

01; 10

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В КОЛЬЦЕВЫХ ПУЧКАХ

П. Ф. Белошицкий, Н. Ю. Казаринов, Э. А. Перельштейн

В работе [1] были найдены нелинейные стационарные азимутальные волны пространственного заряда в релятивистских кольцевых пучках заряженных частиц при отсутствии диссипации. Волны представляют собой последовательность сгустков, движущихся по орбите с угловой скоростью, равной средней частоте ω_0 обращения частиц. Самофокусировка сгустков происходит в условиях кулоновского взаимодействия частиц, эффективная «масса» которых отрицательна [2, 3]. Такие сгустки могут быть использованы в атомной физике для коллективных методов ускорения и генерации электромагнитных волн. В режиме сильной нелинейности, когда разброс в пучке по частотам обращения значительно меньше порогового, для гармоник с номером n в линейной теории [4]

$$\overline{\Delta\omega_{\text{пор}, n}^2} = -\alpha \frac{2\nu}{\gamma_0} \eta \omega_0^2 \frac{|\tilde{Z}_{n, n\omega_0}|}{n} \quad (1)$$

(α — коэффициент порядка единицы, $\nu = N_e/2\pi r_0 e^2/mc^2$, N_e — число частиц в кольцевом пучке, r_0 и γ_0 — средний радиус обращения и релятивистский фактор, $\eta = (E/\omega)(\partial\omega/\partial E)_{\omega=\omega_0} = (1/\gamma_0^2) - (1/\nu_r^2)$, $E = mc^2\gamma_0$, ν_r — частота бетатронных колебаний, $\tilde{Z}_{n, n\omega_0} = (c/4\pi) Z_{n, n\omega_0}$, $Z_{n, n\omega_0}$ — импеданс пучка с камерой) распределение частиц в сгустке подчиняется закону

$$f(\varphi, \omega) \propto \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right] \exp\left[-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{\Delta\varphi^2}\right], \quad (2)$$

где f — функция распределения, φ и ω — азимутальная координата и частота обращения частицы, $\varphi_0 = \omega_0 t + \varphi(t=0)$ — азимут центра сгустка, t — время.

Угловой разброс в пучке в том же предположении

$$\overline{\Delta\varphi^2} \approx \frac{\overline{\Delta\omega^2}}{2n_0^2 \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \overline{\Delta\omega_{\text{пор}, n}^2} n^2}. \quad (3)$$

Здесь n_0 — число сгустков на орбите, n_{\min} и n_{\max} определяют диапазон наиболее существенных (т. е. дающих наибольший вклад в действующую на частицы силу) гармоник собственных полей сгустков. Особенностью нелинейных волн является произвольно малое допустимое значение энергетического разброса в сгустках. Угловой размер сгустка, как это следует из (3), в этом случае также мал $(\overline{\Delta\varphi^2})^{1/2} \ll 1$. Учет эффектов диссипации ($\text{Re}Z_{n, n\omega_0} \neq 0$) и исследование устойчивости нелинейных стационарных волн (2) в работе [1] не проводились и являются предметом настоящей работы.

Существование квазистационарных решений при наличии в системе слабой диссипации можно показать, используя метод, развитый в [1], если перейти к новым независимым переменным, исключая движение системы как целого. Для коэффициентов Фурье от функции распределения C_n получается система уравнений

$$\overline{\Delta\omega^2} \mu C_n - \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left(\mu_m C_{n-m} - i \left(\frac{\partial \omega}{\partial W} \right)_{\omega=\omega_0} W_0 C_m \right) = 0 \quad (4)$$

(W_0 — усредненный по частицам азимутальный момент, коэффициенты $\mu_m = (2\nu/\gamma_0)\eta\omega_0^2 (i\bar{Z}_{m, n\omega_0}/m)$, т. е. в соответствии с (1) приблизительно равны пороговому среднеквадратичному разбросу по частотам обращения для гармоник с номером m), имеющая решения при $\text{Re} Z_{n, n\omega_0} \neq 0$. В случае малости разброса в сгустках $\overline{\Delta\omega^2}$ по сравнению с пороговым $\Delta\omega_{\text{пор}, n}^2$ функция распределения по-прежнему имеет вид (2) с заменой ω_0 на $\omega_0(t)$, φ_0 на $\varphi_0(t) = \int \omega_0(t) dt + \varphi(t=0)$, где $\omega_0(t)$ — средняя по всем частицам частота обращения, учитывающая медленное изменение энергии.

