Письма в ЖТФ, том 14, вып. 11 12 июня 1988 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИОНОВ В АЗИМУТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ЦИРКУЛИРУЮЩЕМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

Н.Н. Наугольный

Накопление ионов на магнитной дорожке циркулирующего электронного пучка приводит к ряду нежелательных эффектов, в частности, к уменьшению предельного пространственного заряда и плотности накопленного тока.

Один из известных способов ослабления влияния ионного фона состоит в создании дополнительных зон неустойчивости благодаря низкочастотной модуляции профиля плотности электронного пучка. Положительный эффект наблюдался экспериментально на фотонной фабрике КЕК [1] в том случае, когда некоторое число сепаратрис фазового движения оставалось незаполненным электронами.

Однако, аналитическое исследование этого вопроса проводилось в рамках весьма ограниченных моделей. Например, в работе [2] рассматривалось одночастичное приближение. В работе [3] учтена экранировка ионного облака, но оставлены без внимания его дисперсионные свойства. Последнее обстоятельство приводит к физически некорректному результату – обратной зависимости степени компенсации от плотности электронного пучка при малых токах. В этой связи возникает необходимость в построениях, более адекватно описывающих реальный процесс накопления ионов.

Будем исходить из гидродинамической системы уравнений для плотности заряда ρ_i и тока $\vec{j}$ ионов:

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \tag{1}$$

$$m_i \partial_t \vec{j} + \nabla(\mathcal{E}_i \rho_i) + e_i \rho_i \nabla \varphi = 0, \tag{2}$$

$$\Delta \varphi = -4\pi(\rho_i - \rho_e), \tag{3}$$

где $m_i, e_i, \mathcal{E}_i$ – масса, заряд и температура ионов, φ – потенциал, формирующий ионный остов. Плотность заряда ρ_e электронов будем считать заданной функцией координат $\vec{r}$ и времени t. Исключая из (1–2), после линеаризации системы получим уравнение эллиптического типа относительно ρ_i :

$$\partial_t^2 \rho_i + \frac{\mathcal{E}_i}{m_i} \Delta \rho_i + (\omega_{ei}^2 - \omega_i^2)\rho_i = 0, \tag{4}$$

в котором $\omega_i = (4\pi e_i \rho_i m_i^{-1})^{1/2}$ – ионная и $\omega_{ei} = (4\pi e_i \rho_e m_i^{-1})^{1/2}$ – „гибридная" ленгмюровские частоты.

С целью дальнейших упрощений пренебрежем слабой азимутальной модуляцией плотности ионов по сравнению с неоднородностью по поперечным координатам. Применяя к (4) интегральное преобразование Фурье $\rho_{i\vec{k}_\perp} = \int d\vec{r} \rho_i e^{i\vec{k}_\perp \vec{r}}$ будем иметь

$$\ddot{\rho}_{i\vec{k}_\perp} + \omega^2 \rho = 0, \quad \omega^2 = \omega_{ei}^2 - \omega_i^2 - \mathcal{E}_i K_\perp^2 m_i^{-1}. \tag{5}$$

Рассмотрим модель ступенчатого электронного пучка, состоящего из последовательности импульсов длительности τ_e, с частотой следования τ_0^{-1}. Уравнение (5) удобно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \rho_{i\vec{K}_\perp} \\ \dot{\rho}_{i\vec{K}_\perp} \end{pmatrix}_f = T \begin{pmatrix} \rho_{i\vec{K}_\perp} \\ \dot{\rho}_{i\vec{K}_\perp} \end{pmatrix}_i , \tag{6}$$

где $T = T_d \cdot T_f$, а явный вид матриц перехода T_d, T_f есть

$$T_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \omega^{-1}\sin\varphi \\ -\omega\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad T_d = \begin{pmatrix} ch\,\psi & \omega_d^{-1} sh\,\psi \\ \omega_d sh\,\psi & ch\,\psi \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь $\omega_d^2 = \omega_i^2 + \mathcal{E}_i K_\perp^2 m_i^{-1}$, аргументы тригонометрических функций равны соответственно $\varphi = \omega\tau_e$, $\psi = \omega_d \tau_0$. Пользуясь (6), (7), выпишем условие устойчивости ионов ($|S_p T| \leq 2$):

$$\left| re\left(1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{\omega_d^2 - \omega^2}{\omega\omega_d} \cos(\varphi + i\psi)\right)\right| \leq 1. \tag{8}$$

Для произвольных значений φ и ψ это трансцендентное неравенство нужно решать численными методами. В случае, когда электронный пучок представляет собой последовательность коротких сгустков достаточно низкой плотности с высокой частотой следования, так что $|\varphi + i\psi| \ll 1$, из (8) с точностью до членов порядка φ^2, ψ^2 получаем

$$\left| 2 + (\omega_d^2 \tau_0 - \omega^2 \tau_e)(\tau_e + \tau_0) \right| \leq 2. \tag{9}$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \omega^2\tau_e - \omega_d^2 \tau_0 \geq 0, & (10) \\ (\omega^2\tau_e - \omega_d^2 \tau_0)(\tau_e + \tau_0) \leq 4, & (11) \end{cases}$$

в которой наглядно раскрывается роль кулоновского взаимодействия и температуры ионов. Объемный заряд ионов экранирует „электронную линзу", облегчая выполнение условия (11), единственного в одночастичном приближении ($\omega_d = 0$) (см. [2]). С другой стороны, по мере накопления ионов растет дефокусирующая сила расталкивания между ними. Раскрывая неравенство (10), найдем выражение для максимального достижимого коэффициента компенсации электронного пучка по плотности заряда

$$\varkappa = \frac{\rho_i}{\rho_e} \leq \frac{\tau_e}{\tau_\perp} - \frac{\pi \mathcal{E}_i}{\sigma_{i\perp}^2 e_i \rho_e}, \tag{12}$$

где $\tau_\perp = \tau_e + \tau_0$. Мы также положили $K_\perp^2 \approx \frac{4\pi^2}{\sigma_{i\perp}^2}$, где $\sigma_{i\perp}^2$ – площадь поперечного сечения ионного остова.

Последний результат позволяет сформулировать очень простой вывод: в рамках рассматриваемого приближения степень компенсации меньше отношения протяженности электронного сгустка к длине минимального периода профиля плотности циркулирующего пучка. В частности, при $\tau_0 = 0$ (однородный пучок) коэффициент компенсации меньше единицы из-за температурных эффектов. Впрочем, этот результат может быть получен непосредственно из энергетических соображений.

В случае пучка произвольной плотности задача сводится к отысканию спектра уравнения Хилла. Применительно к циклическим ускорителям эта задача подробно исследована и изложена в книге [4], и мы не будем на ней останавливаться.

Отметим, что для практических оценок представляется достаточным ограничиться простыми дискретными моделями типа рассмотренной выше, если принять во внимание значительный произвол в определении параметров ионного остова.

Литература

[1] Sakanaka S., Izawa M., Kobayakawa H. and Kobayashi M. – Nuclear Instrum. and Methods, 1987, v. A256, p. 184–188.
[2] Morton M.Q. – Nuclear Instrum. and Mothods, 1986, v. A243, p. 278–280.
[3] Sakanaka S. The stability of ions in partially filled mode operation in the electron storage ring: KEK 86-17, 1986.
[4] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1962, с. 345.

Харьковский физико-технический
институт АН УССР

Поступило в Редакцию
29 января 1988 г.