[7] Воронцов М.А., Матвеев А.К., Сивоконь В.П. Сб.: Компьютерная оптика, М., 1987, № 1, с. 74–78.
[8] Баскаков О.И., Епишин В.А. У1 Всесоюзный симпозимум по дифракции и распространению волн. Краткие тексты докладов, кн. 2. Москва–Ереван, 1973, с. 256–260.
[9] Бережный В.Л., Епишин В.А., Кононенко В.И. и др. – Препринт ХФТИ АН УССР № 82–48, Харьков, 1982. 56 с.
[10] Казанцев Ю.Н., Харлашкин О.А. – Радиотехника и электроника, 1984, т. 29, № 8, с. 1441–1450.
[11] Епишин В.А., Маслов В.А., Рябых В.Н. и др. – Радиотехника и электроника, 1988, т. 33, № 4, с. 700–705.
[12] Коряковский А.А., Марченко В.М., Прохоров А.М. Дифракционная теория метода Тальбот-интерферометрии и диагностика широкоапертурных волновых фронтов. Труды ИОФАН СССР, Наука, 1987, т. 7, с. 33–91.
[13] Гудмен Д. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.

Харьковский
государственный университет

Поступило в Редакцию
11 октября 1988 г.

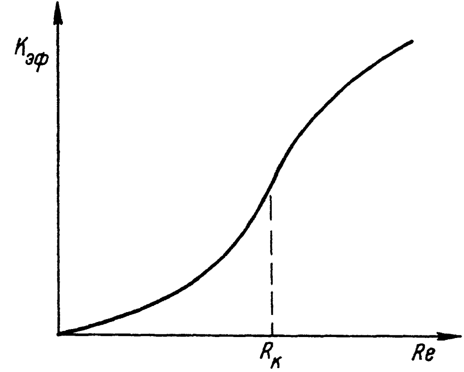
Письма в ЖТФ, том 14, вып. 24 26 декабря 1988 г.

# ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ЭФФЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ТЕЙЛОРА ОТ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

А.М. Стамболцян

С помощью полуэмпирической теории осредненного стационарного турбулентного течения Пуазейля исследуется эффективный коэффициент диффузии Тейлора $K_{эф}$. Полученное в работе выражение для $K_{эф}$ применимо при любых числах Рейнольдса. Для ламинарного потока и в области развитой турбулентности оно согласуется с классическими результатами Тейлора.

Эффективная диффузия Тейлора – это процесс продольного рассеяния примеси в сдвиговом потоке, обусловленный взаимодействием поперечной диффузии и продольного конвективного переноса. Дж.Тейлором [1, 2] были проведены две серии экспериментов по продольной диффузии пассивной примеси в прямых длинных горизонтальных трубах с ламинарным и развитым турбулентным потоками. При этом были найдены следующие закономерности, проявляющиеся как в ламинарных, так и в турбулентных потоках: а) на достаточно больших расстояниях от места введения примеси функция распределения




Зависимость $K_{эф}$ от числа Рейнольдса. При $Re \gg R_к$ она близка к линейной, т.к. в режиме развитой турбулентности $Re \sim R^* \ln R^*$ [5].

---

примеси вдоль потока принимает форму, близкую к гауссовой; б) область, соответствующая максимальной концентрации примеси, движется со скоростью, равной средней скорости потока; в) диффузия примеси в продольном направлении происходит с коэффициентом $K_{эф}$, во много раз превышающим коэффициент радиальной диффузии. В теоретическом анализе, исходя из уравнения молекулярной диффузии и полуэмпирической гипотезы о пропорциональности потока примеси градиенту осредненной концентрации, Тейлор для коэффициента продольного рассеяния получил [1–3]:

$$K_{эф} = 2a^2 \int_0^1 \frac{d\bar{r}}{\bar{r}\, D(\bar{r})} \left[ \int_{\bar{r}}^1 \left( u(\bar{r}') - u_{ср} \right) \bar{r}' d\bar{r}' \right]^2 , \tag{1}$$

где $a$ – радиус трубы, $\bar{r} \equiv \frac{r}{a}$, $D(\bar{r})$ – радиальный коэффициент диффузии, $u(\bar{r})$ – профиль скорости потока, $u_{ср} = 2 \int_0^1 u(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r}$. Для ламинарного потока $u(\bar{r})$ – профиль Пуазейля, $D(\bar{r}) = D$ – коэффициент молекулярной диффузии и

$$K_{эф} = \frac{a^2 u_{ср}^2}{48 D} , \tag{2}$$

что хорошо подтвердилось экспериментально [1, 2].

В турбулентном случае Тейлор воспользовался эмпирически заданным профилем осредненной скорости, а $D(\bar{r})$ находил, используя аналогию Рейнольдса, согласно которой процессы турбулентного переноса массы и импульса аналогичны [2, 3]. Численное интегрирование дало:

$$K_{эф} = 10.1 a v^* , \tag{3}$$

где $v^*$ – динамическая скорость.

