[6] Мохов Е.Н. и др. – В сб.: Тез. докл. Ш Всес. совещания по физике и технологии широкозонных полупроводников. Махачкала, 1986, с. 67.
[7] Дмитриев В.А., Иванов П.А., Морозенко Я.В., Попов И.В., Челноков В.Е. – Письма в ЖТФ, 1985, т. 11, № 4, с. 246–248.
[8] Nishino S., Ibaraki A., Matsunami H., Tanaka T. – Jap. Journal of Applied Physics, 1980, v. 19, N 7, L353–L356.
[9] Vodakov Y.A., Mokhov E.N. – Silicon Carbide – 1973, Proceed III Int. Conf. on SiC, South Carolina Univ. Press, 1974, p. 509–521.
[10] Водаков Ю.А., Ломакина Г.А., Мохов Е.Н ФТТ, 1982, т. 24, № 5, с. 1377–1383.
[11] Веренчикова Р.Г., Водаков Ю.А., Мальцев А.А., Мохов Е.Н., Одинг В.Г. – В сб.: Тез. УП Всес. конференции по росту полупроводниковых кристаллов и пленок. Новосибирск, 1986, т. 1, с. 281.
[12] Виолин Э.Е., Холуянов Г.Ф. – ФТТ, 1964, т. 6, № 6, с. 1696–1701.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
АН СССР, Ленинград

Поступило в Редакцию
30 августа 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 24 26 декабря 1988 г.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ $S$-ТЕОРЕМЫ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Ю.Л. Климонтович

Критерий относительной степени упорядоченности состояний открытых систем на основе сравнения значений энтропии Больцмана-Гиббса-Шеннона при заданном значении средней эффективной энергии – „функции Гамильтона" ($S$-теорема) был введен в работах [1, 2] на примерах развития генерации в системе Ван дер Поля и перехода от ламинарного к стационарному турбулентному течению. Обзор первых результатов дан в [3]. В [4] приведено общее доказательство $S$-теоремы.

Цель настоящей работы – демонстрация возможности использования критерия, основанного на $S$-теореме непосредственно по реализациям, найденным из эксперимента, для различных внутренних параметров системы $X(t, a)$ и, следовательно, без использования информации о структуре „функции Гамильтона". Здесь $a=(a_1, \dots, a_n)$ – набор управляющих параметров. Возможный выбор управляющих параметров чрезвычайно широк. Это – обратная связь и накачка в генераторах, начальные условия в мультистабильных системах, „медленное" время при наличии квазистационарных состояний, числа Рейнольдса, Тейлора и Рэлея в гидродинамике, лекарственные и физиотерапевтические воздействия в медицине и т.д. Очень широк и выбор внутренних параметров, по реализациям которых и производится оценка сравнительной степени упорядоченности. Отсутствие необходимости в дополнительной информации о структуре „функции Гамильтона" открывает новые возможности использования рассматриваемого критерия непосредственно по экспериментальным данным, т.е. без каких-либо математических моделей системы. При доказательстве $S$-теоремы в [4] произвольное стационарное распределение $f(X,a)$ представлялось в виде „канонического распределения Гиббса со „свободной энергией" $F$ и эффективной температурой $D$:

$$f(X,a)=\exp\frac{F(a,D)-H(X,a)}{D}, \quad \int f(X,a)\,dX=1. \qquad (1)$$

Состояние при $a=a_0$ принимается за состояние „физического хаоса". С ним сравнивается состояние при значениях управляющих параметров

$$a=a_0+\Delta a_i, \quad \Delta a_i>0, \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

При $a=a_0$ из (1) следует распределение $f_0\,(X,a_0)$ для состояния физического хаоса с функцией Гамильтона $H(X,a_0)$.

При увеличении $\Delta a$ среднее значение $\langle H_0\rangle$ в общем случае не сохраняется, поэтому разность энтропий $S_0, S$ определямых распределениями $f_0, f$, не может служить мерой относительной степени упорядоченности состояний с параметрами $a=a_0$ и $a=a_0+\Delta a$. Вместо $f_0$ надо использовать перенормированное к заданному значению усредненной функции Гамильтона $\langle H_0\rangle$ распределение $\tilde{f}_0$ и соответствующую энтропию $\tilde{S}_0$. Функция $\tilde{f}_0$ представляется в виде

$$\tilde{f}_0=\exp\frac{\tilde{F}_0-H_0}{\tilde{D}(\Delta a)}, \quad \int\tilde{f}_0\,dX=1, \quad \tilde{D}\Big|_{\Delta a=0}=D. \qquad (3)$$

Зависимость $\tilde{F}(\tilde{D})$ следует из условия нормировки, а зависимость перенормированной „температуры" $\tilde{D}$ от $\Delta a$ из уравнения

$$\int H_0(X,a_0)\,\tilde{f}_0\,dX=\int H_0(X,a_0)\,f(X,a)\,dX. \qquad (4)$$

Тогда разность энтропий [4]

$$\tilde{S}_0-S=\int\tilde{f}_0(\eta e^{\eta}-e^{\eta}+1)\,dX\geq 0 \qquad (5)$$

определяет увеличение относительной степени упорядоченности при переходе от состояния „физического хаоса" $a=a_0$ в состояние

