Письма в ЖТФ, том 14, вып. 9 12 мая 1988 г.

# ТОК ЧЕРЕЗ ДЕФОРМИРУЕМЫЙ ПЬЕЗОКОНДЕНСАТОР

В.А. Исупов

Если в радио- или электросхему между ее компонентами наряду с электрическим и магнитным ввести также механическое взаимодействие, поведение радиосхемы изменится [1]. Новые черты поведения когда-нибудь смогут найти применение, а сейчас они просто интересны. Например, оказалось, что пьезоконденсаторы, входящие в такую схему, могут обладать отрицательной или бесконечной эффективными емкостями. Правда, в работе [1] питание пьезоконденсатора осуществлялось от источника заряда (заряженного конденсатора). В данной же работе рассматривается случай, когда питание осуществляется от источника напряжения.

В работе [1] рассматриваются два механически связанных пьезоконденсатора: деформирующий ($C_{Дщ}$) и деформируемый ($C_{ДМ}$). Для осуществления механической связи трубчатый конденсатор $C_{ДМ}$ может быть вклеен в трубчатый конденсатор $C_{Дщ}$ или же два диска $C_{ДМ}$ (два – для симметрии) могут быть вклеены между двумя дисками $C_{Дщ}$. Напряжение на $C_{ДМ}$ создается за счет поступления заряда $Q^{э}$ от конденсатора $C$, заряженного до напряжения $V_0$ и за счет пьезозаряда $Q^{пэ}$, вызванного пьезодеформацией конденсатора $C_{Дщ}$, на который подается напряжение, пропорциональное $V_0$, и который деформирует пьезоконденсатор $C_{ДМ}$. Поскольку $Q^{э} \sim V_0$ и $Q^{пэ} \sim V_0$, напряжение на $C_{ДМ}$ также пропорционально $V_0$, что позволяет рассматривать коэффициент пропорциональности между напряжением и зарядом на $C_{ДМ}$ как эффективную емкость ($C^*_{ДМ}$). $Q^{пэ} = KV_0$ и может быть как меньше, так и больше $Q^{э}$. Знак $K$ может быть и положительным, и отрицательным в зависимости от знака напряжения на $C_{ДМ}$ и $C_{Дщ}$. Если $K = C_{ДМ}$, пьезозаряд создает на $C_{ДМ}$ напряжение $V_0$. Тогда и $C_{ДМ}$, и заряжающий конденсатор $C$ находятся под одинаковым напряжением $V_0$, и подсоединение $C$ к $C_{ДМ}$ не ведет к изменению напряжения на $C$. Это означает, что $C^*_{ДМ} = 0$. Если $K = -C_{ДМ}$, то $Q^{пэ} = KV_0 = -CV_0$ и при подсоединении $C$ и $C_{ДМ}$ весь его заряд уходит на компенсацию $Q^{пэ}$, и напряжение на $C$ становится равным нулю. Это значит, что $C^*_{ДМ} = \infty$. При $K > C_{ДМ}$ пьезонапряжение на $C_{ДМ}$ больше $V_0$ и при подсоединении заряжающего конденсатора $C$ этот конденсатор не разряжается на $C_{ДМ}$, а подзаряжается от него. Это соответствует $C^*_{ДМ} < 0$. Здесь для ясности изложения мы разделили во времени процессы возникновения $Q^{пэ}$ и $Q^{э}$, хотя в работе [1] они одновременны.

Теперь перейдем к случаю питания конденсаторов от источника напряжения (схема – на рисунке). Пьезоконденсатор $C_{Дщ}$ обозначен на схеме как обычный конденсатор с добавлением стрелки, исходящей из конденсатора. У $C_{ДМ}$ эта стрелка „входит" в конденсатор.

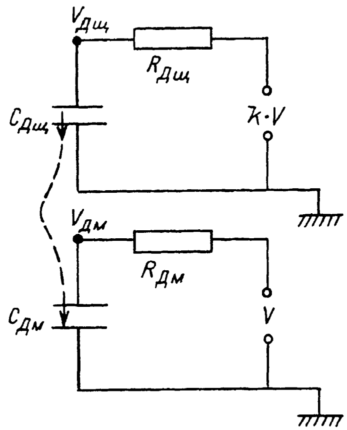


Схема системы деформирующего и деформируемого пьезоконденсаторов, питаемых от источника напряжения.

Механическая связь показана штриховой линией от стрелки до стрелки. Указанные в схеме $R_{Дш}$ и $R_{Дм}$ учитывают все сопротивления и диэлектрические потери в соответствующих цепях. На Дщ цепь подается напряжение $kV$, где $k$ – постоянный коэффициент, который является одним из сомножителей, определяющих величину K. В дальнейшем для простоты расчетов обозначим в формулах: $C_{Дм} = C$, $Q_{Дм} = Q$, $R_{Дм} = R$, $\tau_{Дм} = RC = \tau$.

