1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, N 12

01; 08

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО СТЕРЖНЯ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. Г. Бодров, А. А. Семенов

Рассмотрены упругие колебания проводящего стержня при наличии как вне, так и внутри стержня постоянного магнитного поля, параллельного его оси. Для двух случаев (идеально проводящего стержня и диэлектрического стержня с идеально проводящим покрытием) получено дисперсионное уравнение распространения упругих колебаний. Полученные в длинноволновом приближении аналитические зависимости изгибных колебаний от величины магнитного поля в обоих случаях одинаковы.

Дисперсионные уравнения, полученные в работах [1, 2] для упругих колебаний в магнитном поле идеально проводящего, идеально диамагнитного стержня, применимы на практике только в случае сверхпроводника в мейсснеровском состоянии. Для случая нормального проводника или сверхпроводника в смешанном состоянии необходимо учитывать влияние внутреннего магнитного поля. Предлагаемая работа посвящена рассмотрению упругих колебаний проводящего стержня при наличии как вне, так и внутри стержня однородного постоянного магнитного поля, параллельного его оси. Получено дисперсионное уравнение распространения изгибных колебаний.

Постановка задачи и граничные условия

Рассмотрим бесконечный проводящий цилиндрический стержень радиуса r_0, помещенный в однородное постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, параллельное его оси. Положим, что внутри стержня также имеется однородное постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_1$, параллельное $\mathbf{H}_0$, причем $|(H_0^2 - H_1)/8\pi| \ll E$, где E — модуль Юнга материала стержня. Равновесное состояние проводника описывается следующими уравнениями:

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\xi^0 - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\xi^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\xi^0 = \xi_r^0 \mathbf{e}_r + \xi_z^0 \mathbf{e}_z + \xi_\varphi^0 \mathbf{e}_\varphi$ — вектор смещения точек стержня; λ, μ — коэффициенты Ляме; $\mathbf{e}_i$ — единичный орт; σ_{ik}^0 — тензор напряжений. Ось z направлена вдоль оси стержня. Индекс 0 означает, что значения величин относятся к равновесному состоянию.

Граничными условиями для системы уравнений (1. 1) будут ограниченность ξ_0 при $r=0$ и условие непрерывности потока импульса через границу раздела сред, которое в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\sigma_{rr}^0(r_0) - \frac{H_1^2}{8\pi} = -\frac{H_0^2}{8\pi}. \tag{1.2}$$

Решая систему уравнений (1. 1), при учете граничных условий получим следующие характеристики равновесного состояния стержня:

$$\xi_r^0 = -\frac{(\lambda + 2\mu)(H_0^2 - H_1^2)}{16\pi\mu(3\lambda + 2\mu)}\, r,$$

$$\sigma^0_{rr}(r_0)=\sigma_{\varphi\varphi}(r_0)=-\frac{H_0^2-H_1^2}{8\pi},$$

$$\sigma^0_{zz}=\sigma^0_{r\varphi}=\sigma^0_{rz}=\sigma^0_{z\varphi}=0. \tag{1.3}$$

Предположим, что стержень выведен из равновесного состояния и совершает малые гармонические колебания с круговой частотой ω, волновым вектором $\mathbf{k}$, направленным вдоль оси z, и модой m. В этом случае возмущения величины смещения и магнитного поля можно записать в виде

$$\begin{aligned}\xi^*(r,\varphi,z,t)&=\xi^*(r)\exp[i(kz+m\varphi+\omega t)],\\ \mathbf{H}^*(r,\varphi,z,t)&=\mathbf{H}^*(r)\exp[i(kz+m\varphi+\omega t)].\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой обозначены возмущения величин.

Движение проводящей упругой среды в произвольном магнитном поле $\mathbf{H}$ описывается системой уравнений, состоящей из уравнений теории упругости, содержащих пондермоторные силы [3–5],

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\xi-\mu\,\mathrm{rot\,rot}\,\xi-\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}], \tag{1.5}$$

где ρ — плотность среды, и уравнения индукции для движущейся проводящей среды, в котором электрическое поле исключено с помощью закона Ома [6],

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,[\mathbf{vH}]+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость среды, σ — проводимость среды, c — скорость света.

