01; 04

УСИЛЕНИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Д. В. Красовицкий, С. С. Моисеев

Исследуется эффект обращения затухания Ландау в плотной однородной плазме с добавкой пространственно неоднородных резонансных частиц. Показано, что неустойчивыми оказываются моды, для которых диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна. Рассмотрены три модели неоднородной плазмы.

Известно [1], что ленгмюровские возмущения в однородной плазме затухают с декрементом Ландау, а их энергия переходит в кинетическую энергию резонансных электронов. Изменение знака декремента (обращение затухания Ландау) возникает лишь при наличии областей положительного наклона функции распределения электронов по скоростям, т. е. в условиях пучковой неустойчивости [2, 3]. В то же время максвелловская плазма, состоящая из холодных и горячих электронов, остается устойчивой, несмотря на наличие в плазме высокоэнергетичных электронов.

В работе [4] показано, что в холодной плазме с добавкой неоднородно распределенных в пространстве горячих электронов затухание Ландау изменяет знак, причем необходимым условием возникновения эффекта является наличие электронной ямы плотности горячих электронов. При этом неустойчивыми оказываются гармоники с частотами, меньшими ленгмюровской частоты, для которых диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна, так как поле этих мод выталкивает резонансные электроны к центру ямы плотности, усиливая начальное возмущение.

Проведенное ниже исследование является дальнейшим развитием идеи работы [4]. В отличие от нее в настоящей работе показано, что обращение затухания в неоднородной плазме возникает и для колебаний с частотами, бо́льшими плазменной частоты, т. е. в отсутствие сторонних зарядов. Как и в [4], необходимым условием неустойчивости является «отрицательность» диэлектрической проницаемости плазмы, которая обеспечивается пространственной дисперсией, возникающей в плазме с конечной температурой фоновых электронов. В заключительной части работы исследуется возможность усиления несобственных колебаний холодной плазмы, обладающей нестационарным спектром, за счет энергии горячей компоненты.

Заметим, что развитие данного направления работ представляет интерес для непучкового способа генерации электромагнитных колебаний и для анализа нелинейной динамики ленгмюровских волн в плазме.

1. Система уравнений

Рассмотрим плазму, состоящую из двух сортов максвелловских электронов, заряд которых скомпенсирован ионами. Подавляющая часть холодных электронов с плотностью n_0 и тепловой скоростью $u_т$ определяет волноводные свойства плазмы и описывается в гидродинамическом приближении. Малая добавка $n_1(x) \ll n_0$ горячих ($v_т \gg u_т$) электронов определяет декремент (инкремент) ленгмюровских возмущений с фазовой скоростью $v_ф \sim v_т$ и является кинетической.

Будем считать, что внешний источник $Q(x, v)$ создает и поддерживает градиент плотности горячих частиц, а начальное возмущение задается импульсом внешнего поля $E^{ст}$, прилагаемым к плазме в момент $t=0$ [5],

$$v\frac{\partial f_0}{\partial x}=Q(x,\ v),\ \ f_0(x,\ v)=n_1(x)F(v),$$

$$E^{ст}(t,\ x)=E_1\delta(t)\cos k_m x. \tag{1}$$

Самосогласованная система линеаризованных уравнений для холодных (гидродинамических) электронов, кинетического уравнения для горячих электронов и уравнения Пуассона может быть представлена в виде следующей системы уравнений для компонент Фурье электрического поля:

$$\frac{\partial E_{k\omega}}{\partial t}=\frac{i}{2\omega}\left\{\left[\omega^2-\omega_0^2\left(1+\frac{3}{2}k^2\frac{u_т^2}{\omega_0^2}\right)\right]E_{k\omega}-\omega^2E_{k\omega}^{ст}\right\}-\frac{2\pi e\omega_0^2}{k\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{k\omega}dv,$$

$$f_{k\omega}=-\frac{ie}{2\pi m}\frac{F'(v)}{\omega-kv}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk'E_{k'\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx n_1(x)\exp\left[i(k'-k)x\right]. \tag{2}$$

Зависимость амплитуды поля $E_{k\omega}$ от времени учитывает наличие резонансных частиц, $\omega_0^2=4\pi e^2 n_0/m$ — ленгмюровская частота холодной плазмы. В отличие от [4] система (2) учитывает конечную температуру фоновых электронов $u_т\neq 0$.

