

ОБ ИНКРЕМЕНТАХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ СТАЦИОНАРНОГО ПИНЧА

А. Б. Будько

Исследованию устойчивости равновесного состояния пинчевых систем посвящено большое число работ (см. литературу в обзорах [1, 2]). В работе [1] было показано, что пинч всегда неустойчив по отношению к винтовым модам ($m=1$) и при условии $P < r^{2\gamma}$ при $r \rightarrow \infty$ неустойчив по отношению к перетяжкам ($m=0$). Обычно считается, что наиболее быстрорастущими являются винтовые неустойчивости, подробно численному исследованию которых посвящена работа [3]. В настоящей работе показано, что при достаточно быстром спаде давления плазмы к границе пинча, например, для изотермического диффузного пинча с гауссовым распределением плотности наиболее быстрорастущими являются неустойчивости с $m=0$, и вычислены инкременты неустойчивостей $\Gamma_m(k)$. Для нахождения инкрементов неустойчивостей используется модифицированный энергетический принцип в формулировке, данной авторами [4]. Для нахождения максимального инкремента неустойчивости $\Gamma_m(k)$ моды с данными m и k надо решить вариационную задачу с модифицированным интегралом энергии. Задача нахождения $\Gamma_m(k)$ известным способом [4] может быть сведена к поиску таких решений уравнения Эйлера—Лагранжа для радиальной компоненты возмущения ξ_r , которые не меняют знак при $0 \leq r \leq a$ (a — граница пинча) и обеспечивают обращение в нуль возмущений МГД величин на границе. Такие решения гарантируют положительную определенность интеграла энергии.

Уравнение Эйлера для ξ_r имеет вид [4]

$$\frac{d}{dr} \left(f \frac{d(\tilde{r}\xi_r)}{dr} \right) - g\xi_r = 0, \quad (1)$$

$$r\xi_r = 0 \text{ при } r=0, r=a. \quad (2)$$

Здесь

$$f = \frac{(\rho\Gamma_m^2 + F^2)(\rho\Gamma_m^2(\gamma P + B^2) + \gamma PF^2)}{D}. \quad (3)$$

$$g = \left\{ \rho\Gamma_m^2 + F^2 + 2B_\varphi \left(\frac{B_\varphi}{r} \right)' - 4 \frac{k^2 B_\varphi^2}{r^2} \frac{\rho\Gamma_m^2 B^2 + \gamma PF^2}{D} + r \left(2 \frac{k B_\varphi}{r^2} \left(\frac{m}{r} B_z - k B_\varphi \right) \frac{\rho\Gamma_m^2(\gamma P + B^2) + \gamma PF^2}{D} \right)' \right\} \frac{1}{r}, \quad (4)$$

$$D = \rho^2 \Gamma_m^4 + (\rho\Gamma_m^2(\gamma P + B^2) + \gamma PF^2) \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right), \quad (5)$$

$$F = \frac{m}{r} B_\varphi + k B_z. \quad (6)$$

В качестве равновесных профилей рассмотрим профили, соответствующие автомодельному решению (7)—(11), полученному в работе [5].

$$n = \frac{\mu}{m_i \pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad (7)$$

$$T = T_0, \quad (8)$$

$$B_\varphi = \frac{2I}{cr} \sqrt{1 - \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)}, \quad (9)$$

$$B_z = B_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad (10)$$

$$I^2 = \left(\frac{caB_0}{2}\right)^2 + \frac{2\mu c^2 T_0}{m_i}. \quad (11)$$

Такие профили, как следует из критерия абсолютной устойчивости [2], устойчивы по отношению к возмущениям с $m \geq 2$. Для гауссовых профилей (7)—(11) оказывается возмож-

ным получить приближенное аналитическое выражение для инкрементов неустойчивостей моды с $m=0$.

При $r \rightarrow \infty$ асимптотика уравнения Эйлера (1) при $m=0$ имеет вид

$$(\xi_r r)^n - \frac{2r}{a^2} (\xi_r r)' + \frac{\lambda}{a^2} \xi_r r = 0, \quad (12)$$

$$\lambda = \frac{2 + 4 \frac{\Gamma_0^2}{k^2} - a^2 \Gamma_0^2 - \frac{B_0^2 c^2 a^2}{4 I^2} \frac{T_0}{m_i}}{\frac{1}{k^2} + \frac{B_0^2 c^2 a^2}{4 I^2} \frac{T_0}{m_i}}. \quad (13)$$

Возмущения магнитного поля обращаются в нуль при $r \rightarrow \infty$, если решения (12) возрастают по крайней мере медленнее, чем $\exp(r/a^2)$ при $r \rightarrow \infty$, что имеет место только при