В таблице приведены экспериментальные данные для турбулентных потоков. В последней строке – результат для шероховатой трубы. Ниже приведен результат расчета $K_{эф}$ с помощью аналитического выражения для профиля осредненной скорости, полученного в [4, 5]. В нем учитывается ламинарный подслой толщиной $a\delta^*$. Однако можно показать, что „вклад" ламинарного подслоя в $K_{эф}$ порядка $\delta^{*3}$; ввиду малости $\delta^*$ им можно пренебречь и с достаточ-

Экспериментальные результаты, полученные Тейлором в Кавендышской лаборатории. $X$ – длина трубы; диаметр во всех случаях – 0.9 см

| $X$ [см] | $Re$ | $u_{cp}$ $\left[\frac{\text{см}}{\text{с}}\right]$ | $\frac{K_{эф}}{a v^*}$ |
|---|---|---|---|
| 1631 | 1.2 $10^4$ | 136 | 12.8 |
| 1631 | 1.9 $10^4$ | 222 | 10.0 |
| 322 | 1.9 $10^4$ | 222 | 11.6 |
| 245 | 1.3 $10^4$ | 146 | 10.5 |

ной точностью подставлять в (1) только турбулентную часть профиля скорости:

$$u_T(\bar r) = v^* R^\circ_{кр} \ln\left(1 + \frac{R^*}{2R^\circ_{кр}}\left(1-\bar r^2\right)\right). \tag{4}$$

Здесь $\frac{1}{R^\circ_{кр}} = \varkappa \frac{Re - R_к}{R} \theta(Re - R_к)$, $\varkappa$-постоянная Кармана, (5)

$R_к$ – критическое число Рейнольдса, $\theta(\,)$ – функция Хевисайда, $R^* = \frac{a v^*}{\nu}$. Коэффициент радиальной диффузии задан также исходя из аналогии Рейнольдса, но в несколько уточненной формулировке (см. [6]):

$$D(\bar r) = \frac{\nu_T}{\sigma_T} \equiv \frac{\nu}{\sigma_T}\left[1 + \frac{R^*}{2R^\circ_{кр}}\left(1 - \bar r^2\right)\right], \tag{6}$$

$\sigma_T$ – турбулентное число Прандтля–Шмидта.

После интегрирования (1) с (4) и (6) получено:

$$K_{эф} = \frac{a^2\sigma_T}{4\nu}\left(v^* R^\circ_{кр}\right)^2 \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\left[\left(\frac{\beta}{1-\beta} + \ln(1-\beta)\right)\ln^2\beta - \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\ln^3\beta + \right.$$

$$\left. + 2\beta + 2\ln(\beta)\,Li_2(\beta) - 2Li_3(\beta) + 2Li_3(1) - 2\right], \quad \beta \equiv \frac{R^*}{2R^\circ_{кр} + R^*}. \tag{7}$$

В режиме развитой турбулентности $\frac{2R^\circ_{кр}}{R^*} \ll 1$ (см. [4, 5]). Разлагая (7) в ряд по $\frac{2R^\circ_{кр}}{R^*}$, имеем:

$$K_{эф} \simeq 0.202\,\sigma_T \left(R^\circ_{кр}\right)^3 a v^*. \tag{8}$$

Из (8) и (5) находим, что экспериментальным данным (1-я и 2-я строка в таблице) удовлетворяют $\sigma_T \simeq 2.2$ и $R_K = 2188$. В пределе $Re \to \infty$

$$K_{эф} \to 0,202\, \sigma_T \varkappa^{-3} a v^{*}. \tag{9}$$

С помощью (8) можно качественно объяснить четвертый результат в таблице. Для этого в (8) введем множитель $f(X) = 1.2-$ $-1.2 \cdot 10^{-4}\, X$, который найден из первых трех. Тогда для $R_{K\,шер}$ получим $R_{K\,шер} \simeq 1099$, согласующееся с тем, что для шероховатой поверхности $R_K$ меньше, чем для гладкой.

В области перехода от ламинарного течения к турбулентному имеем малый параметр $R^*/2R^{\circ}_{кр} \ll 1$; оставляя в разложении (7) два первых члена, получим:

$$K_{эф} \simeq \frac{a^2 u^2_{ср}}{48 D}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{R^*}{R^{\circ}_{кр}}\right). \tag{10}$$

Для ламинарного потока из (10) и (5) следует тейлоровский результат. Из (10) видно, что с переходом в турбулентный режим рост $K_{эф}$ уменьшается, и при одинаковой средней скорости коэффициент продольной диффузии примеси в ламинарном потоке больше, чем в турбулентном. Это в определенном смысле говорит в пользу того, что турбулентное движение более организовано, чем ламинарное [5].

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору Ю.Л. Климонтовичу за обсуждение результатов и поддержку в работе.

Литература

[1] Taylor G.I. – Proc. Roy. Soc., 1953, A219, N 1137, p. 186–203.
[2] Taylor G.I. – Proc. Roy. Soc., 1954, A223, N 1157, p. 446–468.
[3] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965, т. 1, 639 с.
[4] Климонтович Ю.Л. – Письма в ЖТФ, 1984, т. 10, в. 6, с. 326–330.
[5] Климонтович Ю.Л. – ЖТФ, 1984, т. 54, в. 3, с. 440–449.
[6] Роди В. Модели турбулентности окружающей среды. В сб.: Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984, с. 227–322.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 28 октября 1988 г.