Предположим, что возмущение возникает вблизи начала координат $x=0$, где плотность горячих электронов достигает экстремального значения, а область его локализации l мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности. Представляя плотность $n_1(x)$ в виде ряда

$$n_1(x)=n_1(0)+\frac{n_1''(0)}{2}x^2+\ldots \tag{3}$$

и удерживая первые члены разложения, находим

$$f_{k\omega}=-\frac{ie}{m}\frac{F'(v)}{\omega-kv}\left[n_1(0)-\frac{n_1''(0)}{2}\frac{\partial^2}{\partial k^2}\right]E_{k\omega}. \tag{4}$$

Для максвелловской функции $F(v)=(\pi v_T^2)^{-1/2}\exp-(v^2/v_T^2)$ при условии $kd\ll 1$, $d=v_т/\omega_0$ из формул (2), (4) следует

$$\frac{\partial E_{k\omega}}{\partial t}=\frac{i\omega_0}{2}\left[\varepsilon(k,\ \omega)E_{k\omega}+\frac{n_1''(0)}{2n_0}\frac{\partial^2E_{k\omega}}{\partial k^2}-E_{k\omega}^{ст}\right]+$$

$$+\gamma_k\left[\frac{n_1(0)}{n_0}E_{k\omega}-\frac{n_1''(0)}{2n_0}\frac{\partial^2}{\partial k^2}E_{k\omega}\right],$$

$$\varepsilon(k,\ \omega)=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\left(1+\frac{3}{2}k^2\frac{u_т^2}{\omega_0^2}+\frac{n_1(0)}{n_0}\left(1+\frac{3}{2}k^2d^2\right)\right)\right],$$

$$\gamma_k=-\pi^{1/2}\frac{\omega_0}{(kd)^3}\exp\left(-\frac{1}{k^2d^2}\right);\quad E_{k\omega}^{ст}=\pi E_1\left[\delta(k-k_m)+\delta(k+k_m)\right] \tag{5}$$

(предполагается $|\varepsilon(k,\ \omega)|\ll 1$).

В однородной плазме $n_1''(0)=0$ колебания затухают с декрементом γ_k [1]. Аналогичный эффект имеет место и в рассматриваемом случае слабонеоднородной плазмы при наличии «горба» горячих электронов $n_1''(0)<0$, поскольку по условию разложения (3)

$$n_1(0)E_{k\omega}\gg\left|n_1''(0)\frac{\partial^2E_{k\omega}}{\partial k^2}\right|.$$

Ситуация изменяется, если функция $n_1(x)$ имеет минимум $n_1''(0) > 0$ и плотность электронов на дне ямы не слишком велика, так что в уравнении становится существенным последнее слагаемое в правой части, изменяющее знак затухания Ландау при $(\partial^2 E_{k\omega})/(\partial k_2) > 0$. Учитывая это, рассмотрим наиболее интересный случай $n_1(0)=0$.

2. Собственные колебания плазмы

Будем считать, что сторонние заряды в плазме отсутствуют $E^{\text{ст}}=0$. Тогда в первом приближении по малому параметру $|\gamma_k|/\omega_0 \ll 1$, опуская в (5) последнее слагаемое и полагая $(\partial E_{k\omega})/\partial t)=0$, получаем уравнение для стационарного спектра колебаний. В безразмерных переменных

$$\lambda = \frac{2\omega}{u_\text{т}}\left(\frac{n_0}{3n_1''(0)}\right)^{1/2}\varepsilon(\omega), \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \xi^2 = \frac{k^2}{k_0^2},$$

$$k_0^2 = \frac{\omega}{u_\text{т}}\left(\frac{n_1''(0)^{1/2}}{3n_0}\right)^{1/2}$$

оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_{k\omega}^{(0)}}{\partial k^2} + (\lambda - \xi^2) E_{k\omega}^{(0)} = 0. \tag{6}$$

Решения (6), удовлетворяющие условию $E_{k\omega} \to 0$ при $|\xi| \to \infty$, существуют при $\lambda = 2N+1$ (N — целые положительные числа) и равны [6].

$$[E_{k\omega}^{(0)}]_N = A_N e^{\xi^2/2} \frac{d^N e^{-\xi^2}}{d\xi^N} = A_N f_N(\xi). \tag{7}$$

В следующем приближении, учитывающем наличие резонансных частиц $\gamma_k \neq 0$, решение сохраняет вид (7), а амплитуда является медленной функцией t и k. Подставляя (7) в (5), находим

$$\frac{\partial A_N}{\partial t} = \gamma_{kN} A_N + \frac{i\omega_0}{2}\frac{n_1''(0)}{2n_0}\left(\frac{2}{f_N}\frac{\partial A_N^*}{\partial k}\frac{\partial f_N}{\partial k} + \frac{\partial^2 A_N}{\partial k^2}\right),$$

$$\gamma_{kN} = \frac{3}{2}\frac{u_\text{т}^2}{\omega_0^2}|\gamma_k|(k^2 - k_N^2), \quad k_N^2 = (2N+1)k_0^2. \tag{8}$$

Согласно (8), амплитуда изменяется во времени по экспоненциальному закону, если последние слагаемые достаточно малы

$$\frac{\omega_0}{4}\frac{n_1''(0)}{n_0}\frac{\partial^2 A_N}{\partial k^2} \ll \gamma_{kN} A_N^*,$$

$$\frac{\omega_0}{2}\frac{n_1''(0)}{n_0}\frac{\partial A_N}{\partial k}\frac{\partial f_N}{\partial k} \ll \gamma_{kN} A_N f_N. \tag{9}$$

При этом гармоники с волновыми числами $k > k_N^*$ являются неустойчивыми. Для основной моды $N=0$ из (9) следует, что за время $t \sim \gamma_{k0}^{-1}$ отброшенные слагаемые остаются малыми при условии

$$\frac{|\gamma_k|}{\omega_0} k^2 d^2 \left|\frac{k^2}{k_0^2} - 1\right| \gg 1, \tag{10}$$

которое выполняется для $k^2 \gg k_0^2$. Отметим, что ограничения (9) связаны с зависимостью инкремента от волнового числа, приводящей к искажению спектра колебаний по сравнению со стационарным (7).

3. Вынужденные колебания плазмы

Найденные в разделе 2 «квантованные» решения соответствуют колебаниям двухмаксвелловской неоднородной плазмы с частотами $\omega_N > \omega_0$ ($\varepsilon(\omega_N) > 0$). Неустойчивыми являются волновые числа, для которых диэлектрическая проницаемость плазмы

$$\varepsilon(k,\ \omega_N)=\frac{3}{2}\frac{u_т^2}{\omega_0^2}(k_N^2-k^2) \tag{11}$$

отрицательна. Очевидно, что область неустойчивости по волновым числам расширяется на весь диапазон волновых чисел, если $\varepsilon(\omega)<0$, так как при этом знак обоих слагаемых в выражении для $\varepsilon(k,\ \omega)$ в (5) соответствует усилению колебаний. Однако стационарный спектр в этом случае существует лишь при наличии внешнего электрического поля $E^{ст}$ [4].