Рассмотрим два предельных случая: 1) идеально проводящий стержень ($1/\sigma=0$ по всему сечению), 2) диэлектрический стержень с идеально проводящим покрытием ($\sigma=0$ при $r<r_0$, $1/\sigma=0$ при $r=r_0$). В этих случаях граничными условиями для системы уравнений (1. 5), (1. 6) являются

$$\text{а)}\ \mathbf{Hn}=0, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, вследствие идеальной проводимости на поверхности, и б) условие непрерывности потока импульса, которому в нашем случае соответствует непрерывность выражения

$$(\sigma_{ik}+T_{ik})\,n_k, \tag{1.8}$$

где $T_{ik}=(1/4\pi)\,H_iH_k-(1/8\pi)\,\mathbf{H}^2\,\delta_{ik}$ — тензор натяжения Максвелла, δ_{ik} — символ Кронекера.

Идеально проводящий стержень

В этом случае при учете (1. 4) после линеаризации система уравнений (1. 5), (1. 6) принимает вид

$$\begin{gathered}\rho\omega^2\xi^*+(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\xi^*-\mu\,\mathrm{rot\,rot}\,\xi^*-\\ -\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}_1\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1^*]=0,\\ H_1^*=\mathrm{rot}\,[\xi^*\mathbf{H}_1]\quad \Delta\mathbf{H}_0^*=0,\\ \mathbf{n}=\mathbf{e}_z-i\left(\mathbf{e}_\varphi\frac{m}{r_0}+\mathbf{e}_zk\right)\xi_r^*(r_0).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь индексы 0, 1 относятся соответственно к полю вне и внутри стержня.

Из первого уравнения системы (2. 1) выразим $\mathrm{div}\,\xi^*=W$ через ξ_z^*, тогда получим

$$ik(\lambda+\mu)\,W=-\rho\omega^2\xi_z^*-\mu\Delta\xi_z^*. \tag{2.2}$$

Применив операцию div к первому уравнению при учете второго, получим

$$\left(\lambda+2\mu+\frac{H_1^2}{4\pi}\right)\Delta W+\rho\omega^2 W-\frac{ikH_1^2}{4\pi}\Delta\xi_z^*=0. \qquad (2.3)$$

Подставляя W из (2.2) в (2.3), получим бигармоническое уравнение относительно ξ_z^*

$$a\Delta\Delta\xi_z^*+b\Delta\xi_z^*+d\xi_z^*=0, \qquad (2.4)$$

где

$$a=\mu\left(\lambda+2\mu+\frac{H_1^2}{4\pi}\right);\ b=\left(\lambda+3\mu+\frac{H_1^2}{4\pi}\right)\rho\omega^2-(\lambda+\mu)\frac{k^2H_1^2}{4\pi};\ d=\rho^2\omega^4.$$

Решение уравнения (2.4), ограниченное при $r=0$, можно записать в виде

$$\xi_z^*(r)=-ir_0\sum_{i=1}^{2}B_{im}\frac{\beta_i J_m\left(\beta_i x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\beta_i x)}, \qquad (2.5)$$

где B_{im} — постоянные интегрирования; $x=kr_0$; $\beta_i^2=(\gamma_i-k^2)/k^2$, где γ_i — корни квадратного уравнения $\gamma^2-b\gamma+ad=0$, т. е.

$$\gamma_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ad}}{2a}, \qquad (2.6)$$

штрих у функций Бесселя означает производную по полному аргументу.

Подставляя (2.5) в (2.2), получим

$$\operatorname{div}\xi=W=-\frac{\mu x}{\lambda+\mu}\sum_{i=1}^{2}B_{im}\left(\beta_i^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)\frac{\beta_i J_m\left(\beta_i x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\beta_i x)}. \qquad (2.7)$$

Аналогично, применив операцию rot к первому уравнению системы (2.1), получим для $\operatorname{rot}_z\xi^*=V_z$ следующее уравнение:

$$\Delta V_z+\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}-\frac{k^2H_1^2}{4\pi}\right)V_z=0. \qquad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8), ограниченное при $r=0$, запишется в виде

$$V_z=\operatorname{rot}_z\xi^*=\alpha^2x^2A_m\frac{J_m\left(\alpha x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\alpha x)}, \qquad (2.9)$$