Изучение устойчивости волн пространственного заряда проводилось методом численного моделирования сгустков ансамблем N «крупных» частиц, движение которых описывалось системой уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{d\tau} &= \zeta_k, \quad \frac{d\zeta_k}{d\tau} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \bar{Z}(\xi_k - \xi_m), \\ \xi &= \varphi - \omega_0 t, \quad \zeta = \frac{1}{\chi} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \tau = \chi \omega_0 t, \\ \chi &= \left(-\frac{2\nu}{\gamma_0} \eta \right)^{1/2}, \quad \bar{Z}(\varphi) = \frac{C}{4\pi} \sum_m Z_{m, n\omega_0} e^{im\varphi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где k — номер частицы.

Уравнения (5) справедливы в нерезонансном случае, когда импеданс $Z_{n, n\omega_0}$ не имеет особенностей вблизи $\Omega_n = n\omega_0$. Пороговое условие (1) в переменных ξ, ζ принимает вид

$$\bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2 = \alpha \frac{|\bar{Z}_{n, n\omega_0}|}{n}, \quad (2a)$$

а условие применимости одномерной модели — $(\overline{\Delta\xi^2})^{1/2} \gg \chi (\overline{\Delta\zeta^2})^{1/2}$.

Рассмотрим сначала устойчивость относительно длинноволновых возмущений одиночного сгустка, частицы которого в начальный момент времени расставлены в фазовой плоскости в соответствии с (2), (3). Система уравнений (5) решалась методом Рунге—Кутты для 1000—2000 частиц. Для расчетов использовался модельный импеданс вида

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{n, n\omega_0} &= A + iBn, \quad 1 \leq n \leq n_{\text{max}}, \\ \bar{Z}_{n, n\omega_0} &= 0, \quad n > n_{\text{max}} \end{aligned} \quad (6)$$

с $A=0.01$, $B=0.1$ и $n_{\text{max}}=3-10$.

Как показали результаты численного моделирования, сгусток с начальными условиями (2), (3) оказывается устойчивым относительно малых возмущений. Малые возмущения возникают как при переходе от непрерывной функции распределения к «крупным» частицам, так и вследствие неточности соотношения (3), полученного в приближении $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 \ll \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$ и для $\text{Re} Z_{n, n\omega_0} = 0$. Начальный угловой размер сгустка выбирался $(\overline{\Delta\xi^2})^{1/2} = (\overline{\Delta\varphi^2})^{1/2} \ll 2\pi$, что соответствует наиболее интересному случаю $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 < \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2 \simeq 0.1$ в соответствии с (2a) и (6). Под действием сил пространственного заряда сгусток вращается в фазовой плоскости и за несколько десятков оборотов малые (несколько процентов) колебания углового размера и среднеквадратичного разброса по частотам обращения заглушают, так что $\overline{\Delta\xi_{\tau \rightarrow \infty}^2} \simeq \overline{\Delta\xi_{\tau=0}^2}$ и $\overline{\Delta\zeta_{\tau \rightarrow \infty}^2} \simeq \overline{\Delta\zeta_{\tau=0}^2}$. Сгусток оказывается устойчивым во всей области начальных условий $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 \leq \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$. При $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 > \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$ и соответствующем угловом размере сгусток постепенно расплывается и заполняет всю орбиту.

Численное значение импеданса (6) несущественно при определении области устойчивости сгустка $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2$: при изменении величины $Z_{n, n\omega_0}$ (например, умень-

шении в 10 раз) соответственно меняется предельное значение начального разброса в сгустке, при котором он еще остается устойчивым. Этот вывод справедлив, естественно, если $|Z_{n, n_{\omega_0}}|/n \ll 1$, т. е. угловой размер сгустка $(\overline{\Delta \xi_{\tau=0}^2})^{1/2} \ll \ll 2\pi$. Не меняет выводов и число существенных гармоник в поле n_{\max} , оно