$a=a_0+\Delta a$. Функция $\eta$ в (5) определяется выражением

$$\eta=\frac{F-H(X,a)}{D}-\frac{\tilde{F}_0-H_0(X,a_0)}{\tilde{D}(\Delta a)}. \qquad (6)$$

Для приложений удобна и другая форма записи результата (5)

$$\tilde{S}_0-S=\int ln\frac{f(X,a)}{\tilde{f}_0}\cdot f(X,a)dX\geqslant 0. \qquad (7)$$

Таким образом, если управляющие параметры выбраны правильно, то по мере увеличения $\Delta a$ энтропия уменьшается, и , следовательно, имеет место процесс самоорганизации.

Информация о структуре „функции Гамильтона" в распределении (1) в работах [1, 2] следовала из структуры стационарного решения уравнения Фоккера–Планка и из структуры распределения для состояния локального равновесия. Во многих случаях, когда нет явных математических моделей системы, информация о структуре „функции Гамильтона" отсутствует.

В связи с этим возникает вопрос о практическом использовании $S$-теоремы без представления функций распределения $f, f_0$ в виде (1). Покажем, что такая возможность заложена в приведенных выше результатах.

Вместо (1) рассмотрим соответствующее распределение при $D=1$ и $F=0$. Тогда „функция Гамильтона" в (1) определяется непосредственно по распределению

$$H(X,a)=-ln f(X,a) \quad \text{и, следовательно,} \quad H_0=-ln f_0. \qquad (8)$$

Результаты (5–7) остаются справедливыми и при $D=1$, $F=0$. Выражение для функции $\eta$ существенно упрощается, а функция $\tilde{D}(\Delta a)$ такова, что $\tilde{D}|_{\Delta a=0}=1$.

Дополнительное условие (4), необходимое для определения функции $\tilde{D}(\Delta a)$, принимает теперь вид

$$\int ln f_0(X,a_0)\,\tilde{f}_0\,dX=\int ln f_0(X,a_0)\cdot f(X,a)\,dX. \qquad (9)$$

Таким образом, задается среднее по распределениям $\tilde{f}_0, f$ значений функции $ln f_0$. В виде „канонического распределения Гиббса" представляется теперь лишь перенормированное распределение $\tilde{f}_0$. Для определения в нем „функции Гамильтона" $H_0(X,a_0)$ нет необходимости в дополнительной информации, т.к., согласно (8), она определяется распределением $f_0$.

Таким образом, критерий относительной степени упорядоченности состояний по полученным из эксперимента реализациям $X(t,a)$ сводится к последовательности действий: 1) Выбираются управляющие параметры $a$; 2) По достаточно длинным реализациям $X(t,a)$

находятся стационарные распределения $f(X, a)$; 3) По уравнению (10) определяется функция $\tilde{D}(\Delta a)$. Тем самым находится перенормированное распределение $\tilde{f}_0$; 4) По формуле (8) или (6) определяется разность энтропий $\tilde{S}-S$ при любых выбранных значениях $a=a_0$, $a=a_0+\Delta a$.

Если $\tilde{S}_0 > S$, то выбор управляющих параметров $a$ сделан правильно, и при переходе от состояния со значением $a=a_0$ к состоянию со значением $a=a_0+\Delta a$ степень упорядоченности возрастает и происходит процесс самоорганизации.

В противном случае для нахождения более упорядоченных состояний надо изменить выбор управляющих параметров.

При наличии нескольких управляющих параметров по рассмотренному критерию возможен поиск наиболее упорядоченного состояния в пространстве управляющих параметров. Это может быть сделано, как уже отмечалось, по экспериментальным данным без использования математической модели системы.

Литература

[1] Климонтович Ю.Л. Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации. – Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, с. 1089.
[2] Климонтович Ю.Л. Энтропия и производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях. – Письма в ЖТФ, 1984, т. 10, с. 80.
[3] Ebeling W., Klimontovich Yu.L. Selforganization and Turbulence in Liquids. – Leipzig, Teubner, 1984.
[4] Klimontovich Yu.L. – Z. Phys. B 1987, v. 66, p. 125.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 10 февраля 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 24 26 декабря 1988 г.

# ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ БЫСТРЫХ ИОНОВ ПРИ НИЖНЕГИБРИДНОМ НАГРЕВЕ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ ФТ-2

В.Н. Будников, Л.А. Есипов, М.А. Ирзак

В экспериментах по нижнегибридному (НГ) нагреву плазмы в токамаках функция распределения ионов по энергиям, определяемая обычно по спектру нейтралей перезарядки, имеет вид двойного максвелловского распределения [1]. Крутая низкоэнергичная часть рас-