Поскольку в этом случае учет теплового разброса электронов в однородной плазме не является принципиальным, то будем считать что $u_т\to 0$. Тогда из уравнения (5) следует

$$\frac{\partial^2 E_{k\omega}^{(0)}}{\partial k^2}-l^2E_{k\omega}^{(0)}=A\left[\delta(k-k_m)+\delta(k+k_m)\right],$$

$$l^2=-\varepsilon(\omega)\frac{2n_0}{n_1''(0)},\quad \varepsilon(\omega)=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2},\quad A=\frac{2\pi E_1 n_0}{n_1''(0)}. \tag{12}$$

В области частот $\omega<\omega_0$ ($l^2>0$) решение (12), убывающее при $k\to\infty$, имеет вид

$$E_{k\omega}^{(0)}=-\frac{A}{l}\begin{cases}e^{-k_m l}\operatorname{ch}kl & |k|<k_m,\\ \operatorname{ch}k_m l e^{-|k|l} & |k|>k_m.\end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что излом кривой (13) в точке k_m возникает для неограниченного в пространстве возмущения поля (1). Можно показать, что для конечного возмущения $L\gg l$ и $k_mL\gg 1$ функция $E_{k\omega}^{(0)}$ имеет качественно тот же вид, причем в точке k_m возникает максимум шириной порядка L^{-1}. Поскольку максимуму функции соответствует $(\partial^2E_{k\omega}^{(0)})/(\partial k^2)<0$, то колебания вблизи k_m являются затухающими. Учитывая условие длинноволнового приближения $kd\ll 1$ в (5), видим, что оптимальному условию усиления колебаний будет удовлетворять область спектра $|k|<k_m\simeq d^{-1}$.

С учетом резонансных частиц (аналогично разделу 2) находим

$$\frac{\partial A_{k\omega}}{\partial t}=\gamma_{k\omega}A_{k\omega}+\frac{i\omega_0}{2l^2}|\varepsilon(\omega)|\left(\frac{\partial^2A_{k\omega}}{\partial k^2}+2l\operatorname{th}kl\frac{\partial A_{k\omega}}{\partial k}\right),$$

$$\gamma_{k\omega}=-\gamma_k\frac{n_1''(0)}{2n_0}l^2=-\gamma_k|\varepsilon(\omega)|>0. \tag{14}$$

Экспоненциальный рост амплитуды поля имеет место при условии

$$\frac{d}{l}\ll\exp\left(-\frac{1}{k^2d^2}\right). \tag{15}$$

4. Эволюция несобственных мод

В разделах 2 и 3 использована традиционная для теории неустойчивостей плазмы постановка задачи, которая заключается в том, что рассматриваются неустойчивые собственные колебания среды. В случае, когда число резонансных частиц мало́, они близки к собственным колебаниям термодинамически равновесной среды и учет неравновесности можно рассматривать как малую поправку [7].

Для холодной фоновой плазмы ($u_т=0$) без сторонних возмущений $E^{ст}=0$ собственные колебания плазмы отсутствуют, т. е. не существует стационарных решений для спектра колебаний и начальные возмущения эволюционируют со временем даже в отсутствие резонансных частиц (несобственные моды плазмы [7]). Ниже обсуждается возможность усиления несобственных мод за счет энергии резонансных частиц в случае параболической неоднородности (3).

Для исследования спектра несобственных ленгмюровских колебаний удобно воспользоваться уравнением

$$\frac{\partial^2 E(t,\ x)}{\partial t^2} + \omega^2(x)\, E(t,\ x) = 0,$$

$$\omega^2(x) = \omega_0^2\left[1 + \frac{n_1''(0)}{2n_0}\, x^2\right], \tag{16}$$

решение которого имеет вид

$$E(t,\ x) = A(x)\cos[\omega(x)\, t + \varphi(x)], \tag{17}$$

где зависящие от координаты постоянные интегрирования положим равными [1]

$$A(x) = E_0\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right)^{-1},\quad \varphi(x) = 0. \tag{18}$$

Для компоненты Фурье поля из (17) и (18) следует выражение

$$E_k(t) = \frac{E_0 l^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos[\omega(x)\, t]\cos kx}{x^2 + l^2}\, dx, \tag{19}$$

позволяющее проанализировать временную эволюцию спектра колебаний неоднородной плазмы.

