Письма в ЖТФ, том 15, вып. 5 12 марта 1989 г.
01; 07

ДИФРАКЦИЯ НА РЕШЕТКАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮШИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Б.Е. Кинбер, П.С. Кондратенко

1. Поле дифракции $u_s(\vec{r})$, образующееся при падении плоской волны $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ на двоякопериодическую решетку, записывается обычно [1] в виде суперпозиции плоских волн различных порядков

$$u_s(\vec{r}) = \sum_l A_l e^{i\vec{k}_l\vec{r}}, \tag{1}$$

в которой сумма берется по порядкам $l=\{l_1, l_2\}$, $l_{1,2}=0, \pm1, \ldots$; $\vec{k}_l$ – волновой вектор волны l-го порядка,

$$\vec{k}_l = \vec{q}_l \mp \vec{m} w_l^{\mp},$$
$$\vec{q}_l = \vec{k} - \vec{m}(\vec{m}\vec{k}) + \sum_{\varkappa} l_\varkappa \vec{g}^\varkappa, \quad w_l^{\mp} = \sqrt{n_\mp^2 k^2 - \vec{q}_l^{\,2}}, \tag{2}$$

$\vec{g}^\varkappa$ – векторы обратной решетки, связанные с векторами прямой решетки $\vec{a}^{\,\alpha}$ соотношением $(\vec{a}^{\,\alpha}\vec{g}^{\,\varkappa})=2\pi\delta_{\alpha\varkappa}$; $\alpha, \varkappa = 1.2$; $\vec{m}$ – орт нормали к плоскости Γ, касающейся вершин решетки; $k \equiv |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ – волновое число; A_l – амплитуда плоской волны l-го порядка. Знак „–" в (2) относится к волнам, „отраженным" от решетки, а „+" – к прошедшим сквозь нее; $n_- = 1$, n_+ – коэффициент преломления среды за решеткой.

2. В практике находят применение оптические элементы, которые можно рассматривать как дифракционные решетки, параметры которых являются медленно меняющимися функциями координат $\vec{\xi}$ поверхности Γ, огибающей такую решетку. Например, изогнутую зонную пластинку можно рассматривать как дифракционную решетку, для которой радиус кривизны огибающей поверхности Γ, а также характерные масштабы изменений периодов решетки и параметров формы много больше самих периодов. Кроме того, падающая волна, хотя обычно и является лучевой, т. е. $u_0 = A(\vec{r})e^{ikS(\vec{r})}$ (амплитуда $A(\vec{r})$ и эйконал $S(\vec{r})$ – медленные на масштабе длины волны функции), но отлична от плоской.

Поле дифракции и на таких решетках можно искать в форме суперпозиции лучевых полей

$$u_s = \sum_l A_l(r)\, e^{ikS_l(r)}, \tag{3}$$

которые и понимаются как поля различных порядков.

Цель работы – проанализировать границы применимости представления (3) и определить лучевую структуру этих полей. Для этого достаточно определить эйконал $S_l(\vec{\xi})$ и его первые и вторые производные по $\vec{\xi}$ на огибающей поверхности Γ. Первые производные определяют направления лучей, вторые – кривизны фронтов волн. Будем считать решетку заданной ее огибающей $\Gamma(\vec{\xi})$ и функциями $\vec{a}^2(\vec{\xi})$. Будем также считать известным строгое решение для „касательной" решетки, параметры которой, т. е. $\vec{m}$, $\vec{a}^{\alpha}$, и параметры формы ячеек совпадают с локальными значениями параметров рассматриваемой решетки. Иными словами, будем полагать известной зависимость амплитуд A_l „касательной решетки" от ее геометрии, направления и длины волны падающего поля.

Заметим, что лучевая структура полей u_l не зависит от того, является ли падающая волна звуковой или электромагнитной, т. е. скалярной или векторной.

3. В приближении квазиклассики (приближение ВКБ)

$$S_l(\vec{\xi}) = S(\vec{\xi}) + k^{-1}\sum_{\varkappa} l_{\varkappa}\int_{\vec{\xi}_0}^{\vec{\xi}}\left(d\vec{\xi}'\vec{g}^{\varkappa}(\xi')\right), \tag{4}$$

где интеграл вычисляется по произвольному пути, проходящему через точки $\vec{\xi}_0$ и $\vec{\xi}$. Однозначность интеграла обусловлена соотношением

$$\Phi\left(d\vec{\xi}\,\vec{g}^{\varkappa}(\vec{\xi})\right) = 0, \tag{5}$$

равносильным требованию гладкости решетки, т. е. отсутствию складок и дислокаций.

