1989 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 59, в. 12
1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, N 12

01; 10

МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОТОК ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Д. Зюзин

Исследуется движение отдельных заряженных частиц в стационарном винтовом магнитном поле. Показана возможность существования моноэнергетического потока невзаимодействующих заряженных частиц в винтовом магнитном поле.

Введение

Центробежный дрейф заряженных частиц пучка, движущегося в искривленном магнитном поле, при определенных условиях приводит к смещению пучка как целое. В [1] показана возможность использования эффекта центробежного дрейфа для формирования пространственной (винтовой) траектории пучка в стационарном винтовом магнитном поле. При этом было найдено, что в пучке с энергетическим разбросом поперечные колебания частиц устойчивы лишь при достаточно большой плотности частиц. В то же время предполагалось, что ток пучка мал по сравнению с альфвеновским значением 17 $\beta\gamma$ кА, где $\beta=v/c$, v — скорость пучка, c — скорость света, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор.

В данной работе определяются условия поперечной устойчивости моноэнергетического потока заряженных частиц в отсутствие собственных сил, перемещающегося вдоль винтовой линии в стационарном винтовом магнитном поле.

Уравнения движения в натуральной системе координат

Для описания движения частиц используется натуральная система координат [2]. Независимой переменной является длина σ координатной линии, вдоль которой перемещается трехгранник $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{b}$, сопровождающий частицу. Векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — единичные орты, направленные по главной нормали и бинормали к координатной линии; вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по касательной. Поперечное движение описывается в координатах ξ (перемещение вдоль $\mathbf{n}$) и ζ (перемещение вдоль $\mathbf{b}$). В точках, лежащих на координатной линии, составляющие $B_{n,\,b}$ магнитного поля

$$\mathbf{B}=B_n\mathbf{n}+B_\tau\boldsymbol{\tau}+B_b\mathbf{b} \tag{1}$$

удовлетворяют требованиям

$$B_n=0, \tag{2.1}$$

$$B_b=-(cp/e)\,k, \tag{2.2}$$

где p — импульс частицы, e — заряд частицы, $k=k(\sigma)$ — кривизна координатной линии.

Уравнения движения частицы в первом приближении найдем, используя разложение гамильтониана [2],

$$H^* = \frac{1}{2p}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{p}{2}\left[\left(-\frac{\partial\Omega_b}{\partial\xi} + \frac{1}{4}\Omega_\tau^2 + k^2\right)\xi^2 + \left(\frac{\partial\Omega_n}{\partial\zeta} + \frac{1}{4}\Omega_\tau^2\right)\zeta^2\right] +$$

$$+ \frac{p}{2}\left(-\frac{\partial\Omega_b}{\partial\zeta} + \frac{\partial\Omega_n}{\partial\xi}\right)\xi\zeta + \left(\varkappa + \frac{1}{2}\Omega_\tau\right)(p_3\xi - p_1\zeta), \tag{3}$$

где $(\xi,\ p_1)$ и $(\zeta,\ p_3)$ — канонические сопряженные пары, $\varkappa = \varkappa(\sigma)$ — кручение координатной линии, $\Omega_{n,\tau,b} = (eB_{n,\tau,b})/(cp)$, причем как $\Omega_{n,\tau,b}$, так и значения производных этих величин здесь и в дальнейшем вычисляются при $\xi = \zeta = 0$, т. е. на координатной линии.

Исключая из канонической системы переменные $p_{1,3}$, получим уравнения второго порядка, описывающие поперечное движение частиц,

$$\xi'' + A_\xi(\sigma)\xi + B_\zeta(\sigma)\zeta + \Omega(\sigma)\zeta' = 0, \tag{4.1}$$

$$\zeta'' + A_\zeta(\sigma)\zeta + B_\xi(\sigma)\xi - \Omega(\sigma)\xi' = 0, \tag{4.2}$$

