанализируем только для $a_2 = 0$. Как видно из рис. 1,б, спиральная форма биевольвенты влечет за собой дополнительные потери, связанные с затенением части кривой. На рисунке заштрихован сектор, соответствующий затененной части зеркала. Эффект затенения отсутствует при условии $F \geq a_1$ и оптимальной начальной угловой координате φ_1 биевольвенты. Оптимальная точка удовлетворяет равенству $\alpha_1 = \alpha_2$. При расчетах спиральных биевольвент принималось значение $r = 1$ для начального угла $\varphi = \varphi_1$. На рис. 2,б приведены зависимости коэффициента от расстояния F , оптимизированные по φ_1 . Потери на преобразование минимальные при значении $F = a_1$, для которого исчезает затенение части зеркала.

Помимо переноса каустических поверхностей представляет интерес преобразование структуры, формируемой системой лучей, каса-

ющихся участка каустики постоянной кривизны, в волну с плоским фазовым фронтом. Зеркальные преобразователи такого типа использовались в [6, 7]. Форма зеркала (рис. 3) описывается уравнением

$$2(F-y)\varepsilon - x(1-\varepsilon^2) - 2a\varepsilon^2 = 0, \quad (5)$$

где координаты (x, y) рассматриваются как функции от $\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{dy}{dx}$. Продифференцировав (5) по ε , получим уравнения для $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$, решение которых имеет вид:

$$x = 2\varepsilon(F - a \cdot \operatorname{arctg} \varepsilon), \quad y = F + (\varepsilon^2 - 1)(F - a \cdot \operatorname{arctg} \varepsilon) - a\varepsilon.$$

Рассмотренное нами обобщение понятия биэвольвенты к замкнутой кривой на случай двух кривых демонстрирует новые свойства биэвольвент. Биэвольвента не только определяет лучевую структуру собственного колебания в ограниченной ей области, но и может осуществлять преобразование и перенос лучевых структур.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] В а й н ш т е й н Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966.
- [2] Б а б и ч В.М., Б у л д ы р е в В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
- [3] В л а с о в С.Н., З а г р я д с к а я Л.И., П е т е л и н М.И. // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 10. С. 2026.
- [4] Г о н ч а р с к и й А.В., Д а н и л о в В.А., П о п о в В.В. и др. // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 1. С. 166.
- [5] К и н б е р Б.Е. Препринт ИРЭ АН СССР № 38 (410), М., 1984.
- [6] F l y a g i n V.A., A l i k a e v V.V., L i k i n K.M. et al. Proc. of the 3rd // Joint Varenna-Grenoble Int. Symp. 1982. V. 3. P. 1059.
- [7] W a d a O., H a s h i m o t o M., N a k a j i m a M. // Int. Journ. of Electronics. 1988. V. 65. N 3. P. 725.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

Поступило в Редакцию
30 января 1989 г.