[4] Рандошкин В.В., Сигачев В.Б. – Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 42, в. 1, с. 34–37.
[5] Рандошкин В.В., Сигачев В.Б. – ФТТ, 1987, т. 29, в. 9, с. 2658–2665.
[6] Сукстанский А.Л., Христева Т.В. – ФТТ, 1987, т. 29, в. 9, с. 2822–2823.
[7] Логунов М.В., Рандошкин В.В. – ЖТФ, 1985, т. 55, в. 10, с. 1987–1991.
[8] Колотов О.С., Куделькин Н.Н., Погожев В.А., Телеснин Р.В. – ЖТФ, 1985, т. 55, в. 4, с. 761–764.
[9] Дудоров В.Н., Логунов М.В., Рандошкин В.В. – ФТТ, 1986, т. 28, в. 5, с. 1549–1552.
[10] Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. – УФН, 1985, т. 146, в. 3, с. 493–506.

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

Поступило в Редакцию 15 апреля 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 14 12 июля 1988 г.

СТРОГИЕ УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ МНОГОГРАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В.В. Корнейчик, Т.М. Корнейчик

1. Приближенные условия квантования, в соответствии с которыми длина волны собственного колебания резонатора пропорциональна длине замкнутого пути луча, последовательно отражающегося от его стенок, широко применяются как при практическом расчете резонаторных устройств, так и в математической физике [1, 2]. В предыдущей работе авторов [3] получены новые условия квантования для двумерных резонаторов в форме элементарных многоугольников; в соответствии с этими условиями длина волны собственного колебания не прямо, а обратно пропорциональна длине замкнутого пути луча:

$$\lambda_{pq} = \frac{NS}{m L_{pq}}, \tag{1}$$

где N – число плоских волн, на которые раскладывается колебание резонатора, S – площадь резонатора, m – наибольший общий делитель индексов колебания p и q, L_{pq} – длина замкнутого пути луча, распространяющегося перпендикулярно направлениям распространения этих плоских волн. В данной работе показано, что рассмотрение трехмерных колебаний приводит к еще более неожиданным результатам: в трехмерные условия квантования длина замкнутого пути луча не входит вообще.

2. Собственные длины волн колебаний резонатора в форме прямоугольного параллелепипеда размером $a \times b \times c$ с идеальными стенками определяются, как хорошо известно, формулой (p, q, r – целые числа)

$$\lambda_{pqr} = \frac{2}{\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

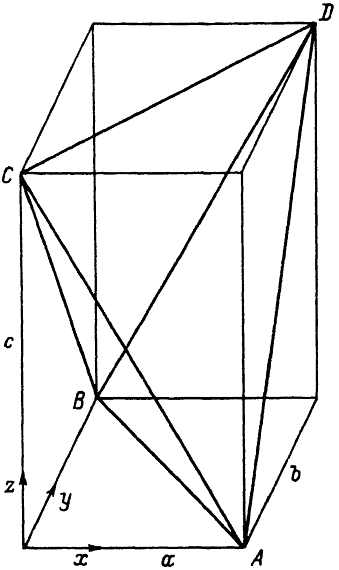
Преобразуем ее к виду

$$\lambda_{pqr} = \frac{2abc}{\sqrt{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 + r^2a^2b^2}} = \frac{8V}{4\sqrt{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 + r^2a^2b^2}} \qquad (3)$$

и выясним смысл выражения, стоящего в знаменателе. В частном случае $p = q = r = 1$ (см. рисунок) – это удвоенная площадь поверхности тетраэдра $ABCD$, ребра которого являются диагоналями граней параллелепипеда, а грани равны между собой и имеют площадь $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$ каждая. Поскольку плоскости любых двух граней тетраэдра образуют с плоскостью той грани параллелепипеда, которой принадлежит ребро тетраэдра, являющееся линией их пересечения, равные углы, можно считать, что плоскости граней тетраэдра попарно связаны законом зеркального отражения относительно плоскостей граней параллелепипеда. Следовательно, в трехмерном случае на смену замкнутому пути лучей приходит замкнутая многогранная поверхность (ЗМП). Как видно из формулы (2), λ_{pqr} можно рассматривать как λ_{111} для параллелепипеда размера $\frac{a}{p} \times \frac{b}{q} \times \frac{c}{r}$. Поэтому ЗМП для высших колебаний параллелепипеда $a \times b \times c$ можно строить из pqr тетраэдров, соответствующих колебанию (111) в каждом из параллелепипедов $\frac{a}{p} \times \frac{b}{q} \times \frac{c}{r}$, причем каждый из тетраэдров является зеркальным отражением соседних с ним тетраэдров в разделяющих их гранях малых параллелепипедов. Удвоенная площадь граней этой поверхности равна сумме удвоенных площадей поверхности тетраэдров:

$$S_{pqr} = pqr \cdot 4\sqrt{\left(\frac{bc}{qr}\right)^2 + \left(\frac{ac}{pr}\right)^2 + \left(\frac{ab}{pq}\right)^2} = 4\sqrt{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 + r^2a^2b^2}.$$

