

01; 10

О ВЛИЯНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА РЕЗОНАНСНЫЙ ВЫВОД ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ НАКОПИТЕЛЯ

Н. Н. Наугольный

В работе аналитически исследуется влияние объемного заряда ионов на медленный вывод электронов из накопителя—растяжителя (НР). Получены формулы для девиации угла и величины заброса за септум для резонанса произвольного порядка радиальных бетатронных колебаний. Показано, что в установках на низкие и средние энергии для получения прецизионных параметров выведенного пучка необходимо принимать меры по уменьшению плотности компенсирующего ионного фона.

В современных накопителях—растяжителях (НР) медленный вывод заряженных частиц осуществляется, как правило, на одномерном нелинейном резонансе радиальных бетатронных колебаний.

Одним из основных факторов, препятствующих получению выведенных пучков с прецизионными параметрами, являются нелинейности ведущего магнитного поля и полей объемного заряда.

Влияние «машинных» нелинейностей весьма подробно исследовано и описано в литературе (см., например, [1]).

Менее изученным является вопрос о параметрах выводимых электронов, движущихся в спадающем поле ионного остова. Специфическая нелинейность этого поля, полная компенсация которого представляет известные технические трудности, может оказаться доминирующим фактором в формировании эмиттанса выводимого пучка большой интенсивности. Кроме того, пространственный заряд приводит к нарушению равномерности вывода. Настоящая работа посвящена аналитическому изучению данного вопроса.

Поле компенсированного релятивистского пучка

Найдем предварительно общие приближенные выражения для сил, действующих на стационарный электронный пучок заданной плотности $\rho(x, y, z, t)$, движущийся со скоростью v вдоль оси z в ионном облаке плотности $\rho_i(x, y, z, t)$. Малым параметром разложения будет служить величина $\mu = (k_s/k_\perp \gamma)^2$, где k_s^{-1}, k_\perp^{-1} — характерные размеры неоднородностей пучка по азимуту и поперечным координатам x, y . Введем переменную $s = z - vt$ и запишем уравнения Максвелла в виде (обозначения работы [2])

$$\int dSE = 4\pi \int dV (\rho - \rho_i), \quad (1)$$

$$\oint d\mathbf{l}\mathbf{H} = \int dS (4\pi c^{-1}(\rho v - \rho_i v_i) - \beta \partial_s \mathbf{E}), \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla_x \mathbf{E} = \beta \partial_s \mathbf{H}, \quad \beta = v/c. \quad (4)$$

Плотность тока $\rho_i v_i$ обязана своим происхождением трем основным типам дрейфового движения ионов в накопителе (электрическому, градиентному и

центробежному); скорость v_i — заданная функция параметров ведущего магнитного поля, а также плотностей зарядов ρ_i ; ρ_i находится из соответствующей системы уравнений дрейфового приближения (см., например, [3]).

В уравнениях (1)–(4) перейдем к криволинейным координатам u_1, u_2, s произвольной эвклидовой метрики, так что квадрат элемента длины $dl^2 = l_1^2 du_1^2 + l_2^2 du_2^2 + ds^2$, где l_i — известные параметры Лямэ.

Интегрируем первые два уравнения, выбрав в качестве объема dV цилиндр внутри пучка произвольного «радиуса» $u_1 = \text{const}$ высотой ds . Пользуясь соотношениями $du_2(l_1 H_2) = 0$ и $\partial_{u_2}(l_1 E_1) = 0$, вытекающими, соответственно из (3), (4), приведем результат к виду

$$l_1 E_1 \oint du_2 l_2 l_1^{-1} = \int du_1 \oint du_2 l_1 l_2 (4\pi(\rho - \rho_i) - \partial_s E_s), \quad (5)$$

$$l_1 H_2 \oint du_2 l_2 l_1^{-1} = \int du_1 \oint du_2 l_1 l_2 (4\pi(\beta\rho - \beta_i \rho_i) - \beta \partial_s E_s). \quad (6)$$

Дополнив (5), (6) уравнением (4) для второй компоненты ротора

$$\partial_{u_1} E_s = l_1 \partial_s (E_1 - \beta H_2), \quad (7)$$

получим замкнутую систему интегрально-дифференциальных уравнений для искомых компонент E_1, H_2, E_s .