где A_m — постоянная интегрирования,

$$\alpha_2=\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}-\frac{H_1^2}{4\pi\mu}-1.$$

Таким образом, (2.7), (2.9) при учете (2.5) образуют следующую систему уравнений относительно ξ_r^*, ξ_φ^*:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_r^*)+\frac{im}{r}\xi_\varphi^*=-x\sum_{i=1}^{2}B_{im}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_i^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right]\times$$
$$\times\frac{\beta_i J_m\left(\beta_i x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\beta_i x)};\ -\frac{im}{r}\xi_r^*+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\xi_\varphi^*)=\alpha^2x^2A_m\frac{J_m\left(\alpha x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\alpha x)}. \qquad (2.10)$$

Решая полученную систему уравнений, имеем

$$\xi_r^*(r)=im\frac{r_0^2}{r}A_m\frac{J_m\left(\alpha x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\alpha x)}+r_0\sum_{i=1}^{2}B_{im}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_i^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+\right.$$
$$\left.+1\right]\frac{J'_m\left(\beta_i x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\beta_i x)}, \qquad (2.11)$$

$$\xi_\varphi^*(r) = -r_0 A_m \alpha x \frac{J_m'\left(\alpha x \frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\alpha x)} + im \frac{r_0^2}{r} \sum_{i=1}^{2} B_{im} \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_i^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 1\right] \frac{J_m\left(\beta_i x \frac{r}{r_0}\right)}{\beta_i x J_m'(\beta_i x)}. \qquad (2.12)$$

Значение возмущения напряженности магнитного поля в проводнике запишется в виде

$$H_1^* = H_1 (ik\xi^* - \mathbf{e}_z \operatorname{div} \xi^*). \qquad (2.13)$$

Возмущение напряженности магнитного поля вне проводника можно представить как градиент некоего потенциала, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Решение, удовлетворяющее в линейном приближении условию равенства нулю нормальной составляющей магнитного поля на поверхности проводника и условию ограниченности при $r \to \infty$, можно записать в виде

$$\mathbf{H}_0^* = i\xi_r^*(r_0) \frac{H_0}{K_m'(x)} \operatorname{grad} \left\{K_m\left(x \frac{r}{r_0}\right) \exp\left[i(m\varphi + kz + \omega t)\right]\right\}, \qquad (2.14)$$

здесь $K_m(y)$ — циклические функции мнимого аргумента.

Условие непрерывности потока импульса через возмущенную поверхность в линейном приближении для рассматриваемого случая сводится к следующим равенствам (при $r=r_0$):

$$\sigma_{rr}^* - \frac{H_1^2}{4\pi}\left(ix \frac{\xi_z^*}{r_0} - \operatorname{div} \xi^*\right) - \frac{H_0^2}{4\pi} x^2 \Psi_m(x) \frac{\xi_r^*}{r_0} = 0;$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 0; \;\; \sigma_{rz} - \frac{ix(H_0^2 - H_1^2)}{8\pi} \frac{\xi_r^*}{r_0} = 0, \qquad (2.15)$$

где

$$\Psi_m(x) = \frac{K_m(x)}{xK_m'(x)}.$$

Используя (2. 5), (2. 10), (2. 11) для компонент вектора смещения и соотношения между напряжениями и деформациями из (2. 15), получим систему трех уравнений для определения постоянных интегрирования A_m, B_{1m}, B_{2m}. Для того чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при A_m, B_{1m}, B_{2m}, равнялся нулю. Это и дает дисперсионное уравнение, т. е.