Рассмотрим ток зарядки $C_{Дм}$ при включении постоянного напряжения $V$. При отсутствии механической связи (K = 0) напряжение $V^э_{Дм}$ менялось бы со временем как

$$V^э_{Дм} = V(1 - e^{-t/\tau}). \qquad (1)$$

Однако одновременно на $C_{Дм}$ возникает пьезозаряд

$$Q^{пэ} = KV_{Дщ}(1 - e^{-t/\tau_{Дщ}}). \qquad (2)$$

Приращение заряда $dQ$ на $C_{Дм}$ равно приращению пьезозаряда $dQ^{пэ}$ плюс заряд, принесенный через сопротивление $R$ (т.е. $Idt$):

$$dQ = Idt + dQ^{пэ}, \qquad (3)$$

где

$$I = (V - V_{Дм})/R = (V/R) - (Q/\tau). \qquad (4)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$dQ/dt + Q/\tau = V/R + (KV/\tau_{Дщ})e^{-t/\tau_{Дщ}}, \qquad (5)$$

решение которого имеет вид:

$$Q = (V\tau/R)(1 - e^{-t/\tau}) + [KV\tau/(\tau_{Дщ} - \tau)](e^{-t/\tau_{Дщ}} - e^{-t/\tau}). \qquad (6)$$

Поскольку $V_{Дм} = Q/C$, из (4) и (6) получаем:

$$I = (V/R)e^{-t/\tau} - [KV/(\tau_{Дщ} - \tau)](e^{-t/\tau_{Дщ}} - e^{-t/\tau}). \qquad (7)$$

Если $\tau_{Дш} \neq 0$, а $\tau = 0$, зарядка $C_{ДМ}$ от источника осуществляется мгновенно и при $t = 0$ говорить о токе не имеет смысла, а при $t > 0$ ток $I = -(KV/\tau_{Дш})e^{-t/\tau_{Дш}}$ определяется только изменением пьезозаряда. Если при этом К = 0, $I = 0$.

Если $\tau_{Дш} = 0$, а $\tau \neq 0$, то $I = (V/R)\left[1 - (K/C)\right] e^{-t/\tau}$. Ток линейно зависит от К, равен нулю при К = С, положителен при К < С (т.е. $C^*_{ДМ} > 0$) и отрицателен при К > С (т.е. $C^*_{ДМ} < 0$). Видно, что в данном случае $C^*_{ДМ}$ при К = –С не обращается в бесконечность.

Если $\tau = \tau_{Дш} \neq 0$, в (7) появляется неопределенность типа 0/0. Раскрывая ее, получаем $I = (V/R)[1-(Kt)/(C\tau)]e^{-t/\tau}$.
При К > 0 ток со временем возрастает от нуля, убывает, меняет знак при $t = C\tau/K$ и при $t \to \infty$ стремится к нулю (пока $V^{э}_{ДМ} + V^{пэ}_{ДМ} < V$ ток положителен, а когда эта сумма становится больше $V$, ток отрицателен). Ясно, что при $\tau_{Дш} = \tau = 0$ все процессы совершаются при $t = 0$, а при $t > 0$, когда $e^{-t/\tau} = 0$, ток отсутствует при любом К.

Перейдем теперь к переменному напряжению $V = V_0 e^{i\omega t}$. Скачок напряжения в момент $t = \theta$ будет равен $dV(\theta) = i\omega V_0 e^{i\omega\theta} d\theta$. В момент $t$ напряжение от этого скачка на $C_{Дш}$ будет равно $dV_{Дш} = i\omega V_0 e^{i\omega\theta}(1-e^{-(t-\theta)/\tau_{Дш}})$. Интегрируя по $\theta$ от 0 до $t$ и дифференцируя по $t$, получаем $dV_{Дш} = [i\omega V_0/(1+i\omega\tau_{Дш})](e^{i\omega t} - e^{-t/\tau_{Дш}})$. Учитывая, что $dQ^{пэ}$ пропорционально $dV_{Дш}$, приходим к уравнению

$$dQ/dt + Q/\tau = (V_0 e^{i\omega t})/R + \left[i\omega K V_0/(1+i\omega\tau_{Дш})\right](e^{i\omega t} - e^{-t/\tau_{Дш}}). \quad (8)$$

Его решение имеет вид:

$$Q = \left[\frac{V_0}{R} + \frac{KV_0(i+\omega\tau_{Дш})}{1+\omega^2\tau^2_{Дш}}\right]\frac{\tau(1-i\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}\left(e^{i\omega t} - e^{-t/\tau}\right) - \omega K V_0 \frac{i+\omega\tau_{Дш}}{1+\omega^2\tau^2_{Дш}}\left(e^{-t/\tau_{Дш}} - e^{-t/\tau}\right). \quad (9)$$