Удобнее, однако, вместо (7) использовать соотношение

$$E_s = \partial_s \int du_1 \left\{ l_1 E_1 \gamma^{-2} - \frac{4\pi\beta}{\oint du_2 l_2 l_1^{-1}} \int du_1 \oint du_2 l_1 l_2 (\beta - \beta_i) \rho_i \right\}. \quad (8)$$

В нулевом приближении по μ пренебрегаем в (8) E_1 , подставляя $E_s^{(0)}$ в (5), (6), получаем $E_1^{(0)}, H_2^{(0)}$. Возвращаясь к (8), находим поправку первого приближения $E_s^{(1)}$, и т. д. Ввиду малости μ практически достаточно ограничиться нулевым приближением для E_1, H_2 и первым (если $\partial_i \rho_i = 0$) для E_s . Например, для параметров Н-100 ХФТИ АН УССР [4] $\gamma \simeq 2 \cdot 10^2$, $k_s/k_\perp \sim 10^{-2}$, $\mu \ll 10^{-8}$; для НР-2000 [5] $\gamma = (1.6-6) \cdot 10^3$, $k_s/k_\perp \sim 1$ в режиме вывода, $\mu \ll 10^{-6}$.

При выводе формулы (8) предполагалось, что поперечное сечение камеры совпадает с одной из координатных поверхностей.

Выпишем выражение для модуля поперечной составляющей силы, действующей на электронный пучок, пренебрегая азимутальной модуляцией ρ_i и вихревой добавкой ($\beta_i = 0$) поля ионов,

$$f_\perp = \frac{4\pi e}{l_1 \oint du_2 l_2 l_1^{-1}} \int du_1 \oint du_2 l_1 l_2 (\rho \gamma^{-2} - \rho_i). \quad (9)$$

В дальнейшем примем, что коэффициент компенсации пучка $\kappa = \langle \rho_i / \rho \rangle_v \gg \gamma^2$. Поперечное сечение ионного остова можно считать подобным электронному, однако его площадь несколько больше, если принять во внимание тепловое движение ионов.

Ниже нам понадобится выражение для силы, действующей на электроны со стороны ионного пучка эллиптического поперечного сечения с полуосями d, b . Полагая $x = (d^2 - b^2)^{1/2} \text{ch } u_1 \cos u_2$, $y = (d^2 - b^2)^{1/2} \text{sh } u_1 \sin u_2$, $l_1 = l_2 = (\text{ch}^2 u_1 - \cos^2 u_2)^{1/2}$, $\rho_i = \sum_i (Z_i N_i e) / (2\pi^2 db R_s)$ (нормировка на полный заряд $e \sum_i Z_i N_i$), из (9) находим в результате интегрирования

$$f_\perp = \begin{cases} -\pi d e_c e \rho_i \frac{\text{sh } 2u_1}{(\text{ch}^2 u_1 - \cos^2 u_2)^{1/2}}, & 0 \leq u_1 \leq \text{arth } b/d, \\ -2\pi e_c^{-1} b e \rho_i (\text{ch}^2 u_1 - \cos^2 u_2)^{-1/2}, & u_1 > \text{arth } b/d, \end{cases} \quad (10)$$

где $e_c = (d^2 - b^2)^{1/2} \cdot d^{-1}$ — эксцентриситет эллипса.

Если пренебречь связью с вертикальными колебаниями, радиальное отклонение x частицы от равновесной орбиты описывается уравнением

$$x'' + g(\theta)x = \alpha_q(\theta)x^{q-1} + f_x, \quad (11)$$

в котором $g(\theta)$ — структурная функция, коэффициент $\alpha_q(\theta)$ при нелинейности порядка $q-1$ — периодическая функция азимута θ , содержащая резонансную (m -ю) гармонику

$$\alpha_q(\theta) = \sum_k |\alpha_{qk}| \exp[i(\arg \alpha_{qk} + k\theta)],$$

f_x — нерезонансное слагаемое, в отсутствие «машинных» нелинейностей $f_x = \left(\frac{R_s^2}{m_e \gamma v^2}\right) f_\perp$ при $y=0$. Здесь m_e — масса покоя, v — скорость электрона.

Следуя [6], решение (8) ищем в виде

$$x = 2reAf(\theta)e^{i\nu\theta}, \quad A = ae^{i\eta},$$

где A — медленно меняющаяся амплитуда, $f(\theta)$ — функция Флоке.

