

- [4] Фурсей Г. Н., Егоров Н. В., Кочерыженков А. В. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 13. С. 798—801.
 [5] Gomer R. // J. Chem. Phys. 1952. Vol. 20. N 11. P. 1772—1776.
 [6] Вольдсет Р. Прикладная спектрометрия рентгеновского излучения. М.: Атомиздат, 1977. 192 с.
 [7] Пазман А. // ПТЭ. 1969. № 3. С. 112—115.
 [8] Маслов В. И., Фурсей Г. Н., Кочерыженков А. В. А. с. 1340371. БИ. 1988. № 20. 267 с.

Ленинградский
 электротехнический институт связи
 им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило в Редакцию
 19 июля 1988 г.
 В окончательной редакции
 19 января 1988 г.

04; 07

Журнал технической физики, т. 59, в. 10, 1989

ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. Д. Левитан, А. В. Субашиев

Типичным примером бистабильной оптической системы с запаздыванием является гибридный бистабильный оптический прибор (БОП), включающий в себя электрооптический модулятор, охваченный запаздывающей обратной связью [1]. Коэффициент пропускания оптического модулятора F зависит от напряжения на его затворе U , $F=1/2(1+f \cos \beta U)$, β , f — параметры модулятора. С учетом обратной связи и запаздывания, обусловленного временем прохождения светового сигнала и задержки электрического сигнала в цепи обратной связи, работа прибора описывается уравнением

$$\tau \frac{dU}{dt} + U(t) = \alpha I_0 F(\tilde{U}) + V, \quad (1)$$

где \tilde{U} — напряжение на затворе БОП в момент $t-T$, $\tilde{U}=U(t-T)$, T — время задержки, τ — постоянная времени электрической цепи, I_0 — интенсивность падающего на БОП излучения, V — напряжение смещения, α — коэффициент передачи цепи обратной связи.

Уравнение (1) заменой переменных $t'=t/\tau$, $\varphi=\beta U-\pi/2$, $G=T/\tau$ приводится к стандартному виду [2]

$$d\varphi/dt' + \varphi = A \sin \varphi(t' - G) + B, \quad (2)$$

где величины $A=A(I_0)$ и $B=B(I_0, V)$ можно считать независимыми параметрами, задаваемыми выбором величин I_0 и V .

Исследованию уравнения (2) в связи с режимами БОП посвящен целый ряд работ ([1-3], см. также [4]). В частности, известно, что при $B=0$ и $0 < A < 1$ уравнение (2) имеет одно устойчивое стационарное решение $\varphi=0$. В некотором интервале $1 < A < A_1$ существуют три стационарных решения, из которых одно ($\varphi=0$) неустойчиво, а два других ($\varphi=\varphi_+$ и $\varphi=\varphi_-$) устойчивы. При дальнейшем увеличении параметра A эти решения также теряют устойчивость, что приводит к возникновению автоколебаний. Аналогичная картина имеет место и при $B \neq 0$.

В настоящей работе исследуются переходные процессы, происходящие в БОП в бистабильном режиме $1 < A < A_1$ при больших временах запаздывания $G \gg 1$ и $B < 1$.

Рассмотрим процесс переключения БОП, т. е. перехода БОП из одного устойчивого состояния в другое в результате импульса переключения (изменения параметров A и B). Весь процесс можно разбить на начальный этап $t' < 0$, во время которого изменяются величины A и B , и этап установления $t' > 0$, на котором A и B остаются постоянными. Из (2) следует, что зависимости $A(t')$ и $B(t')$ на начальном этапе переключения формируют функцию $\varphi(t')$ на промежутке $0 < t' < G$ в начале этапа установления. Мы обозначим ее через φ_0 .

Для дальнейшего удобно переписать уравнение (2), выполнив подстановку $t'=x+nG$, где n — целое число. Вводя обозначение $\varphi(t')=\varphi(x+nG)=\varphi_n(x)$, для функций $\varphi_n(x)$ получим систему уравнений

$$d\varphi_{n+1}/dx + \varphi_{n+1}(x) = A \sin \varphi_n(x) + B, \quad (3)$$

начальным условием к которой служит функция φ_0 , $0 < x < G$. Кроме того, по определению, $\varphi_n(x+G) = \varphi_{n+1}(x)$.