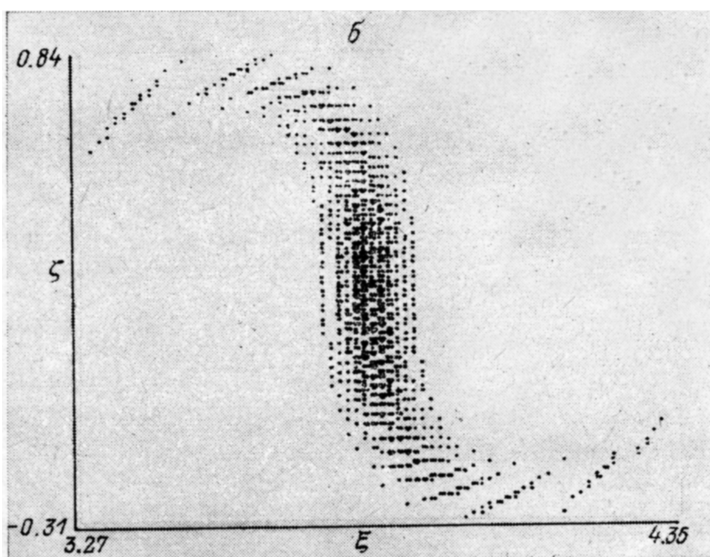
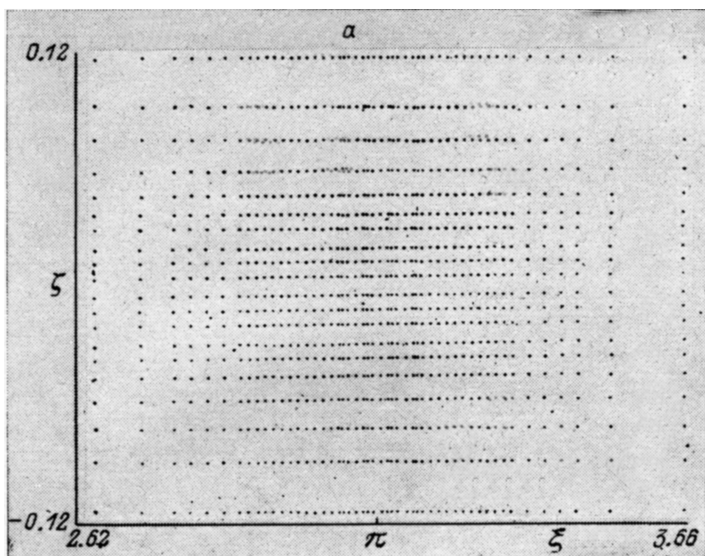


Рис. 1. Фазовый портрет одиночного сгустка с $\xi_{\tau=0}^2 = 1/25 \xi_{\text{ог.л.}}^2$, $\overline{\Delta \xi_{\tau=0}^2} = 35 \overline{\Delta \xi_c^2}$ ($n_{\max} = 3$).
 а — 0, б — 5, в — 15, г — 40.

лишь в соответствии с (3) изменяет согласованный с разбросом по частотам обращения угловой размер устойчивого сгустка.

Рассмотрим теперь более широкий, чем (2), (3), класс начальных условий в задаче об устойчивости одного сгустка. Пусть частицы в начальный момент распределены согласно (2), но соотношение (3) не выполняется. Тогда при фиксированном $\xi_{\tau=0}^2 \leq \xi_{\text{пор}}^2$, n в широком диапазоне значений начального углового размера сгустка $\overline{\Delta \xi_1^2} \leq \overline{\Delta \xi_{\tau=0}^2} \leq \overline{\Delta \xi_2^2}$, $\overline{\Delta \xi_2^2} \leq \overline{\Delta \xi_c^2}$, $\overline{\Delta \xi_1^2} \geq \overline{\Delta \xi_c^2}$, где $\overline{\Delta \xi_c^2}$ — согласованный угловой размер, он остается компактным образованием, разброс по частотам обра-

щения и угловые размеры которого испытывают заужающие колебания около средних (асимптотических) значений (рис. 1, 2). Кривая 2 на рис. 2 показывает расплывание сгустка при $\bar{\zeta}^2 > \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$. Соотношение между $\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} \rightarrow \infty$ и $\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} \rightarrow \infty$ зависит от начальных условий и приблизительно совпадает с (3), т. е. сгусток приходит к согласованному состоянию.