В удобных безразмерных переменных

$$\tau = \omega_0 t,\ \ \xi = \frac{x}{l},\ \ \delta^2 = \frac{n_1''(0)\, l^2}{2n_0},\ \ z = kl$$

интеграл в правой части (19) имеет вид

$$Q(z,\ \tau) = \int_0^\infty \cos[\tau(1 + \delta^2\xi^2)^{1/2}]\cos z\xi\,\frac{d\xi}{1+\xi^2} \tag{20}$$

и в области параметров $z > \tau\delta$ равен [8]

$$Q_+ = \frac{\pi}{2l}\, e^{-z}\cos\left[\tau(1 - \delta^2)^{1/2}\right]. \tag{21}$$

Для вычисления функции $Q_-(z,\ \tau)$ при $z < \tau\delta$ представим (20) в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2Q}{dz^2} - Q = -\int_0^\infty \cos\left[\tau(1 + \delta^2\xi^2)^{1/2}\right]\cos(z\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

Интеграл в правой части (22) равен [8]

$$\int_0^\infty \cos\left[\tau(1 + \delta^2\xi^2)^{1/2}\right] d\xi = \frac{\pi}{2\delta}\,\frac{d}{d\tau}\left\{J_0\left[\left(\tau^2 - \frac{z^2}{\delta^2}\right)^{1/2}\right]\theta\left(\tau - \frac{z}{\delta}\right)\right\}, \tag{23}$$

где J_0 — функция Бесселя, $\theta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ 1 & y > 0. \end{cases}$

Интегрируя (22) при $z < \tau\delta$, получаем

$$Q_-(z,\ \tau) = C_1 \operatorname{sh} z + C_2 \operatorname{ch} z - \frac{\pi}{2\delta}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^z J_0\left[\left(\tau^2 - \frac{z'^2}{\delta^2}\right)^{1/2}\right]\operatorname{sh}(z - z')\, dz'. \tag{24}$$

---

[1] Заметим, что выбор начальных условий в виде (18) соответствует спектральному разложению (13) при $k_m = 0$. Однако в отличие от (13) параметр l определяет ширину ленгмюровского импульса, создаваемого внешним источником в момент $t = 0$.

Постоянные интегрирования определяются условиями сшивки функции и ее производной в точке $z = \delta\tau$

$$Q_+ = Q_-;\ Q'_- - Q'_+ = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

Подставляя (21) и (24) в (25), находим

$$Q_-(z,\ \tau) = \frac{\pi}{2}\Big\{e^{-z}\cos\left[\tau(1-\delta^2)^{1/2}\right] +$$

$$+ \operatorname{sh}(z - \tau\delta) - \tau\int\limits_{z/\tau\delta}^{1}\operatorname{sh}(z - \tau\delta y)\,\frac{J_1\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right]}{(1-y^2)^{1/2}}\,dy. \tag{26}$$

Асимптотика (26) в области параметров

$$\tau \gg 1,\ \delta^2 \ll 1,\ z \ll \tau\delta \tag{27}$$

имеет вид (см. Приложение)

$$Q_-(z, \tau) = \frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\left\{e^{i(\tau-\mu^2)}\operatorname{ch} z\left[1 - 2^{1/2}e^{-i(\pi/4)}\left[C(\mu) + iS(\mu)\right]\right]\right\} +$$

$$+ \pi^{1/2}e^{i(\tau - 3/4\pi)}\eta\int\limits_0^1\operatorname{sh}\left[z(1-y)\right]e^{-i\eta^2y^2}dy,$$

$$\mu = \left(\frac{\tau\delta^2}{2}\right)^{1/2},\quad \eta = \left(\frac{z^2}{2\tau\delta^2}\right)^{1/2}, \tag{28}$$

где $C(\mu)$ и $S(\mu)$ — интегралы Френеля [8].