Из (3) следует, что знакопостоянная начальная функция $\varphi_0 > 0$ (или $\varphi_0 < 0$) весьма быстро (за $n = n_1 \approx 1/A - 1$ интервалов запаздывания) эволюционирует к значению φ_+ (или φ_-). Нетривиальный режим работы БОП возникает при задании знакопеременного начального условия, например

$$\begin{aligned} \varphi_1 &> 0, & 0 < x < x_1, \\ \varphi_1 &< 0, & x_1 < x < G. \end{aligned} \quad (4)$$

Можно предположить, что при определенных условиях (см. ниже) при больших $n > n_1$ установится сигнал $\varphi_n(x)$, который будет слабо изменяться при дальнейшем увеличении n . Чтобы изучить такие решения, перейдем от (3) к уравнению в частных производных, считая n непрерывной переменной. Тогда $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \partial\varphi/\partial n + 1/2\partial^2\varphi/\partial n^2$, с точностью до членов, содержащих производные второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = F(\varphi), \quad (5)$$

где $F(\varphi) = A \sin \varphi - \varphi + B$.

Заменой $x' = x - n$ это уравнение приводится к виду, не содержащему смешанной производной,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + F(\varphi), \quad (6)$$

решение которого должно удовлетворять, помимо начальных условий, соотношению $\varphi(x', n+1) = \varphi(x' + G + 1, n)$, играющему роль граничных условий. Уравнение (6) сводит задачу о динамике переключения БОП к хорошо изученной задаче об эволюции состояний в распределенной бистабильной одномерной системе [6], хотя возникающее при этом граничное условие несколько отличается от обычных.

Для анализа общей картины полезно рассмотреть сначала решения (6), не зависящие от n . Этим решениям соответствует строго периодическая зависимость сигнала от времени $\varphi(x') = \varphi(x' + G + 1)$, которая находится решением уравнения

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx'^2} = -\frac{dW}{d\varphi}, \quad W = \int^\varphi F(\varphi') d\varphi', \quad (7)$$

совпадающего по форме с уравнением движения классического нелинейного осциллятора. Эффективная потенциальная энергия показана для разных значений $B < 1$ на рисунке. Среди различных периодических решений уравнения (7) допустимы лишь решения с периодами $T_k = (G+1)/k$, $k=1, 2, 3, \dots$. При малых k и $B \ll 1$ такие решения имеют сигнал $\varphi(x')$, который состоит из широких $\Delta x' \approx T_k/2$ областей стационарности $\varphi \approx \varphi_+$, φ_- , разделенных узкими $\delta x' \approx (A-1)^{-1/2}$ переходными областями. Решения такого типа аналогичны доменам в распределенных системах, а переходные области — доменным стенкам [6].

Стационарные решения типа «временных доменов» оказываются неустойчивыми, изменение формы доменов сводится либо к их росту, либо к сокращению. Мы определим скорость роста (сокращения) домена с $k=1$, возникающего при начальных условиях вида (4). Для этого будем искать решение уравнения (6) в виде

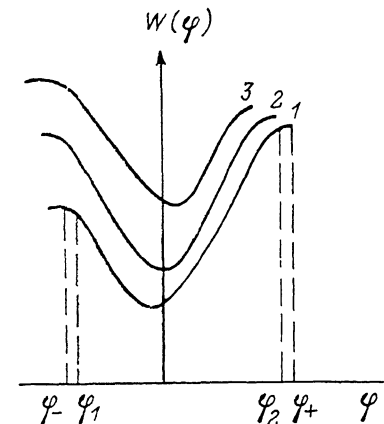
$$\varphi = \varphi(x' - v(x')n), \quad (8)$$

где

$$v(x') = \begin{cases} v, & x' > x_1, \\ -v, & x' < x_1. \end{cases}$$

Из (6) и (8) для функции $\varphi(x')$ следует уравнение

$$\frac{1}{2}(1-v^2)\varphi'' \pm v\varphi' = -\frac{dW}{d\varphi}, \quad (9)$$



Эффективная потенциальная энергия $W(\varphi)$ для уравнения (7).
1 — $B > 0$, 2 — $B = 0$, 3 — $B < 0$.