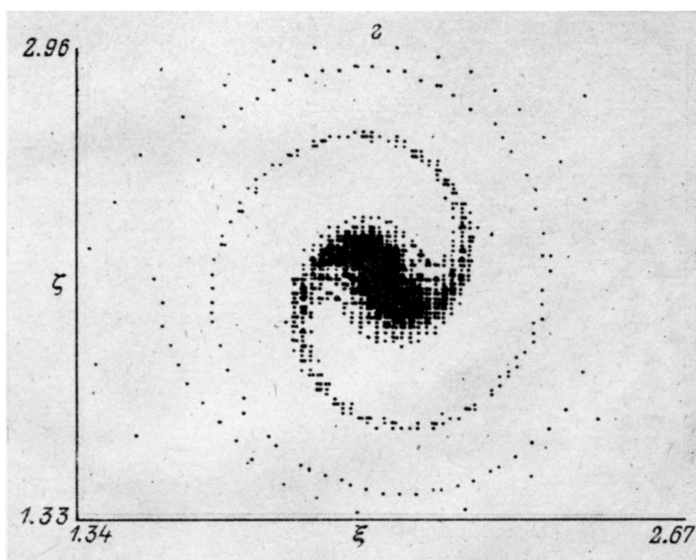
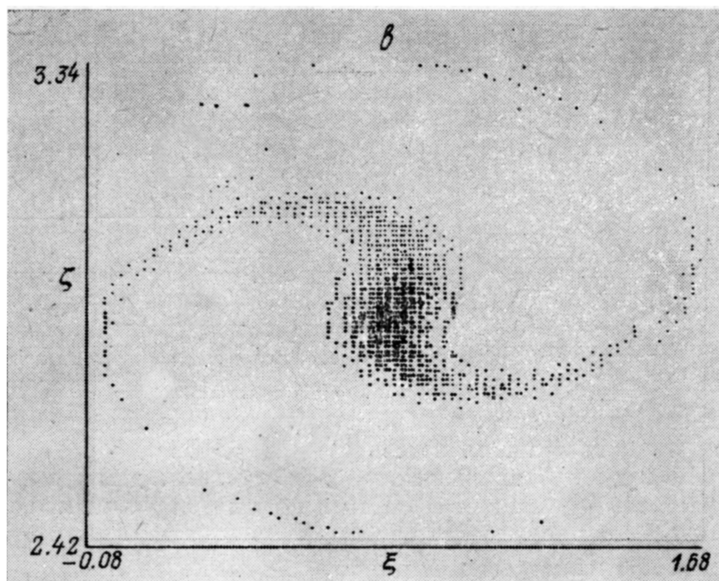


Рис. 1 (продолжение).

При отказе от гауссова вида распределения частиц в фазовой плоскости и замене его другим (например, равномерным) выводы остаются прежними: сгусток устойчив относительно длинноволновых возмущений при $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 \leq \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$ в широком диапазоне его угловых размеров, а соотношение между $\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} \rightarrow \infty$ и $\overline{\Delta \xi_{\tau}^2} \rightarrow \infty$ по-прежнему примерно совпадает с вычисленным с помощью (3).

Рассмотрим теперь устойчивость сгустка в условиях сильной диссипации. Вместо (6) выберем импеданс в виде

$$\bar{Z}_{n, n\omega_0} = \pi n [J'_{2n}(2n) - iE'_{2n}(2n)], \quad n \leq n_{\max},$$

$$\bar{Z}_{n, n\omega_0} = 0, \quad n > n_{\max} \quad (7)$$

($J_{2n}(x)$ и $E_{2n}(x)$ — функции Бесселя в Вебера), соответствующем кольцевому пучку в свободном пространстве [4]. Пусть распределение частиц в сгустке в начальный момент времени выбрано в виде (2), (3) с $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 \ll \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$. Результаты численного моделирования показывают, что в этом случае частицы терлятся из сгустка. Потерянные частицы распределены приблизительно равномерно по азимуту с частотами обращения, меньшими, чем средняя для компактной части пучка. Размеры компактной части пучка меняются незначительно (рис. 3).

Таким образом, сгусток оказывается устойчивым относительно длинноволно-

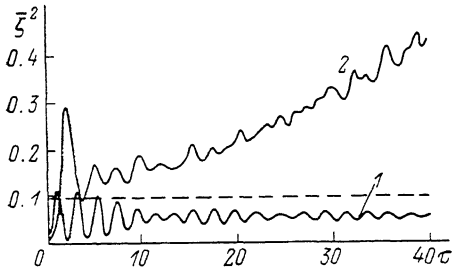


Рис. 2. Зависимость безразмерного разброса в сгустке $\bar{\zeta}^2$ от переменной τ ($n_{\max} = 3$, $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 =$ для $= 1/25 \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$).

$\Delta \bar{\zeta}_{\tau=0}^2$: 1 — $35 \Delta \bar{\zeta}_c^2$, 2 — $175 \Delta \bar{\zeta}_c^2$. Штриховая линия — пороговое значение разброса в линейной теории для импеданса вида (6).

вых возмущений в условиях слабой диссипации $\text{Re } Z_{n, n\omega_0} \leq \text{Im } Z_{n, n\omega_0}$ и неустойчив при наличии больших потерь $\text{Re } Z_{n, n\omega_0} > \text{Im } Z_{n, n\omega_0}$.