$$|a_{ij}| = 0, \qquad (2.16)$$

где

$$a_{11} = 1 + h_0^2 x^2 \Psi_m(x) - \varphi_m^{-1}(\alpha x),$$

$$a_{12} = \left[1 + h_0^2 x^2 \Psi_m(x) - m^2 \varphi_m(\beta_1 x) + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \varphi_m(\beta_1 x)\right]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_1^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\beta_1^2 x^2 \varphi_m(\beta_1 x); \;\; a_{13} = \left[1 + h_0^2 x^2 \Psi_m(x) - m^2 \varphi_m(\beta_2 x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \varphi_m(\beta_2 x)\right] \cdot \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_2^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + 1\right] + \frac{1}{2}\beta_2^2 x^2 \varphi_m(\beta_2 x);$$

$$a_{21} = m^2 - \varphi_m^{-1}(\alpha x) - \frac{\alpha^2 x^2}{2}; \;\; a_{22} = m^2\left[1 - \varphi_m(\beta_1 x)\right]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_1^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + 1\right];$$

$$a_{23} = m^2\left[1 - \varphi_m(\beta_2 x)\right]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_2^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + 1\right];$$

$$a_{31} = 1 - (h_0^2 - h_1^2);$$

$$a_{32} = \left[1 - (h_0^2 - h_1^2)\right]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_1^2 + 1 - \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right) + 1\right] - \beta_1^2;$$

$$a_{33}=[1-(h_0^2-h_1^2)]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_2^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right]-\beta_2^2;$$

$$\varphi_m(y)=\frac{J_m(y)}{yJ'_m(y)};\quad h^2=\frac{H^2}{8\pi\mu}.$$

Наиболее удобны для экспериментального исследования изгибные колебания ($m=1$). Для этого случая после ряда алгебраических преобразований уравнение (2.16) запишется в виде:

$$|b_{ij}|=0, \tag{2.17}$$

где

$$b_{11}=\alpha^2+1-(h_0^2-h_1^2)+2h_0^2\Psi_1(x);$$

$$b_{12}=-[1-\varphi_1(\beta_1 x)]\left\{\alpha^2\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_1^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right]+\beta_1^2\right\};$$

$$b_{13}=-[1-\varphi_1(\beta_2 x)]\left\{\alpha^2\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_2^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right]+\beta_2^2\right\};$$

$$b_{21}=1-\varphi_1^{-1}(\alpha x)-\frac{\alpha^2x^2}{2};\ b_{22}=\left[\varphi_1^{-1}(\alpha x)-\varphi_1(\beta_1 x)+\frac{\alpha^2x^2}{2}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_1^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right];\ b_{23}=\left[\varphi_1^{-1}(\alpha x)-\varphi_1(\beta_2 x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^2x^2}{2}\right]\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\beta_2^2+1-\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}\right)+1\right];\ b_{31}=1-(h_0^2-h_1^2);$$
$$b_{32}=-\beta_1^2;\ b_{33}=-\beta_2^2.$$

Для длинноволновых колебаний ($x\ll 1$) уравнение (2.17) удается разрешить в явном виде

$$\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}=\frac{3\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}x^2+3h_0^2+h_1^2+2x^2\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)+0(x^3), \tag{2.18}$$

C — постоянная Эйлера.

Учитывая, что $\mu\left(\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)=E$ (E — модуль Юнга) и третий член в правой части много меньше двух первых, получаем

$$\rho\omega^2=\frac{1}{4}Ek^4r_0^2+k^2\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi}. \tag{2.19}$$

Диэлектрический стержень с идеально проводящим покрытием

Из системы уравнений (1.5), (1.6) в результате линеаризации получаем

$$\rho\omega^2\xi^*+(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\xi^*-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\xi^*=0,$$
$$\Delta\mathbf{H}_1^*=0,\ \Delta\mathbf{H}_0^*=0. \tag{3.1}$$

Решая систему уравнений (3.1) при учете граничного условия (1.7), получим

$$\xi_r^*(r)=im\frac{r_0^2}{r}A_m\frac{J_m\left(\beta x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\beta x)}-r_0B_m\frac{\gamma^2J'_m\left(\gamma x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\gamma x)}+$$
$$+r_0C_m\frac{J'_m\left(\beta x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\beta x)}, \tag{3.2}$$

$$\xi_\varphi^*(r)=-r_0A_m\frac{\beta xJ'_m\left(\beta x\frac{r}{r_0}\right)}{J_m(\beta x)}-im\frac{r_0^2}{r}B_m\frac{J_m\left(\gamma x\frac{r}{r_0}\right)}{\gamma xJ'_m(\gamma x)}+$$
$$+im\frac{r_0^2}{r}C_m\frac{J_m\left(\beta x\frac{r}{r_0}\right)}{\beta xJ'_m(\beta x)}, \tag{3.3}$$