Поле собственного колебания (pqr) параллелепипеда $a \times b \times c$ (в системе координат на рисунке) можно представить в виде суперпозиции полей 8 плоских волн с волновыми векторами $\left(\pm\frac{\pi p}{a}, \pm\frac{\pi q}{b}, \pm\frac{\pi r}{c}\right)$. Эти восемь волновых векторов разбиваются на четыре пары противоположно направленных векторов, а соответствующая колебанию (pqr) ЗМП – на четыре семейства расположенных внутри параллелепипеда многоугольных участков параллельных плоскостей, причем каждая пара векторов перпендикулярна плоскостям соответству-



Замкнутая многогранная поверхность, соответствующая колебанию (111) параллелепипеда с длинами ребер a, b и c, представляет собой тетраэдр $ABCD$. Грань тетраэдра ABC перпендикулярна паре волновых векторов $\pm\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}\right)$ – грань $ABD - \pm\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, -\frac{\pi}{c}\right)$, $ACD - \pm\left(\frac{\pi}{a}, -\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}\right)$, $BCD \pm\left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}\right)$.

ющего семейства. Следовательно, эти участки плоскостей являются участками волновых фронтов составляющих колебания плоских волн. Формулу (3) теперь можно записать в следующем виде:

$$\lambda_{pqr} = \frac{8V}{S_{pqr}}. \tag{4}$$

3. Кроме прямоугольного параллелепипеда полные наборы собственных колебаний известны для трех прямых призм, имеющих в поперечном сечении элементарные треугольники [4], а также для трех тетраэдров [5]. Для всех этих многогранников характерно то, что их собственные колебания представляют собой суперпозицию колебаний определенных параллелепипедов. Поэтому ЗМП для такого многогранника представляет собой совокупность попадающих внутрь его частей ЗМП соответствующих колебаний соответствующих параллелепипедов. Построение ЗМП проще всего произвести, подобно двумерному случаю [6], отражая относительно стенок многогранника попадающую внутрь него часть ЗМП колебания одного из параллелепипедов. Исследование зависимости длин волн собственных колебаний таких многогранников от числа волн N, на которые раскладываются их колебания, объема резонатора V и удвоенной площади ЗМП S_{pqr} приводит к единой формуле

$$\lambda_{pqr} = \frac{NV}{S_{pqr}}. \tag{5}$$

4. Таким образом, исследование известных строгих решений для многогранных резонаторов приводит к условию квантования (5), которое является, по сути, расширением условия (1) на трехмерный случай. Как в двумерном, так и в трехмерном случае в строгих условиях фигурируют размеры участков волновых фронтов совокупностей плоских волн, образующих собственное колебание резонатора. Однако если в двумерном случае речь идет все–таки об отрезках-лучах (так как участок фронта двумерной волны представляет собой отрезок), хотя и перпендикулярных направлению распространения

волны, то в трехмерном случае волновой характер полученных условий виден совершенно отчетливо. Характерно, что в отличие от приближенных геометрооптических условий квантования здесь записано не три противоречивых условия для определения собственных длин волн, а одно, но трехмерный характер колебания учитывается наличием трех индексов колебания, т.е. трех компонентов волновых векторов плоских волн.

Литература

[1] Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., 1966. 475 с.
[2] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972. 456 с.
[3] Корнейчик В.В., Корнейчик Т.М. – Письма в ЖТФ, 1988, т. 14.
[4] Корнейчик В.В. Геометро-волновой метод расчета волноводов и резонаторов. Канд. дис. Минск, 1983, 195 с.
[5] Корнейчик В.В., Процко С.В. – Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 1, с. 10-17.
[6] Корнейчик В.В., Хапалюк А.П. – Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 4, с. 853-857.

Поступило в Редакцию
17 марта 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 14 26 июля 1988 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВПАДЕНИЯ ЧАСТОТ ПЕРЕХОДОВ ИЗОТОПИЧЕСКИХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ CO_2 ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ В ОБЛАСТИ 4.3 МКМ

В.О. Петухов, С.Я. Точицкий,
С.А. Трушин, В.В. Чураков

Для решения различных научных и технических задач (например, разделения изотопов водорода) необходимы мощные источники когерентного излучения, перестраиваемые в диапазоне длин волн 4.2–4.5 мкм. В работе [1] был предложен, а затем в [2, 3] реализован CO_2 лазер с комбинированным возбуждением, генерирующий в данной области спектра, в котором на возбужденную в электрическом разряде среду воздействует излучение в секвенционной полосе 00^02–$10^01(02^01)$. В результате осуществляется оптический сброс молекул с уровня 00^02 на уровень $10^01(02^01)$ и создается инверсия в полосе $10^01(02^01)$–$10^00(02^00)$ ($\lambda \approx 4.3$ мкм). Несмотря на сравнительную простоту CO_2 лазера, достигнутый к настоя-