где

$$A_\xi = k^2 - (\varkappa^2 + \varkappa\Omega_\tau) - \frac{\partial\Omega_b}{\partial\xi}; \tag{5.1}$$

$$A_\zeta = -(\varkappa^2 + \varkappa\Omega_\tau) + \frac{\partial\Omega_n}{\partial\zeta}; \tag{5.2}$$

$$B_\zeta = \frac{1}{2}\left(\Omega'_\tau + \frac{\partial\Omega_n}{\partial\xi} - \frac{\partial\Omega_b}{\partial\zeta}\right) + \varkappa'; \tag{5.3}$$

$$B_\xi = \frac{1}{2}\left(-\Omega'_\tau + \frac{\partial\Omega_n}{\partial\xi} - \frac{\partial\Omega_b}{\partial\zeta}\right) - \varkappa'; \tag{5.4}$$

$$\Omega = 2\varkappa + \Omega_\tau. \tag{5.5}$$

Здесь и ниже штрихами обозначается дифференцирование по σ.

Изменение во времени t продольной координаты σ описывается уравнением [2]

$$\frac{d\sigma}{dt} = v\left[(1 + k\xi)^2 + (\xi' + \varkappa\zeta)^2 + (\zeta' - \varkappa\xi)^2\right]^{-1/2}. \tag{6}$$

Удерживая в (6) только члены первого порядка, получим более простое уравнение

$$\int\limits_{\sigma_н}^{\sigma_к} \frac{d\sigma}{1 - k\xi(\sigma)} = v(t_к - t_н), \tag{7}$$

где индексы н и к обозначают начальное и конечное состояния соответственно, а $\xi(\sigma)$ — решение системы (4).

Координатная линия в винтовом магнитном поле

В винтовом магнитном поле в качестве координатной линии естественно выбрать винтовую линию, ось которой совпадает с осью симметрии магнитного поля. Кривизну и кручение представим в виде функции от угла захода φ винтовой линии и радиуса R цилиндра, на поверхность которого она навивается,

$$k = \frac{\cos^2\varphi}{R}, \tag{8}$$

$$\varkappa = \frac{\sin 2\varphi}{2R}. \tag{9}$$

Координаты частицы в цилиндрической системе координат $r,\ \theta,\ z$ и $\xi,\ \sigma,\ \zeta$ в натуральной системе с винтовой координатной линией связаны соотношениями

$$r\cos(\theta_\sigma - \theta) = R + \xi; \tag{10.1}$$

$$r\sin(\theta_\sigma - \theta) = \zeta\sin\varphi; \tag{10.2}$$

$$z = \sigma\sin\varphi + \zeta\cos\varphi, \tag{10.3}$$

где $\theta_\tau=(\cos\varphi/R)\,\sigma$ — азимутальная координата вершины трехгранника $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$.

Составляющие магнитного поля (1) выражаются в виде линейной комбинации проекций B на орты $\mathbf{e}_{r,\theta,z}$ цилиндрической системы координат следующим образом:

$$B_n=\cos(\theta-\theta_\sigma)\,B_r-\sin(\theta-\theta_\sigma)\,B_\theta; \tag{11.1}$$

$$B_\tau=\cos\varphi\sin(\theta-\theta_\sigma)\,B_r+\cos\varphi\cos(\theta-\theta_\sigma)\,B_\theta+\sin\varphi B_z; \tag{11.2}$$

$$B_b=-\sin\varphi\sin(\theta-\theta_\sigma)\,B_r-\sin\varphi\cos(\theta-\theta_\sigma)\,B_\theta+\cos\varphi B_z. \tag{11.3}$$

Винтовое магнитное поле $B_r=0$, $B_\theta=B_\theta\,(R)\,(R/r)$, $B_z=\mathrm{const}$, как легко видеть из (11.1), удовлетворяет требованию (2. 1). Условие (2. 2) приводит к связи между параметрами R, φ, $B_\theta\,(R)$, B_z и составляющими импульса $p=(p_\theta^2+p_z^2)^{1/2}$ равновесной частицы (частицы с $\xi_н=\zeta_н=\xi'_н=\zeta'_н=0$)

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{B_\theta(R)}\left(B_z+\frac{cP}{eR}\cos\varphi\right), \tag{12}$$

где $\operatorname{tg}\varphi\equiv p_z/p_\theta$.

