скорости переноса энергии в волновом пакете от параметра m, определяемого граничными условиями для случая точного резонанса $\varphi_K = \frac{\pi}{2}$, $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $m = \frac{B}{C} \leqslant 1$. Для $m > 1$ волны 2 и 3 меняются местами. Участок на кривой $v_e(m)$, где $\frac{dv_e}{dm}$ неограниченно возрастает, исчезает при $\frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega_2}{v_2} + \frac{\omega_3}{v_3}$. Таким образом, скорость распространения энергии в квадратично-нелинейной среде изменяется в интервале, определяемом минимальной и максимальной групповыми скоростями волн, присутствующих в пакете, в зависимости от начального распределения энергии между ними.

Литература

[1] Вайнштейн Л.А. - УФН, 1976, т. 118, № 2, с. 339-367.

[2] Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспсрсных системах. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 136 с.

[3] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

[4] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

[5] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступило в Редакцию
22 сентября 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 8 26 апреля 1988 г.

ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННЫЕ МОНОКРИСТАЛЛЫ

В.В. Белошицкий, В.А. Старостин

При высоких энергиях пробеги частиц в веществе возрастают до макроскопических размеров. Одновременно растут затраты на управление траекторией частиц с помощью магнитных полей. Поэтому представляет интерес использование кристаллов для поворота пучков частиц [1]. Первые эксперименты показали практическую осуществимость этого метода, однако теоретически было рассмотрено лишь действие центробежного потенциала, связанного с искривлением траектории частицы [2]. Такое рассмотрение справедливо лишь для тонкого кристалла. Практически же важно прохождение через толстый кристалл для увеличения угла поворота. В настоящей работе развита теория, позволяющая расчитывать интенсивность пучка, проходящего через деформированный кристалл значительной толщины.

Как известно, в кулоновском газе на движение частицы оказывают значительно большее влияние дальние взаимодействия по сравнению со столкновениями в ближней зоне. Но для большинства дальних взаимодействий углы столкновения малы, что позволяет описывать прохождение пучка частиц уравнением Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{P}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}-\vec{\nabla}U(\vec{r})\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=-\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\cdot\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right)f+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial P_i\partial P_j}\left(\frac{\Delta P_i\Delta P_j}{\Delta t}\right)f, \quad (1)$$

где f – функция распределения по времени t, координатам $\vec{r}$ и импульсам $\vec{P}$; m – масса частицы; U – потенциальная энергия. Это уравнение может быть получено из уравнения Больцмана разложением последнего в ряд Тейлора около нулевого угла столкновения. Отметим, что область, где справедливо уравнение (1) – это подобласть применимости уравнения Больцмана, которое учитывает столкновения при всех значениях прицельного параметра. Упомянутый вывод уравнения (1) опирается на дальнодействие кулоновского взаимодействия. Существует и другой вывод уравнения Фоккера–Планка, основанный на уравнении Чепмена–Колмогорова, т.е. уравнение (1) является весьма общим.

Применяя уравнение (1) для описания прохождения быстрых заряженных частиц через монокристалл с плоскостями упруго-деформированными в поперечном к ним направлении по закону $x_a(z)$, получим:[1]

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{P_x}{mv}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{dU(x-x_a(z))}{dx}\frac{\partial f}{\partial P_x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}\left(\frac{\Delta P_x^2}{\Delta z}\right)f, \quad (2)$$

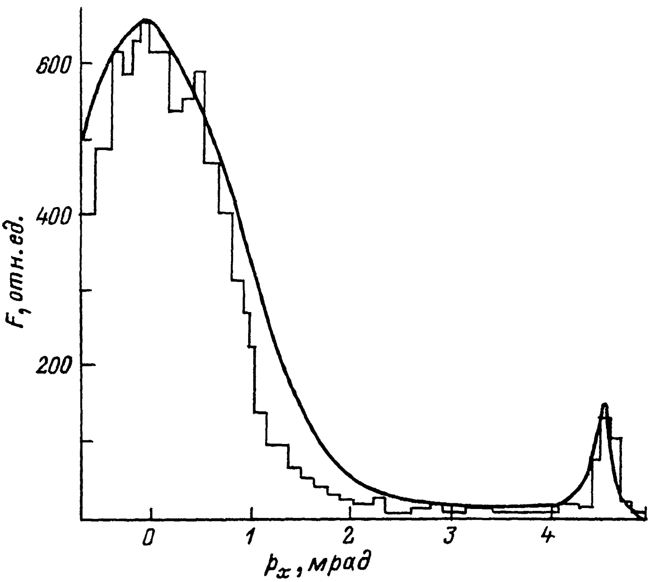
где v – скорость частицы. После замены переменных

$$\begin{cases} z'=z \\ x'=x-x_a(z) \\ P_x'=P_x-mv\dfrac{dx_a(z)}{dz} \end{cases}$$

в уравнении (2) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{P_x}{mv}\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{1}{v}\frac{dU}{dx}+mv\frac{d^2x_a}{dz^2}\right)\frac{\partial f}{\partial P_x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}\left(\frac{\Delta P_x^2}{\Delta z}\right)f, \quad (3)$$

[1] Так как время пролета мало по сравнению с периодом упругих колебаний, то задача является стационарной.



Экспериментальная гистограмма [5] и теоретическая кривая углового распределения 8.4 ГэВ протонов, прошедших изогнутый на 4.5 мрад кристалл кремния толщиной 2 см.

где мы опустили штрих у новых переменных.