Значительное упрощение (28) достигается в области малых волновых чисел $\eta \ll 1$

$$Q_-(z,\ \tau) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{ch} z\cos(\tau - \mu^2), & \mu \ll 1, \\ \left(\frac{\pi}{2\tau\delta^2}\right)^{1/2}\cos\left(\tau + \frac{\pi}{4} - \eta^2\right), & \mu \gg 1. \end{cases} \tag{29}$$

Из формулы (29) следует, что колебания являются неустойчивыми лишь в случае $\mu \ll 1$, когда спектр является монотонным $E \sim \operatorname{ch} kl$ и $\partial^2 E_k/\partial k^2 > 0$. С течением времени $\mu \gg 1$ возникновение осцилляций в пространстве волновых чисел сопровождается изменением знака второй производной от амплитуды поля и колебания становятся затухающими.

Так как при $\mu \ll 1$ в асимптотике (29) выделяется быстроосциллирующий множитель, то можно воспользоваться уравнением для медленной амплитуды, полагая в нем $\omega = \omega_0 - \alpha$, где $\alpha = (\omega_0\delta^2)/2$ учитывает уход фазы волны

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = i\alpha\left(\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 E_k}{\partial k^2} - E_k\right) + \frac{\tilde\gamma_k}{l^2}\frac{\partial^2 E_k}{\partial k^2}, \tag{30}$$

предполагается $u_т = E^{ст} = 0$.

Для определения решения (30) воспользуемся малым параметром $\tilde\gamma_k/\alpha \ll 1$, считая в первом приближении $E_k = A\operatorname{ch} kl$. Учет резонансных частиц приводит к экспоненциальному росту амплитуды колебаний

$$A = A_0\exp(\tilde\gamma t) = A_0\exp\left(2\,\frac{|\gamma_k|}{\omega_0}\mu^2\right). \tag{31}$$

Так как оба параметра в экспоненте малы, то значительный рост амплитуды рассматриваемых несобственных колебаний плазмы будет иметь место лишь в области параметров $kd \approx 1$ и $\delta \approx 1$, где наше рассмотрение справедливо лишь качественно.

5. Основные результаты

Проведенное выше исследование устанавливает принципиальную возможность обращения затухания Ландау в плотной однородной плазме с добавкой пространственно неоднородных резонансных частиц. Неустойчивыми оказываются моды, для которых диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна.

Для собственных колебаний плазмы этот эффект имеет место лишь при учете пространственной дисперсии, т. е. в плазме с конечной температурой основного фона электронов. Усиление колебаний возникает в области волновых чисел, бóльших порогового значения (см. (8)).

Область неустойчивых волновых чисел расширяется при переходе к частотам $\omega < \omega_0$, которые, однако, существуют в плазме лишь при наличии внешнего начального возмущения.

В отсутствие внешних полей спектр колебаний холодной неоднородной плазмы с частотами $\omega < \omega_0$ является нестационарным. Его временнáя эволюция сопровождается появлением осцилляций в пространстве волновых чисел и изменением знака инкремента (срывом усиления колебаний).

В заключение подчеркнем, что многомодовый механизм неустойчивости проявляется в неоднородной плазме лишь при наличии надтепловых электронов и сопровождается коллективным преобразованием энергии горячей компоненты в энергию холодной благодаря нарастающему полю ленгмюровских колебаний при отрицательном наклоне функции распределения электронов, т. е. в отсутствие направленных потоков электронов в плазме.

Приложение

Представим формулу (26) в виде

$$Q_-(z,\ \tau) = Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{\pi}{2}\left\{e^{-z}\cos\left[\tau(1-\delta^2)^{1/2}\right] + \operatorname{sh}(z-\tau\delta) - \tau\int_0^1 \operatorname{sh}(z-\tau\delta y)\,\frac{J_1\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right]}{(1-y^2)^{1/2}}\,dy,\right.$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{2}\tau\int_0^{z/\tau\sigma} \operatorname{sh}(z-\tau\delta y)\,\frac{J_1\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right]}{(1-y^2)^{1/2}}\,dy. \tag{1}$$