Введя расстройку $\delta = \nu - (m/q)$ и полагая $\alpha = \alpha_{qm}e^{-i\arg \alpha_{qm}}$, где

$$\alpha_{qm} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \alpha_q(\theta) f^{*q} e^{-i m \theta},$$

найдем в результате усреднения по азимуту

$$\begin{aligned} a' &= \hat{a}a^{q-1} \sin qw, \\ w' &= \delta + \hat{a}a^{q-2} \cos qw - \frac{1}{2a} \langle f^* e^{-i\nu\theta} f_x \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где $w = \delta\theta + \eta - (1/q) \arg \alpha_{qm}$.

Гамильтониан системы (9), (10) в переменных действия $I = a^2$, фаза w есть (см. также [6])

$$H = \delta I - J(I) + \frac{2}{q} \hat{\alpha} I^{q/2} \cos qw, \quad (14)$$

где

$$J(I) = \int_0^I \langle f^* e^{-i\nu\theta} f_x \rangle dI^{1/2}.$$

Пользуясь (11), находим девиацию угла выведенных частиц при адиабатическом сжатии сепаратрисы

$$\cos qw = \frac{q}{2\hat{\alpha}I_s^{q/2}} \left\{ \delta(I - I_s) + J(I_s) - J(I) + \frac{2}{q} \hat{\alpha} I^{q/2} \right\}, \quad (15)$$

I_s — значение действия на септуме, I пробегает интервал $[I_s, I_f]$, где I_s, I_f — стационарные решения уравнений (12), (13), соответствующие начальной и конечной величинам сепаратрисы по амплитуде в процессе вывода.

Другую важную характеристику — величину заброса Δx за септум можно оценить с помощью (12), (15). Полагая $I/I_s \ll 1$, мы получим

$$\Delta x \simeq 2\pi q \hat{\alpha}^{1/2} I_s^{(q-1)/2} \left\{ 1 - \frac{q^2}{8} \left(\left(\frac{I_0}{I_s} \right)^{(q-2)/2} + \frac{J(I_s) - J(I)}{\hat{\alpha} I_s^{q/2}} \right)^2 \right\}, \quad (16)$$

где $I_0 = |\delta/\hat{\alpha}| 2/(q-2)$ — стационарное решение системы (12), (13) без учета пространственного заряда при $q \neq 2$.

Отдельного обсуждения требует случай параметрического резонанса. Для замыкания сепаратрисы будем считать, что f_x содержит слагаемое $\alpha_p x^3$. В ре-

зультате усреднения в фазовом уравнении (10) появится добавка $-\alpha_p a^2$, где $\hat{\alpha}_p = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |\beta| \alpha_p$, и формулы (15), (16) модифицируются следующим образом:

$$\cos 2w = \frac{1}{\hat{\alpha} I_s} \left\{ \delta (I - I_s) + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_p (I_s^2 - I^2) + J(I_s) - J(I) + \hat{\alpha} I \right\}, \quad (17)$$

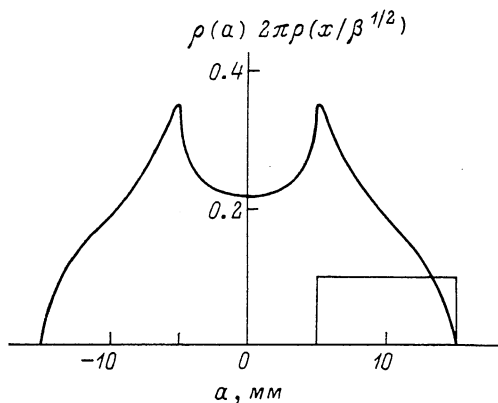
$$\Delta x \simeq 4\pi \hat{\alpha} x_s \left\{ 1 - \frac{1}{2\delta^2} \left(-\delta + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_p I_s + \frac{J(I_s)}{I_s} \right)^2 \right\}, \quad (18)$$

а связь расстройки δ с амплитудой $I_0^{1/2}$ дается соотношением $I_0 = (\delta + \hat{\alpha}) / \hat{\alpha}_p$.

В электронных НР определенную роль играет радиационное трение. Для учета его влияния введем в правую часть уравнения (11) слагаемое $-2\zeta x'$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$a' = \hat{\alpha} a^{q-1} \sin qw - \zeta a, \quad (19)$$

из которого следует, что при $q \neq 2$ существует область устойчивых амплитуд, минимальный размер которой дается неравенством $a^{q-2} \leq \zeta \cdot \hat{\alpha}^{-1}$. Поэтому