Рассмотрим задачу о движении $n_0 > 1$ сгустков, движущихся по орбите со средней частотой обращения ω_0 . Как и прежде, ограничимся рассмотрением пучков с малым собственным разбросом по частотам обращения $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 \ll \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$. Угловой размер сгустка будем выбирать в соответствии с (3), относительное движение сгустков считаем медленным по сравнению с обращением по круговой

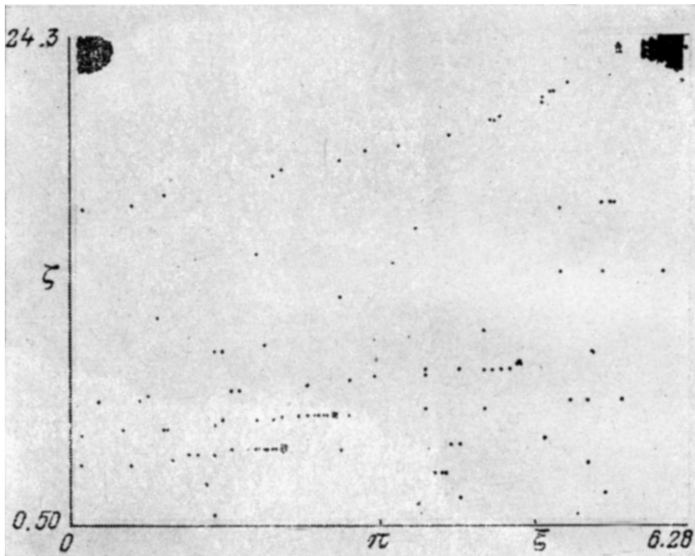


Рис. 3. Фазовый портрет одиночного сгустка в случае сильной диссипации ($n_{\max} = 3$, $\bar{\zeta}_{\tau=0}^2 = 0.1 \bar{\zeta}_{\text{пор}, n}^2$, $\Delta \bar{\zeta}_{\tau=0}^2 = 3 \Delta \bar{\zeta}_c^2$) при $\tau = 5$.

орбите. Качественные выводы о характере движения можно получить, рассмотрев задачу о взаимном движении двух точечных сгустков. В этом случае сгустки описываются приближенной системой уравнений (5), которая имеет интеграл

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + u(\theta) = \text{const}, \quad (8)$$

где $\theta = \xi_1 - \xi_2$, точка означает дифференцирование по t , а потенциал $u(\theta)$ имеет вид

$$u(\theta) = -2\epsilon\mu_n \cos n\theta. \quad (9)$$

Отметим, что в случае двух б-образных сгустков действительная часть импеданса не влияет на их взаимное движение, а сказывается только на изменении средней частоты обращения. Исследуем на устойчивость решения (8), (9) в соответствии с (6) при $\mu_n = \mu$ и ограничимся для простоты $n_{\max} = 3$. Потенциал $u(\theta)$ и сепаратрисы показаны на рис. 4. Как видно из рисунка, взаимное положение сгустков остается неизменным, если в начальный момент времени угловое расстояние между ними равно одному из двух значений $\theta_{\tau=0} = \arccos(-1 - \sqrt{7})/6$, $\theta_{\tau=0} = \pi - \arccos(-1 - \sqrt{7})/6$. Численное моделирование позволяет учесть эффекты конечной величины разброса по частотам обращения в сгустке. Пусть например $\theta_{\tau=0} = \pi/7$. Тогда наряду со взаимным вращением сгустков в фазовой плоскости (рис. 5) вследствие зависимости периода обращения от амплитуды колебаний происходит изменение формы самих сгустков, в асимптотическом пределе возникает характерная спиралевидная структура (рис. 5, $\tau = 60$). В более общем случае произвольного числа существенных гармоник n_{\max} число областей финитного движения $l \leq n_{\max}$, а $u_{\max} - u_{\min} \approx \mu n_{\max}$. Сходная оценка получается при $n_{\max} \rightarrow \infty$, когда μ_n спадает до нуля при доста-

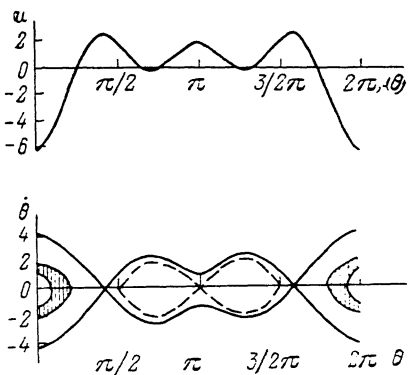


Рис. 4. Потенциал u и сепаратрисы в зависимости от переменной θ для двух точечных сгустков. Штриховой линией показана область допустимых изменений θ , $\dot{\theta}$ для задачи о двух сгустках с $\theta_{\tau=0} = \pi/7$.