Для вычисления Q_1 после интегрирования по частям используем формулы

$$\tau\int_0^1 \operatorname{ch}(\tau\delta y)\,J_1\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right]\frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} = \operatorname{ch}(\tau\delta) - \cos\left[\tau(1-\delta^2)\right],$$

$$\int_0^1 J_0\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right]\frac{d}{dy}\left[\frac{\operatorname{sh}(\tau\delta y)}{y}\right]dy = \tau\delta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,!}{(2n+1)\,!}(2\tau\delta^2)^n J_n(\tau). \tag{2}$$

После перехода к асимптотикам функций Бесселя

$$J_n(\tau) = \left(\frac{2}{\pi\delta}\right)^{1/2}\cos\left(\tau - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right),\quad \tau \gg 1$$

вторая формула (2) преобразуется к виду

$$\delta\tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,!}{(2n+1)\,!}(2\tau\delta^2)^n J_n(\tau) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\operatorname{Re} e^{i\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(\tau\delta^2)^{1/2}e^{-i\,(\pi/4)}\right]^{2n+1}}{(2n+1)\,!\,!} \tag{3}$$

и представляет собой известное разложение [8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n w^{2n+1}}{(2n+1)!!} = e^{w^2} \int_0^w e^{-t^2} dt, \tag{4}$$

где $w = \mu e^{-i\pi/4}$, $\mu = (\tau\delta^2/2)^{1/2}$.

Используя формулу

$$\int_0^\mu e^{iu^2} du = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} [C(\mu) + iS(\mu)], \tag{5}$$

где $C(\mu)$ и $S(\mu)$ — интегралы Френеля, находим

$$Q_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} z \operatorname{Re} e^{i(\tau-\mu^2)} \left\{1 - 2^{1/2} e^{-i\pi/4} [C(\mu) + iS(\mu)]\right\}. \tag{6}$$

Для упрощения интеграла Q_2 (см. (1)) будем считать $\frac{z}{\tau\delta} \ll 1$ и воспользуемся асимптотикой функции Бесселя при $\tau \gg 1$

$$J_1\left[\tau(1-y^2)^{1/2}\right] \simeq \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{1/2} \cos\left(\tau - \frac{3}{4}\pi - \frac{\tau y^2}{2}\right). \tag{7}$$

После подстановки (7) в (1) получаем

$$Q_2 = \pi^{1/2}\eta \operatorname{Re} e^{i(\tau - 3/4\pi)} \int_0^1 \operatorname{sh}[z(1-y)]\, e^{-i\eta^2 y^2} dy, \tag{8}$$

где $\eta = (z^2/2\tau\delta^2)^{1/2}$.

При переходе от (28) к (29) использована асимптотика интегралов Френеля при $\mu \gg 1$

$$C(\mu) + iS(\mu) = 2^{-1/2}\left(e^{i\pi/4} - \frac{i}{\pi^{1/2}\mu} e^{i\mu^2}\right), \tag{9}$$

позволяющая представить Q_1 в виде

$$Q_1 = -\frac{\pi^{1/2}}{2\mu} \operatorname{ch} z \cos\left(\tau - \frac{3}{4}\pi\right). \tag{10}$$

Это слагаемое сокращается с первым членом разложения (8) по степеням $\eta \ll 1$, а второй член разложения совпадает с (29) (при $\mu \gg 1$).

Заметим, что с помощью первой формулы (2) можно показать, что

$$\left.\frac{dQ_-}{dz}\right|_{z=0} = 0, \quad \tau > 0 \tag{11}$$

и, следовательно, особенность производной в области малых k, связанная с выбором постоянной интегрирования при $\tau = 0$ в виде (18), исчезает.

Список литературы

[1] *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 7. С. 574—586.
[2] *Bohm D., Gross E. P.* // Phys. Rev. 1946. Vol. 75. P. 1864—1871.
[3] *Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б.* // ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 4. С. 555—562.
[4] *Красовицкий В. Б., Красовицкий Д. В., Моисеев С. С.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 10. С. 950—953.
[5] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[6] *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983. 660 с.
[7] *Михайловский А. Б.* Вопросы теории плазмы // Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1979. 265 с.
[8] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений.

Институт космических исследований
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
3 октября 1988 г.