$$\xi_z^*(r)=-ir_0\left[B_m\frac{\gamma J_m\left(\gamma x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\gamma x)}+C_m\frac{\beta J_m\left(\beta x\frac{r}{r_0}\right)}{J'_m(\beta x)}\right], \tag{3.4}$$

$$\mathbf{H}_1^* = i\xi_r^*(r_0)\frac{H_1}{J_m'(x)}\operatorname{grad}\left[I_m\left(x\frac{r}{r_0}\right)\exp i\,(m\varphi + kz + \omega t)\right], \tag{3.5}$$

$$\mathbf{H}_0^* = i\xi_r^*(r_0)\frac{H_0}{K_m'(x)}\operatorname{grad}\left[K_m\left(x\frac{r}{r_0}\right)\exp i\,(m\varphi + kz + \omega t)\right]. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2} - 1;\quad \gamma^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)k^2} - 1;$$

A_m, B_m, C_m — постоянные интегрирования.

Для этого случая условия непрерывности потока импульса сводятся к следующим равенствам:

$$\sigma_{rr}^* - 2x^2\mu\,[h_0^2\Psi_m(x) - h_1^2\varphi_m(ix)]\frac{\xi_r^*(r_0)}{r_0} = 0;$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 0;\quad \sigma_{rz}^* - ix\mu\,[h_0^2 - h_1^2]\frac{\xi_r^*(r_0)}{r_0} = 0. \tag{3.7}$$

После преобразований, аналогичных проделанным выше, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$|a_{ik}^1| = 0,$$

где

$$a_{11}^1 = 1 - \varphi_m^{-1}(\beta x) + x^2[h_0^2\Psi_m(x) - h_1^2\varphi_m(ix)];$$
$$a_{12}^1 = 1 - m^2\varphi_m(\gamma x) + \frac{\beta^2+1}{2}x^2\varphi_m(\gamma x) + x^2[h_0^2\Psi_m(x) - h_1^2\varphi_m(ix)];$$

$$a_{13}^1 = 1 - m^2\varphi_m(\beta x) + \beta^2x^2\varphi_m(\beta x) + x^2[h_0^2\Psi_m(x) - h_1^2\varphi_m(ix)];$$
$$a_{21}^1 = m^2 - \varphi_m^{-1}(\beta x) - \frac{\beta^2x^2}{2};\quad a_{22}^1 = m^2[1 - \varphi_m(\gamma x)];\quad a_{23}^1 = m^2[1 - \varphi_m(\beta x)];$$

$$a_{31}^1 = 1 - (h_0^2 - h_1^2);\quad a_{32}^1 = 2 - (h_0^2 - h_1^2);\quad a_{33}^1 = 1 - \beta^2 - (h_0^2 - h_1^2).$$

Для изгибных колебаний ($m = 1$) получаем

$$|b_{ik}^1| = 0,$$

где

$$b_{11}^1 = \beta^2 + 1 - (h_0^2 - h_1^2) + 2[h_0^2\Psi_1(x) - h_0^2\varphi_1(ix)];$$
$$b_{12}^1 = -(\beta^2 - 1)[1 - \varphi_1(\gamma x)] - 2[1 - \varphi_1(\beta x)];$$
$$b_{13}^1 = -2[1 - \varphi_1(\beta x)];\quad b_{21}^1 = 1 - \varphi_1^{-1}(\beta x) - \frac{\beta^2x^2}{2};$$

$$b_{22}^1 = \varphi_1^{-1}(\beta x) - \varphi_1(\gamma x) + \frac{\beta^2x^2}{2} + \frac{1}{\beta^2}\left[\varphi_1^{-1}(\beta x) - \varphi_1(\beta x) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^2x^2}{2}\right];\quad b_{23}^1 = \frac{1}{\beta^2}\left[\varphi_1^{-1}(\beta x) - \varphi_1(\beta x) + \frac{\beta^2x^2}{2}\right];$$

$$b_{31}^1 = 1 - (h_0^2 - h_1^2);\quad b_{32}^1 = 0;\quad b_{33}^1 = -1.$$

Для длинноволновых колебаний с той же точностью, что и выше, получаем

$$\rho\omega^2 = \frac{1}{4}Ek^4r_0^2 + k^2\frac{3H_0^2 + H_1^2}{8\pi}.$$

Таким образом, в длинноволновом приближении рассмотренные два случая не различаются.