которое по форме совпадает с уравнением движения частицы с трением $\pm v$ между двумя точками поворота φ_1 и φ_2 (см. рисунок). Знаки «+» и «-» соответствуют двум направлениям движения. При $B \ll 1$ величина v оказывается малой, а граничное условие сводится к условию периодичности с периодом $T_1 = G + 1$. Большой период движения $T_1 \gg 1$ означает, что обе точки поворота близки к максимумам потенциальной энергии $W(\varphi)$. В окрестностях этих максимумов имеем

$$W(\varphi) = W(\varphi_+) - \frac{\omega_+^2}{4} (\varphi - \varphi_+)^2, \quad \varphi \simeq \varphi_+,$$

$$W(\varphi) = W(\varphi_-) - \frac{\omega_-^2}{4} (\varphi - \varphi_-)^2, \quad \varphi \simeq \varphi_-. \quad (10)$$

Здесь $\omega_{\pm}^2 = 2k_{\pm}$, $k_{\pm} = A \cos \psi_{\pm} - 1$, φ_{\pm} — решения уравнения $A \sin \varphi_{\pm} = \varphi_{\pm} - B$. При малых v с логарифмической точностью размер домена (расстояние между его стенками) равен

$$Y = \frac{2}{\omega_+} \ln \left| \frac{\varphi_+}{\varphi_+ - \varphi_2} \right| = T_1 - \frac{2}{\omega_-} \ln \left| \frac{\varphi_-}{\varphi_- - \varphi_1} \right|. \quad (11)$$

Изменение длины домена со временем определяется относительной скоростью движения его стенок $dY/dn = 2v$. Эта скорость может быть найдена интегрированием (9) по φ от φ_1 до φ_2 , что дает соотношение баланса энергии при колебаниях [5]

$$\frac{dY}{dn} = 2 [W(\varphi_2) - W(\varphi_1)]/J, \quad J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (d\varphi/dx) d\varphi. \quad (12)$$

Из (10)–(12) следует зависимость скорости роста домена от его длины

$$\frac{dY}{dn} = \frac{2}{J} \left[W(\varphi_+) - W(\varphi_-) - \frac{\omega_+^2 \varphi_+^2}{4} l^{-\omega_+ Y} + \frac{\omega_-^2 \varphi_-^2}{4} l^{-\omega_- (T_1 - Y)} \right]. \quad (13)$$

Входящие в (13) величины J , $W(\varphi_{\pm})$, ω_{\pm} нетрудно вычислить при $A - 1 \ll 1$. В этом случае $J = 2/9 (A - 1)^{3/2}$, $\omega_{\pm} = 2 (A - 1) \mp B/\sqrt{A - 1}$, $W(\varphi_+) - W(\varphi_-) = 3/8\sqrt{6} (A - 1)B$, а уравнение (5) применимо во всем интервале $\varphi_- < \varphi < \varphi_+$. При $A \simeq 1$ в непосредственной близости от границы домена уравнения (5), (6) становятся неприменимыми, что, однако, не меняет общего характера решения. При этом величины J , ω_{\pm} , φ_{\pm} становятся порядка единицы.

Формула (13) дает качественную картину развития этапа установления при переключении БОП, вызываемом знакопеременным начальным условием, подобную кинетике фазового перехода первого рода в одномерной системе. Величина B характеризует отклонение от равновесия между «фазами» φ_+ и φ_- .

При $B = 0$ $W(\varphi_+) = W(\varphi_-)$ и «фазы» φ_+ и φ_- находятся в неустойчивом равновесии. Стационарный домен имеет размер $Y = (G + 1)/2$, однако ввиду его неустойчивости происходит разрастание «фазы», занимающей при данных начальных условиях больший размер, до полного периода $G + 1$. Время такого разрастания экспоненциально велико. При $B > 0$ устойчива фаза φ_+ , при $B < 0$ — фаза φ_- , а размер стационарного домена оказывается порядка ширины доменной стенки. Поэтому при подаче импульса переключения, задающего начальные условия типа (4), происходит быстрое формирование временного домена, а затем его более медленный (при $|B| \ll 1$) рост до полного заполнения периода $G + 1$ устойчивой фазой.