точно больших n . Так, при $\mu_n = \mu\delta^2/n^2 + \delta^2$ и $\delta \gg 1$ функция $u(\theta)$ имеет один минимум в точке $\theta = \pi$ и глубина потенциальной ямы примерно равна $\pi/2 \cdot \mu\delta$.

Таким образом, для того чтобы взаимное положение двух сгустков на орбите оставалось неизменным, необходимо, чтобы расстояние между ними в начальный момент времени выбиралось из условия минимизации функции $u(\theta)$ (9), а величина разброса по частотам обращения была меньше глубины потенциальной ямы.

На практике когерентную устойчивость сгустков можно обеспечить с помощью внешней фокусирующей силы. Пусть, например, внешняя сила выбрана в виде бегущей волны $\epsilon(\xi = \varphi - \omega_0 t) = -\partial \tilde{a} / \partial \xi = \epsilon_0 \sin \mu \xi$. Тогда, располагая сгустки в точках минимума функции \tilde{a} , можно подобрать такую амплитуду внешнего поля

$$\epsilon_0 \sim \frac{eN_e}{\pi r_0^2} \frac{1}{N_e} \sum_k \tilde{Z}(\xi - \xi_k), \quad (10)$$

что сгустки будут испытывать малые колебания около равновесных положений. При отсутствии потерь в системе ($\text{Re}Z_n, n\omega_0 \neq 0$) частицы пучка в среднем не будут отбирать энергию у волны. Если же $\text{Re}Z_n, n\omega_0 \neq 0$, то вследствие автофазировки частицы будут выбирать такую фазу бегущей волны, чтобы компенсировать потери на излучение.

В задаче о движении двух сгустков оценку (10) можно конкретизировать. С помощью приближенного интегрирования системы уравнений (5) получаем

$$\frac{\dot{\theta}_z^2}{2} - 2 \sum_m \frac{\text{Im} \tilde{Z}_{m, m\omega_0}}{m} \cos m\theta + \frac{4\epsilon_0}{M} \frac{\pi r_0^2}{eN_e} \cos M\theta, \quad (8a)$$

откуда вытекает

$$\epsilon_0 \sim \left(\frac{\text{Im} \tilde{Z}_{m, m\omega_0}}{m} \right) \max_{m=1, n_{\max}} n_{\max} M \frac{eN_e}{\pi r_0^2}. \quad (10a)$$

В более общем и интересном для приложений случае симметричной расстановки $n_0 \gg 1$ сгустков на орбите оценка (10) представляется сильно завышенной. В пределе $n_0 \rightarrow \infty$ для пучка с нулевым разбросом по частотам обращения $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

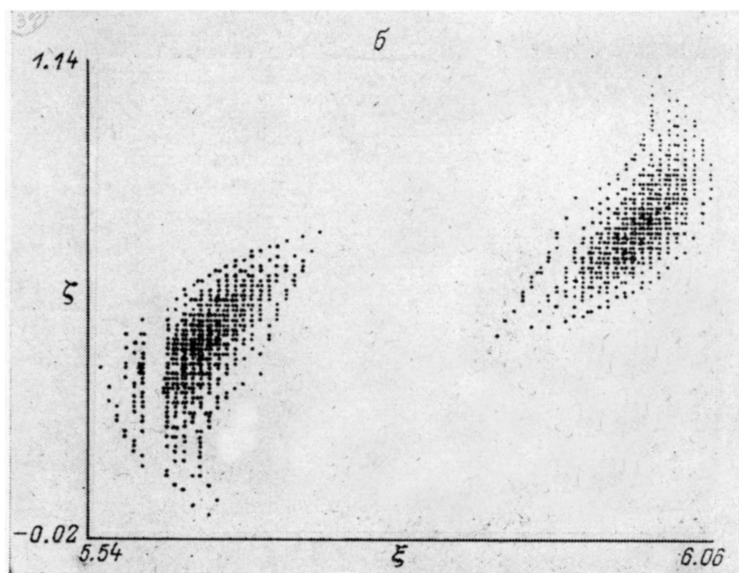
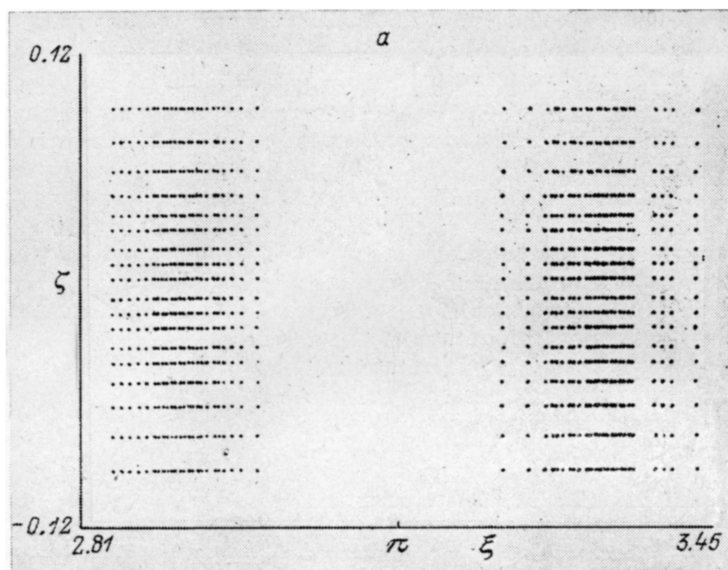