Идеально проводящий стержень конечной длины

Мы рассмотрели длинноволновые изгибные малые колебания бесконечно длинного круглого стержня из сверхпроводника II рода в магнитном поле. В эксперименте же приходится иметь дело со стержнями конечной длины, для которых необходимо учитывать граничные условия на концах. Вернемся к дисперсионному соотношению (2.19). Умножив левую и правую части на ξ и заменив $i\omega$ на $\partial/\partial t$, а ik на $\partial/\partial z$, получим уравнение малых изгибных колебаний круглого тонкого сверхпроводящего стержня в магнитном поле

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{1}{4}Er_0^2\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}-\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0. \tag{4.1}$$

При записи этого уравнения мы сделали существенное допущение, что вклад от поля для стержней конечной длины будет таким же, как от бесконечно длинных. Но, как следует из экспериментов [7], это допущение достаточно корректно.

Будем рассматривать плоские гармонические колебания, т. е. $\xi=\mathrm{e}_x\xi e^{i\omega t}$, тогда уравнение (4.1) перепишется в виде

$$\frac{1}{4}Er_0^2\frac{d^4\xi}{dz^4}-\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi}\frac{d^2\xi}{dz^2}-\rho\omega^2\xi=0. \tag{4.2}$$

Общее решение (4.2) может быть представлено в виде

$$\xi(z)=A\sin\alpha z+B\cos\alpha z+C\,\mathrm{sh}\,\beta z+D\,\mathrm{ch}\,\beta z, \tag{4.3}$$

где A, B, C, D — постоянные интегрирования,

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2+4Y}-X\right)};\quad \beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2+4Y}+X\right)};$$

$$X=\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi\rho}\frac{4\rho}{Er_0^2}=\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi\rho}\frac{k^4}{\omega_0^2};\quad \omega_0^2=\frac{1}{4\rho}Ekr_0^2;\quad \frac{k^4\omega^2}{\omega_0^2}=Y. \tag{4.4}$$

Наиболее удобным для экспериментального исследования является четвертьволновый вибратор (один конец при $z=0$ заделан, а другой при $z=l$ — свободен).

Граничные условия для этого случая запишутся в виде [8]

$$\xi(0)=0;\quad \left.\frac{\partial\xi}{\partial z}\right|_{z=0}=0;\quad \left.\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right|_{z=l}=0;$$

$$\left.\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}-X\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\right|_{z=l}=0. \tag{4.5}$$

Подставляя граничные условия в $\xi(z)$, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$2\alpha^2\beta^2+(\alpha^4+\beta^4)\cos\alpha l\,\mathrm{ch}\,\beta l-\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha l\,\mathrm{sh}\,\beta l=0. \tag{4.6}$$

Для слабых полей ($x\leqslant 1$) оно разрешается в явном виде, тогда для первой гармоники имеем

$$\rho\omega^2=\rho\omega_0^2+\frac{4.64775}{l^2}\frac{3H_0^2+H_1^2}{8\pi};\quad \omega_0=\frac{3.52}{l^2}\sqrt{\frac{Er_0^2}{4\rho}}. \tag{4.7}$$

Авторы искренне признательны Б. П. Перегуду за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] *Долбин Н. И.* // ПМТФ. 1967. № 3. С. 95—97.
[2] *Прудников В. В.* // ПМТФ. 1968. № 1. С. 168—172.
[3] *Долбин Н. И.* // ПМТФ. 1962. № 2. С. 104—109.
[4] *Уфлянд Я. С.* // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 740—744.
[5] *Paria G.* // Magneto-Elastisity and Magneto-Thermoelastisity Advances in Applied Mechanism. London: Acad. Press, 1967. Vol. 10. P. 73.
[6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[7] *Бодров С. Г.* Автореф. канд. дис. Л., 1985.
[8] *Brandt E. H.* // J. Low Temperature Phys. 1986. Vol. 63. N 3/4. P. 187—214.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
28 октября 1988 г.
В окончательной редакции
22 февраля 1989 г.