Векторы $\vec{k}_l(\vec{\xi})$ определяются условием Брегга (2), в котором, однако, теперь величины $\vec{m}$, $\vec{k} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ и $\vec{g}^{\varkappa}$ являются функциями координат $\vec{\xi}$. Кривизны волновых фронтов $S_l = const$ полей U_l характеризуются матрицей $\hat{N}_l$, связанной с матрицами кривизны $\hat{\bar{N}}$ поверхности Γ и фронта падающей волны $\hat{N}$, и углами θ, θ_l (падения и дифракции) соотношением

$$\hat{N}_l = |n_{\mp}|^{-1}\hat{D}_l^{-1}\left[\hat{D}\hat{N}\hat{D} + (\cos\theta - n_{\mp}\cos\theta_l)\hat{\bar{N}} + k^{-1}\sum_{\varkappa} l_{\varkappa}\hat{h}^{\varkappa}\right]\hat{D}_l^{-1}, \tag{6}$$

где

$$h_{ij}^{\varkappa} = \frac{\partial g_i^{\varkappa}}{\partial \xi_j}, \qquad D_{ij} = \nu_i\nu_j + \cos\theta(\delta_{ij} - \nu_i\nu_j),$$

$$D_l^{ij} = D_{ij}(\vec{\nu}\to\vec{\nu}_l, \cos\theta \to -\cos\theta_l),$$

$\vec{\nu}$ – орт нормали к плоскости падения $(\vec{m}, \vec{k})$, $\vec{\nu}_l$ – к плоскости дифракции $(\vec{m}, \vec{k}_l)$; $\cos\theta = k^{-1}(\vec{m}\vec{k})$, $\cos\theta_l = (n_{\mp}k)^{-1}(\vec{m}\vec{k}_l)$; знак „–" соответствует „отраженным" волнам, „+" – „прошедшим".

Тензоры $h_{ij}^{\varkappa}$ в силу соотношения (5) симметричны.

В двумерном случае, когда все величины на поверхности Γ характеризуются одной координатой ξ, формула (6) переходит в

$$\frac{1}{\rho_l} = |n_{\mp}|^{-1}\left[\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_l}\right)^2\frac{1}{\rho} + \frac{\cos\theta - n_{\mp}\cos\theta_l}{\cos^2\theta_l}\frac{1}{R} + l\frac{k^{-1}}{\cos^2\theta_l}\frac{dg}{d\xi}\right], \tag{7}$$

где ρ, ρ_l – радиусы кривизны фронтов падающей волны l-го порядка, R – радиус кривизны поверхности. При $l=0$ (зеркальное отражение) формулы (6), (7) переходят в известные формулы [2] для преобразования кривизны волн при отражении от гладкой поверхности.

4. Рассмотрим границы применимости решения в форме (3) для решеток с медленно меняющимися параметрами. Для справедливости (3) необходимо, чтобы: а) каждое лучевое поле удовлетворяло волновому уравнению; б) сумма этих полей удовлетворяла граничным условиям на решетке. При падении плоской волны на периодическую решетку первое условие удовлетворено, поскольку u_l – плоские волны, а второе – определением A_l. В решетке с медленно меняющимися параметрами лучевые поля u_l удовлетворяют уравнению асимптотически и тем лучше, чем меньше эффекты поперечной диффузии амплитуды, т. е. чем меньше градиенты A_l. Они особенно велики в окрестности тех лучей, в которых амплитуды A_l соответствуют резким резонансным зависимостям и аномалиям Вуда.

Выполнение граничных условий, „сбалансированное" соотношением амплитуд A_l в периодической решетке, нарушается, если лучевые поля u_l, образованные в одном месте, вновь попадают на решетку, т. е. являются в этих местах падающими волнами, порождая новые системы „переотраженных" волн разных порядков. Сходная ситуация возникает в выпуклых решетках, где задерживаются волны соскальзывания.

Из высказанных соображений вытекает, что решение в форме (3) дает наименьшие погрешности (они пропорциональны отношениям периодов решетки и длины волны излучения к характерным масштабам медленно меняющихся параметров задачи) для порядков дифракции, которые отстоят далеко от тех, что соответствуют резонансам и аномалиями Вуда, и наименее пригодно для описания порядков, скользящих вдоль поверхности Γ, где его надо дополнить волнами переотражения и соскальзывания.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность Л.А. Вайнштейну за полезное обсуждение материалов настоящего сообщения.

Список литературы

[1] Шестопалов В.П. и др. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев: Наукова думка, 1986. 232 с.

[2] Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.

Всесоюзный научно-исследовательский институт оптико-физических измерений

Поступило в Редакцию 4 января 1989 г.