в установках с сильным затуханием для обеспечения полного и равномерного вывода электронов наиболее целесообразным представляется использование параметрического резонанса. В остальных случаях инжектируемый пучок формируется таким образом, чтобы его функция распределения $\rho(a)$ по амплитудам была близка к ступенчатой

$$\rho(a) = \frac{1}{a_i - a_f}, \quad a \in [a_f; a_i], \quad (20)$$

при этом распределение по вертикальным амплитудам остается рэлеевским. Формуле (20) отвечает несколько громоздкое распределение по отклонениям

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(x_i - x_f)} \ln \frac{\sqrt{x_i^2 - x^2 + x_i}}{\sqrt{x_f^2 - x^2 + x_f}}, & |x| \in [0; x_f], \\ \frac{1}{\pi(x_i - x_f)} \ln \frac{\sqrt{x_i^2 - x^2 + x_i}}{|x|}, & |x| \in [x_f; x_i]. \end{cases} \quad (21)$$

Оба распределения нормированы на единицу. Графики функций (20), (21) показаны на рисунке при $\beta_s = 1$.

Сила f_{\perp} вне пучка не критична по отношению к распределению плотности внутри ионного остова; с другой стороны, эллиптичность его формы весьма важна для корректного учета влияния объемного заряда на параметры выводимых частиц. Поэтому во избежание неоправданно громоздких расчетов, связанных с распределением (21), для оценки входящих в (15)–(18) интегралов $J(I)$, $J(I_s)$ воспользуемся формулой (10) при $u_2 = 0$. В декартовых координатах

$$f_x = -\frac{Ne^2R_s}{\pi m_e \gamma v^2} (b^2 - d^2 + x^2)^{-1/2}, \quad x \geq d, \quad (22)$$

где $N = \sum_i Z_i N_i$ — полное число ионов.

Вычислим согласно (15) максимальную величину нелинейного сдвига частоты $\delta\nu$. Полагая $x \simeq d$, получаем простую оценку

$$\delta\nu \simeq \chi/db, \quad (23)$$

где $\chi = (Nr_e R_s)/(2\pi\gamma v\beta^2)$, r_e — классический радиус электрона.

Пользуясь (22), из (14) находим

$$J(I_s) - J(I) \approx 2\chi \ln \frac{\sqrt{b^2 - d^2 + x_s^2} + x_s}{\sqrt{b^2 - d^2 + x^2} + x} \sim \chi$$

для типичных параметров систем вывода НР.

Определение уровня компенсации объемного заряда электронов представляет собой самостоятельную нетривиальную задачу, особенно в нестационарном режиме. Приведем численный пример, полагая $\kappa=1$. Для параметров установки типа НР-2000 [5] $R_s=3.4 \cdot 10^3$ см, $d=2.5$ см, $b=0.1$ см, $v \simeq 16/3$, $\gamma=4 \cdot 10^3$, при токе $I_0=0.5$ А погонная плотность ионов $N/(2\pi R_s)=10^8$ см⁻¹. При этом $\chi \cdot \text{см}^2 \simeq 1.6 \cdot 10^{-2}$ и $\delta\nu \simeq 6.4 \cdot 10^{-2}$, т. е. превышают запланированный диапазон изменения расстройки $\Delta\nu=1.5 \cdot 10^{-2}$.

Приведенные оценки показывают, что для получения прецизионных параметров выведенных электронных пучков, отвечающих современному уровню ядерно-физических экспериментов, необходимо принимать специальные меры по уменьшению плотности ионов в камере накопителя. Однако в протонных накопителях из-за сравнительно малых значений релятивистского фактора влияние объемного заряда может стать заметным и в некомпенсированных пучках [7, 8].

Список литературы

- [1] Василишин Б. В., Иссинский И. Б., Михайлов В. А. Препринт ОИЯИ. № 9-7498. Дубна, 1973. 32 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1962. 422 с.
- [3] Морозов А. И., Соловьев Л. С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 177—241.
- [4] Григорьев Ю. Н., Гришаев И. А., Довбня А. Н. и др. // Атомная энергия. 1967. Т. 23. № 6. С. 531—536.
- [5] Буляк Е. В., Вишняков В. А., Григорьев Ю. Н. // Тр. IX Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. С. 272—275.
- [6] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1962. 345 с.
- [7] Бережной В. А., Рыбалко В. С. // Тр. IV Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. М.: Наука, 1975. Т. II. С. 84—86.
- [8] Моисеев В. А., Остроумов П. Н., Севергин Ю. П. // X Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Аннот. докл. Дубна, 1986. С. 74—75.

Поступило в Редакцию
13 ноября 1987 г.
В окончательной редакции
7 февраля 1989 г.