Рис. 5. Фазовые портреты системы двух сгустков.

τ : а — 0, б — 10, в — 15, г — 20, д — 30, е — 60.

Приведем два примера обеспечения когерентной устойчивости сгустков внешним полем (в обоих случаях использовался импеданс в виде (6)). В рассмотренной ранее задаче о продольном движении двух сгустков с начальным угловым расстоянием между их центрами $\theta_{\tau=0} = \pi/7$ и $n_{\max} = 3$ при выборе внешнего поля в виде $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \mu \xi$ с $M = 14$ дипольная устойчивость сгустков (т. е. неизменное положение их центров масс) достигалась при $\varepsilon_0 \geq eN_e / \pi r_0^2$. Асимптотические значения разброса в каждом из сгустков в несколько раз превышали их на-

Чальные величины и при соответствующем их выборе оставались много меньшими порогового линейной теории.

При численном моделировании движения четырех почти симметрично расположенных на орбите сгустков (координата центра сгустка с номером j задава-

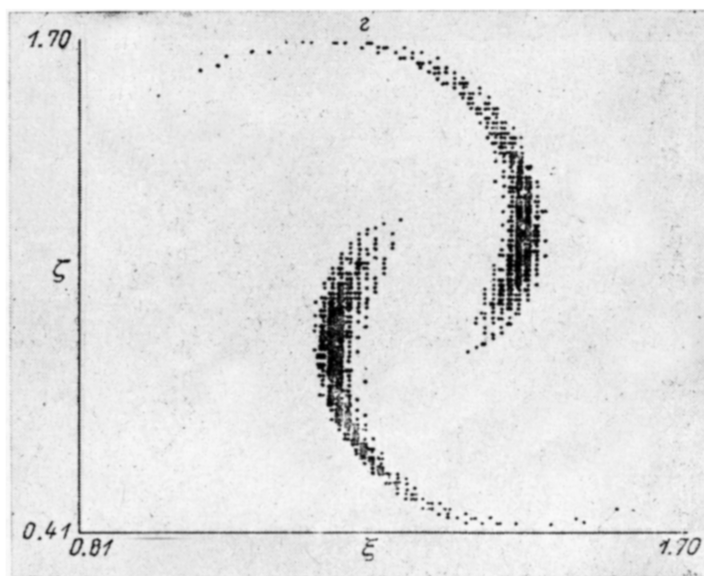
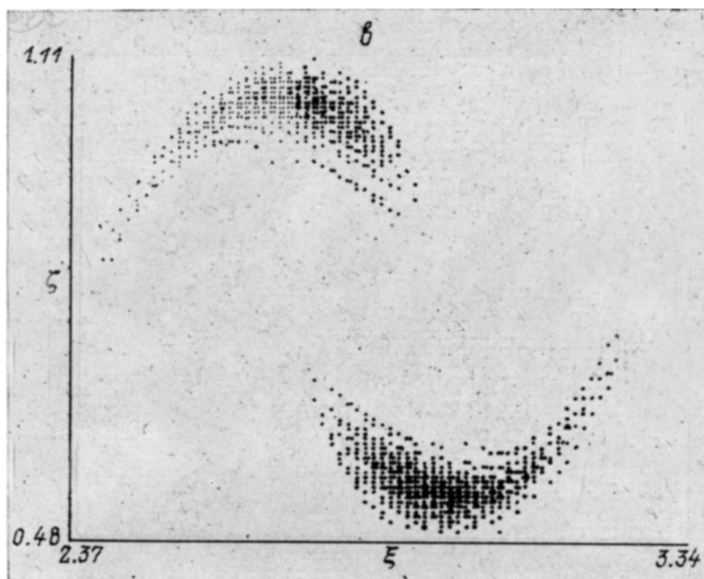


Рис. 5 (продолжение).