Учитывая, что $V_{ДМ} = Q/C$, и используя (4), найдем установившиеся активный и реактивный токи:

$$I_a = \omega V_0 e^{i\omega t}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} C - \frac{\omega(\tau - \tau_{Дш})}{(1+\omega^2\tau^2)(1+\omega^2\tau^2_{Дш})} K, \quad (10)$$

$$I_r = \omega V_0 e^{i\omega t}\frac{1}{1+\omega^2\tau^2} C - \frac{1-\omega^2\tau\tau_{Дш}}{(1+\omega^2\tau^2)(1+\omega^2\tau^2_{Дш})} K. \quad (11)$$

$I_r$ можно также записать через $C^*_{ДМ}$ как $I_r = \omega C^*_{ДМ} V_0 e^{i\omega t}/(1+\omega^2\tau^2)$ (как бы не зная, что цепь Дш имеется вообще). Тогда, учитывая (11), получим

$$C^*_{ДМ} = C - \left[(1-\omega^2\tau\tau_{Дш})/(1+\omega^2\tau^2_{Дш})\right] K, \quad (12)$$

откуда видно, что $C^*_{Дм} = \infty$ при любых значениях К.

Если $\tau_{Дш} = 0$, $\tau \neq 0$, то $I_a = A_1 (C - K)$, $I_r = B_1 (C - K)$, где $A_1$ и $B_1 = f(\omega, \tau, t)$. При К = С $I_a = I_r = 0$, $C^*_{Дм} = 0$. При $K < C$ $I_a$ и $I_r$ положительны ($C^*_{Дм} > 0$), при $K > C$ – отрицательны (т.е. сдвинуты по фазе на 180°) и $C^*_{Дм} < 0$.

Если $\tau_{Дш} = 0$, $\tau = 0$, то $I_a = 0$ при всех $\omega$, а $I_r \sim (C - K)$. При $K = C$ $I_r = 0$ при всех частотах. При $K < C$ $I_r > 0$, при $K > C$ $I_r < 0$.

При $\tau = 0$, $\tau_{Дш} \neq 0$ $I_a = -A_2 K$, $I_r = B_2 [C(1 + \omega^2 \tau^2_{Дш}) - K]$. Видно, что $I_r$ меняет знак при $K/C = 1 + \omega^2 \tau^2_{Дш}$, т.е. этот ток меняет знак при прохождении частоты через значение $\omega_0 = (1/\tau_{Дш}) \sqrt{(K/C) - 1}$.

Эквивалентна ли отрицательная эффективная емкость индуктивности?

Рассмотрим параллельное соединение положительной емкости $C_o$ и отрицательной емкости $C^*_{Дм} = -C_o$. Суммарная емкость $C_\Sigma = C^*_{Дм} + C_o = 0$ при всех частотах. Если бы отрицательная емкость была эквивалентна индуктивности, ток обращался бы в нуль только при одной частоте. Однако, хотя ток от источника равен нулю, ток в контуре $C_{Дм}$–$C_o$ так же не равен нулю, как и в случае резонанса в емкостно-индуктивном контуре. Этот ток будет вырабатываться пьезоконденсатором $C_{Дм}$ за счет механической связи с $C_{Дш}$.

Рассмотрим последовательное соединение $C_o$ и $C^*_{Дм} = -C_o$. При этом $1/C_\Sigma = 1/C^*_{Дм} + 1/C_o$, т.е. $C_\Sigma = \infty$ при всех $\omega$. Представим себе цепь а – $C_{Дм}$ – в – $C_o$ – с, где а, в и с – контакты. В точках а и с напряжение одинаково и, если оно равно нулю в точке а, то оно равно нулю и на контакте с. В точке в оно меняется с частотой питающего напряжения.

Отметим, что при $\tau_{Дш} \neq 0$ подобие резонанса в системе $C^*_{Дм}$–$C_o$ все же существует. Это происходит при $C^*_{Дм} = -C_o$. Как видно из (12), это равенство выполняется при $\omega_p^2 = (K - C_o - C_{Дм}) / [\tau^2_{Дш} (C_{Дм} + C_o) - \tau \tau_{Дш} K]$. Отличие $LC$-контура будет заключаться в том, что данный „резонанс" связан с дисперсией в цепи Дш.

Литература

[1] Исупов В.А. – Письма в ЖТФ, 1987, т. 13, в. 8, с. 500–504.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе АН СССР,
Ленинград

Поступило в Редакцию
16 декабря 1987 г.