Переходя к поперечной энергии $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + U_{эфф}$, где $U_{эфф} = U(x) + mv^2 x \frac{d^2 x_a}{dz^2}$ есть эффективный потенциал в криволинейных координатах, преобразуем уравнение (3) к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{p_x}{mv}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2m^2}\frac{\partial}{\partial E_x} p_x \left(\frac{\overline{\Delta p_x^2}}{\Delta z}\right)\frac{\partial}{\partial E_x} p_x f. \tag{4}$$

В случае статистического равновесия, следуя методу, развитому для прямого кристалла в [3], преобразуем (4) к виду:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p_x}\frac{D_x T(p_x)}{p_x}\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{F}{p_x T(p_x)}, \tag{5}$$

где $D_x = \langle 2\frac{\Delta E_x}{\Delta z}(E_x - U_{эфф})\rangle$,

$$\langle A \rangle = \frac{\sqrt{2m}}{T}\int_{x_1}^{x_2}\frac{A\,dx}{\sqrt{E_x - U_{эфф}}}, \tag{6}$$

Эффективность отклонения пучка 8.4 ГэВ протонов кристаллом Si

Начальная угловая расходимость, мрад	Толщина, см	Угол поворота, мрад	Доля отклоненных частиц, %
0.03	1	2.25	25.6
0.03	2	4.5	6.5
0.3	1	2.25	4.6
0.3	2	4.5	1.2
0.3	1	4.5	3.4

x_1 и x_2 – точки поворота; $F(z, p_x)$ – число частиц в канале с поперечной энергией $E_x = \frac{p_x^2}{2}$.

Для надбарьерных частиц движение инфинитно и в этом случае нет статистического равновесия в истинном смысле. Кроме того, происходит изменение их поперечной энергии за счет изгиба и дрейфа частиц поперек кристалла. Для учета дрейфа удобно ввести номер канала n и перейти к относительным координатам $x' = x - nd_p$ и $E_x' = E_x - m v^2 n d_p \, d^2x_a/dz^2$, где d_p – межплоскостное расстояние. Проведя необходимую замену переменных в (4) и интегрируя по x' с учетом $\int f dx' = F$ и $F = \frac{f p_x T}{\sqrt{m}}$, получим окончательное уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + m v d_p \frac{d^2x_a}{dz^2} \frac{\partial}{\partial E_x} \frac{F}{T} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial n} \frac{F}{T} = \frac{\partial}{\partial E_x} T \left\langle \frac{p_x^2}{2} \frac{\Delta p_x^2}{\Delta z} \right\rangle \frac{\partial}{\partial E_x} \frac{F}{T},$$

где мы опять опустили штрих у новых переменных. Третье слагаемое описывает дрейф по x со средней скоростью $\frac{d_p}{T}$, а второе – дрейф по E_x со средним центробежным ускорением $v^2 \frac{d^2x_a}{dz^2}$. Считая поперечный размер кристалла малым по сравнению с радиусом его кривизны, дрейфом пучка надбарьерных частиц поперек кристалла можно пренебречь. С учетом этих приближений, кинетическое уравнение для квазиканалированных (надбарьерных) частиц имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{D_x T}{p_x} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{F}{p_x T} + d_p m v \frac{d^2x_a}{dz^2} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{F}{p_x T}, \qquad (7)$$

причем коэффициент D_x вычисляется по той же формуле (6). Это уравнение существенно отличается от использованного в работе [4]. В том виде, который приведен в [4], уравнение не удовлетворяет условиям сохранения числа частиц и однородности стационарного распределения, которым удовлетворяет исходное неусредненное уравнение Фоккера-Планка (1).

Уравнения (5) и (7) необходимо решать совместно. Так как при отражении от центробежного потенциального барьера квазиканалированных частиц происходит смена знака p_x, то следует произвести сшивание числа частиц с отрицательными F_- и положительными F_+ значениями p_x в точке $|p_x|=\sqrt{2U_m}$, где U_m – высота потенциального барьера: $F_+ = F_-$. Кроме того, необходимо произвести сшивание диффузионного потока при переходе из надбарьерного движения в подбарьерное:

$$\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{F}{p_x T}=\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{(F_+ + F_-)}{p_x T}.$$

Численное решение было получено для условий эксперимента [5]. Как видно из рисунка, вычисленное теоретическое распределение прошедших протонов хорошо согласуется с экспериментом. При небольшом начальном угловом разбросе пучка (меньше критического угла Линдхарда) происходит захват большей части пучка в режим каналирования и поворот ее на значительный угол в случае достаточно толстого кристалла (см. таблицу).

Из изложенной теории следует, что возможно эффективное управление пучками положительных частиц (позитронов, мюонов μ^+, π^+ мезонов, протонов и других) высокой энергии при помощи изогнутых кристаллов.

Литература

[1] Tsyganov E.N. Batavia, 1976, Fermilab TM-682.
[2] Carrigan R.A., Gibson W.M. In „Coherent Radiation Sources" ed. by A.W. Saenz and H. Uberall, Berlin, Springer-Verlag, 1985. 30 p.
[3] Белошицкий В.В., Кумахов М.А. – ЖЭТФ, 1972, т. 62, в, 3, с. 1144-1155.
[4] Кудряшов Н.А., Петровский С.В., Стриханов М.Н. – Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, в. 24, с. 1515-1522.
[5] Elishev A.F. et al. – Phys. Lett., 1979, v. 88b, N 3-4, p. 387-391.

Поступило в Редакцию
26 октября 1987 г.