лась по закону $\xi_j = (\pi/2)(j-1) + \delta_j$, δ_j — случайная величина, лежащая в интервале $(-5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3})$, $n_{\max} = 4$) устойчивость достигалась при $\varepsilon_j \geq 0.1eN_e/\pi r_0^2$ для $M=16$, а разброс по частотам обращения увеличился примерно вдвое.

Таким образом, результаты численного моделирования продольного движения волн пространственного заряда в кольцевых пучках показывают, что сгустки с разбросом по частотам обращения, много меньшим порогового линей-

ной теории, оказываются устойчивыми относительно длинноволновых возмущений, когда их угловой размер достаточно мал. Когерентную устойчивость последовательности симметрично расположенных на орбите сгустков можно обеспечить бегущей электромагнитной волной умеренной амплитуды.

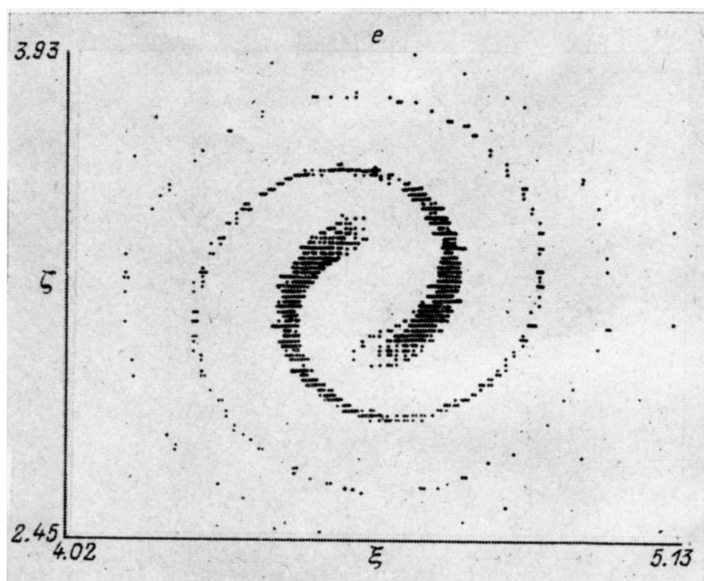
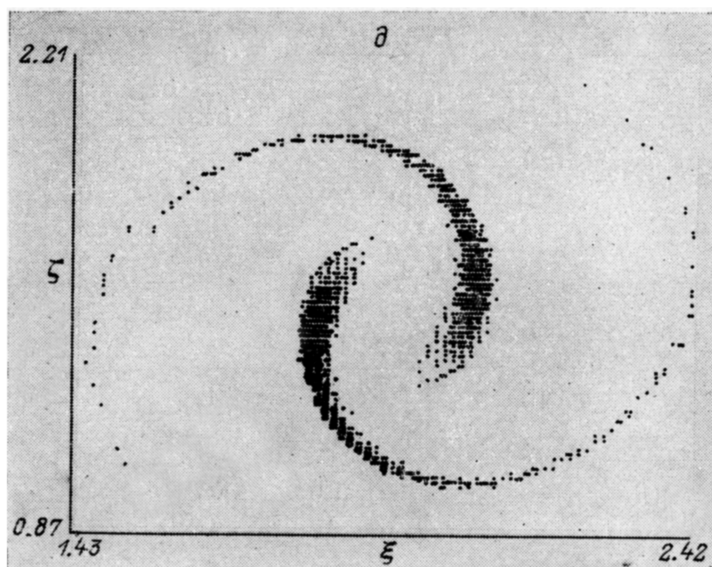


Рис. 5 (продолжение)

Список литературы

- [1] Казаринов Н. Ю., Перельштейн Э. А. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 4. С. 768—772.
- [2] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. // Атомная энергия. 1959. Т. 7. Вып. 6. С. 549—551.
- [3] Nielsen C. E., Sessler A. M., Symon K. R. // Proc. Inter. Conf. on High Energy Accelerat. and Instrum. Geneva, 1959. P. 239—252.
- [4] Саранцев В. П., Перельштейн Э. А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979. 216 с.
- [5] Белошицкий П. Ф., Перельштейн Э. А., Щинов Б. Г. ОИЯИ. № 9-81-326. Дубна, 1981

Поступило в Редакцию
2 февраля 1988 г.