Это уравнение определяет координатную линию σ_p. Таким образом, осуществляется привязка трехгранника $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$ и системы уравнений (4) к исследуемой частице.

Поперечная устойчивость моноэнергетического потока заряженных частиц

Анализ системы (4) упрощается, если использовать дифференциальные соотношения между составляющими $B_{n,b}$ магнитного поля, вытекающие из уравнений Максвелла, которые на координатной линии ($\xi=\zeta=0$) можно записать в виде следующих уравнений:

$$\frac{\partial B_n}{\partial\xi}=-\frac{\partial B_b}{\partial\zeta}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial\zeta}=\frac{\partial B_b}{\partial\xi}. \tag{14}$$

Соотношение (13) получено с учетом азимутальной симметрии магнитного поля и (2. 1), а (14) справедливо для произвольного магнитного поля. Уравнение (14) позволяет установить следующую связь между $A_{\xi,\zeta}$:

$$A_\xi+A_\zeta=k^2-2\,(\varkappa^2+\varkappa\Omega_\tau). \tag{15}$$

Непосредственное вычисление коэффициентов показывает, что $A_\zeta=B_{\xi,\zeta}=0$ при любом значении импульса p частицы.

Теперь представим решение системы (4)

$$\xi=\xi_н+\frac{\cos W\sigma}{W}\xi'_н-\frac{\Omega}{W}\left(\frac{1-\cos W\sigma}{W}\right)\zeta'_н-\frac{A_\xi}{W^2}\,(1-\cos W\sigma)\,\xi_н; \tag{16.1}$$

$$\zeta=\zeta_н+\frac{\Omega}{W}\left(\frac{1-\cos W\sigma}{W}\right)\xi'_н+\left(\frac{\Omega}{W}\right)^2\frac{\sin W\sigma}{W}\zeta'_н+$$
$$+\frac{A_\xi}{W^2}\left[(\zeta'_н-\Omega\xi_н)\,\sigma+\xi_н\frac{\Omega}{W}\sin W\sigma\right], \tag{16.2}$$

где $W^2=\Omega^2+A_\xi$.

Из этой записи решений ξ, ζ видим, что поперечные колебания частиц винтового потока устойчивы, если $A_\xi=0$, т. е. устойчивы при выполнении условия

$$k^2=2\,(\varkappa^2+\varkappa\Omega_\tau). \tag{17}$$

При заданных значениях R, B_z, $B_\theta\,(R)$ уравнения (12), (17) определяют угол захода φ_0 устойчивой траектории σ_0

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{B_z}{B_\theta(R)}\left(\frac{\cos^2\varphi_0}{1+\sin^2\varphi_0}\right) \tag{18}$$

и соответствующую величину импульса p_0

$$\frac{cp_0}{eR} = -\frac{2B_z}{\cos\varphi_0\,(1+\sin^2\varphi_0)}\,. \tag{19}$$

При малых значениях $|B_z/B_\theta|$ выражения (18), (19) упрощаются

$$\varphi_0 \simeq -\frac{B_z}{B_\theta(R)}\,; \tag{20}$$

$$\frac{cp_0}{eR} \simeq -2B_z. \tag{21}$$

Итак, поперечное движение частиц моноэнергетического потока с импульсом p_0, движущегося вдоль винтовой линии σ_0, описывается хорошо изученными уравнениями

$$\xi'' + \Omega_0\zeta' = 0; \tag{22.1}$$
$$\zeta'' - \Omega_0\xi' = 0, \tag{22.2}$$

где $\Omega_0 = 2\varkappa(\varphi_0) + \Omega_\tau(p_0, \varphi_0)$ играет роль циклотронной частоты частицы, помещенной в продольное магнитное поле $B_\parallel = (cp_0/e)\,\Omega_0$.

Распределение частиц вдоль оси потока (вдоль σ_0) зависит от начальных условий. Подставив решение $\xi(\sigma)$ системы (22) в уравнение (7), мы найдем, что частицы с начальным углом наклона $\zeta'_н \neq 0$ будут смещаться относительно равновесной частицы вдоль σ_0 на величину $\Delta\sigma_0$, равную

$$\Delta\sigma_0 \sim \frac{k(\varphi_0)}{\Omega_0}\,\zeta'_н\sigma_0^*, \tag{23}$$

где $\sigma_0^* = v_0 t$ — продольная координата равновесной частицы, v_0 — скорость равновесной частицы.