Ввиду экспоненциально слабого взаимодействия между доменными стенками эволюция этапа установления при начальном условии, задающем большее число доменных стенок, происходит таким же образом.

Устойчивый колебательный режим аналогичного характера (названный авторами «квазисолитонным») был недавно теоретически предсказан для распределенной бистабильной системы — кольцевого резонатора в работе [4]. Как видно из приведенного выше рассмотрения, такой режим оказывается долгоживущим лишь в узкой области изменения ($|B| \ll 1$) параметра, характеризующего отклонение от равновесия между двумя устойчивыми состояниями системы.

Авторы благодарны Б. М. Ашкинадзе за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Garmire B., Marburger J. H., Allen S. D., Winfil H. G. // Appl. Phys. Lett. 1979. Vol. 34. N 6. P. 374—375.
 [2] Nardone P., Mandel P., Kapral R. // Phys. Res. A. 1986. Vol. 33. N 4. P. 2465—2469.

- [3] Мурина Т. А., Розанов Н. Н. // Квантовая электрон. 1981. Т. 8. № 6. С. 1186—1192.
 [4] Гайнер А. В., Сурдутович Г. И. // Квантовая электрон. 1988. Т. 15. № 5. С. 975—977.
 [5] Гуревич А. В., Минц Р. Г. // УФН. 1984. Т. 142. № 1. С. 61—99.

Ленинградский
 политехнический институт
 им. М. И. Калинина

Поступило в Редакцию
 26 июля 1988 г.
 В окончательной редакции:
 4 января 1989 г.

01; 05

Журнал технической физики, т. 59, в. 10, 1989

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ И СВЕРХПРОВОДНИКАХ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ РЕЛАКСАЦИИ

С. Л. Соболев

Волны переключения однородных состояний, распространяющиеся в нормальных металлах и сверхпроводниках [1], а также в других физических, химических и биологических системах [2], описываются обычно уравнениями параболического типа, не учитывающими процессы релаксации. Однако при низких температурах в твердых телах [3], нормальных металлах и сверхпроводниках [1] процессы релаксации начинают играть существенную роль. В этом случае температура в среде T и плотность теплового потока q связаны соотношением [4]

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (1)$$

где τ — время релаксации, λ — коэффициент теплопроводности, t — время.

Из (1) и закона сохранения энергии можно получить уравнение для определения температуры, которое в одномерном случае при движении источника тепловыделения с постоянной скоростью V имеет вид

$$(\lambda - c\rho V^2\tau) \frac{d^2 T}{dx^2} - \left(c\rho V + \tau V \frac{\alpha}{H}\right) \frac{dT}{dX} + \frac{H}{H} \left(Q - \alpha(T - T_0) + \tau V \frac{dQ}{dX}\right) = 0, \quad (2)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность; X — координата; Q — интенсивность источника тепловыделения; α — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду; T_0 — начальная температура; H — толщина слоя, по которому движется источник.

Решение уравнения (2), полученное методом преобразования Фурье, запишем сразу в безразмерном виде

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - iu\varphi) \exp(-iuX) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \exp(iux) dx}{u^2(1 - \varphi^2) - iu\varphi(1 + B) + B} du, \quad (3)$$

где $\varphi = V/v$ — безразмерная скорость движения источника, $v = (a/\tau)^{1/2}$ — скорость распространения теплового импульса в среде [4], a — коэффициент температуропроводности, $\theta = (T - T_0)/(T_m - T_0)$, T_m — максимальная температура, $B = \alpha\tau/Hc\rho$, $\omega = Q\tau/Hc\rho(T_m - T_0)$.

Из (3) следует, что при любой функции тепловыделения безразмерная температура перед фронтом волны равна нулю, если $\varphi \geq 1$. Следовательно, автоволновые процессы с тепловым механизмом распространения возможны только со скоростями $\varphi < 1$.

Для ступенчатой функции тепловыделения $Q(X)$ [1], такой что $Q=0$ при $X < 0$ и $Q = Q^* = \text{const}$ при $X > 0$, из (3) получим

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{B(1 + \gamma_1\varphi) \exp \gamma_1 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1}, & x < 0, \\ 1 - \frac{B(1 + \gamma_2\varphi) \exp \gamma_2 x}{(1 - \varphi^2)(\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_2}, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$