Движение частиц с импульсом $p \neq p_0$

Движение частиц с импульсом $p = p_0 + \delta p$, $|\delta p/p_0| \ll 1$ следует рассматривать в системе координат с углом захода координатной линии, равным $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, где

$$\delta\varphi \simeq \left(\frac{\sin 2\varphi_0}{1+\sin^2\varphi_0}\right)\left(\frac{\delta p}{p_0}\right), \tag{24}$$

при этом коэффициент A_ξ уже не будет равен нулю

$$A_\xi(p_0 + \delta p) \simeq \left(\frac{dA_\xi}{dp}\right)_{p=p_0}\delta p =$$
$$= \frac{1}{R^2}\cos^4\varphi_0\left(\frac{1+5\sin^2\varphi_0}{1+\sin^2\varphi_0}\right)\left(\frac{\delta p}{p_0}\right). \tag{25}$$

Две частицы с импульсами p_0 и $p = p_0 + \delta p$, начав движение вдоль координатной линии σ_0^* из одной точки, лежащей на σ_0, с течением времени разойдутся относительно друг друга. Частица p_0 пройдет вдоль координатной линии расстояние σ_0^*, не отклоняясь в поперечном направлении, а частица p за то же время уйдет от линии σ_0 в направлении бинормали на расстояние

$$\Delta\zeta \sim \delta\varphi\sigma_0^*, \tag{26}$$

сместившись относительно равновесной частицы вдоль линии σ_0 на величину

$$\Delta\sigma_p \sim \left(\frac{\delta v}{v_0} - \frac{k(\varphi_0)}{\Omega_0}\,\delta\varphi\right)\sigma_0^*, \tag{27}$$

где $\delta v = v - v_0$.

Заключение

В настоящее время активно ведутся разработки различных систем транспортировки пучка в продольном магнитном поле. Поэтому в литературе существует много предложений по организации поворота пучка при помощи довольно сложных магнитных систем, создающих комбинированное магнитное поле, включающее тороидальную компоненту. Но независимо от типа магнитной системы практически во всех известных схемах индукция вертикального магнитного поля на поворотных участках выбирается равной $B_z=-cp/eR$, тем самым определяется единый для всех схем тип траектории центра тяжести пучка на повороте (плоское полукольцо). Если же величину B_z уменьшить вдвое в соответствии с (21), то фокусировка частиц пучка может быть обеспечена относительно простой магнитной системой, создающей тороидальное и однородное, без поперечных градиентов, вертикальное магнитные поля. Дисперсию, связанную с разбросом частиц по импульсу, и вертикальное смещение пучка, определяемое углом захода φ_0 (20) винтовой траектории, можно компенсировать при помощи реверса тороидальной составляющей B_θ [3].

Заканчивая обсуждение работы, отметим следующее. Поперечная устойчивость потока заряженных частиц в искривленном магнитном поле представляет собой эффект, который можно не только использовать в устройствах для транспортировки частиц, но и попытаться привлечь для объяснения некоторых физических явлений, протекающих в естественных условиях, в частности в магнитосфере Земли (моноэнергетичности электронных потоков, дискретных форм полярных сияний [4]). Поэтому представляется целесообразным продолжить исследование динамики заряженных частиц в искривленном магнитном поле и в дальнейшем рассмотреть возможность существования устойчивого потока заряженных частиц в реальном геомагнитном поле (дипольном магнитном поле с возмущением).

Автор благодарит С. В. Зюзину за поддержку и постоянную помощь.

Список литературы

[1] *Зюзин В. Д., Коренев И. Л., Юдин Л. А.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 16. С. 977—981.
[2] *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
[3] *Зюзин В. Д.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 3. С. 561—563.
[4] Физика магнитосферы. Сб. докл. М.: Мир, 1972. С. 162—278.

Поступило в Редакцию
12 июля 1988 г.