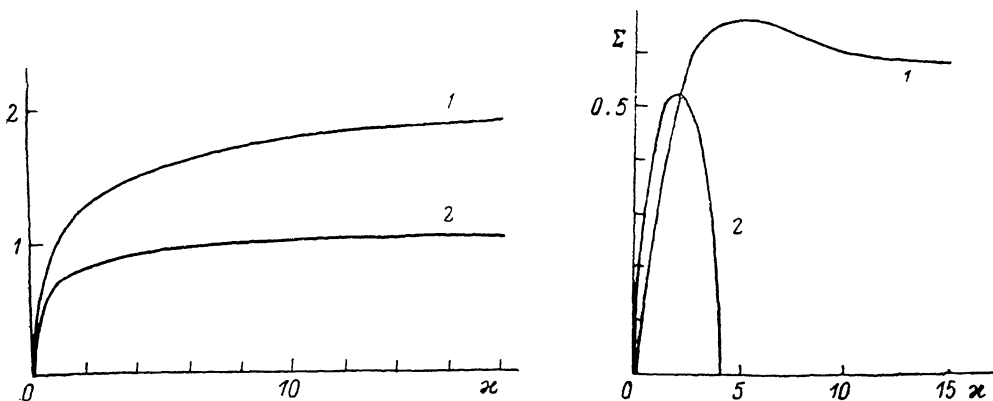


Рис. 1. Максимальные инкременты неустойчивостей мод с $m=0$ (1), 1 (2) при $b=0$.

Рис. 2. То же, что и на рис. 1 при $b=0.1$.

$\lambda = 2n$, где n — целое число, при этом (12) есть уравнение для полиномов Эрмита. Это дает следующее выражение для инкрементов неустойчивости:

$$\Gamma_0(k) = \sqrt{\frac{4 T_0 k^2 \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{B_0^2 c^2 a^2}{4 I^2}}{m_i \left(1 - \frac{B_0^2 c^2 a^2}{4 I^2}\right) (2n - 4 + k^2 a^2)}}. \quad (14)$$

Приближенная формула (14) дает правильные асимптотики для $\Gamma_0(k)$ при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$, максимальная погрешность для $n=7$ не превышает 25%. Учет в уравнении (1) членов более высокого порядка малости по $1/r$ приводит к тому, что n становится функцией k и $b = B_{0z}/B_{0\varphi}$.

Точный вид дисперсионных кривых $\Sigma_m(x) = (a/c_s) \Gamma_m(x)$, где $x = ka$, $c_s = \sqrt{T_0/m_i}$, для $m=0$ и $m=1$ при двух различных значениях параметра b приведен на рис. 1, 2. При достаточно малом продольном магнитном поле, т. е. $B_{0z} \leq 0.3 B_{0\varphi}$, наиболее неустойчивой модой является перегижка. Наличие продольного поля приводит к стабилизации обеих мод, причем перегижек в гораздо большей степени, так что при $B_{0z} > 0.35 B_{0\varphi}$ пинч оказывается абсолютно устойчив по отношению к этой моде.

Таким образом, вычисленные в данной работе инкременты неустойчивостей показывают, что при достаточно крутых профилях давления и достаточно малом продольном поле перегижки оказываются самыми быстрорастущими модами. Получено простое аналитическое выражение максимального инкремента роста перегижек для автомодельных гауссовых профилей, которое хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

В заключение автор выражает благодарность М. А. Либерману и А. Л. Великовичу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Кадомцев Б. Б. Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. 132 с.
 [2] Freidberg J. P. // Rev. of Modern Phys. 1982. Vol. 54. N 3. P. 801—902.

- [3] *Goedbloed J. P., Hagebeek H. J.* // *Phys. Fluids*. 1972. Vol. 15. P. 1090—1101.
 [4] *Goedbloed J. P., Sakanaka P. H.* // *Phys. Fluids*. 1974. Vol. 17. P. 908—918.
 [5] *Felber F. S.* // *Phys. Fluids*. 1982. Vol. 25. P. 643—645.

Институт физических проблем
 им. С. И. Вавилова АН СССР
 Москва

Поступило в Редакцию
 24 мая 1988 г.

07; 10

Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ПУЧКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А. Н. Алмалиев, И. С. Баткин, М. А. Долгополов

При экспериментальном исследовании сверхизлучения протяженных систем большую роль играет геометрия образца, так как, придавая ему определенную форму, можно реализовать одномодовый режим излучения. Действительно, сверхизлучение протяженной системы, в которой отсутствует выделенное направление, оказывается подавленным из-за деструктивной интерференции большого числа мод [1]. Однако в любой сверхизлучательной системе конечных размеров кооперативные эффекты в спонтанном излучении тем не менее могут проявляться за счет нарушения однородности вблизи границ [2]. При этом оказывается необходимым выполнение двух условий: размер неоднородности не превышает длину волны излучения, а сами неоднородности имеют регулярную структуру. Очевидно, что наблюдение такого кооперативного излучения, обусловленного наличием неоднородностей на поверхности образца, является довольно сложной задачей. Поэтому основные успехи, связанные с наблюдением сверхизлучения в оптическом диапазоне, были достигнуты при использовании вытянутых образцов цилиндрической формы с числом Френеля $F \sim 1$, в которых реализуется одномодовый режим.

В настоящей работе предлагается другая возможность выделения одной моды в протяженном образце произвольной формы, которая может быть реализована путем разрушения сверхизлучательного состояния в узком канале внутри образца. Таким образом создаются условия, при которых область с нарушенным сверхизлучательным состоянием становится «видимой» в кооперативном спонтанном излучении.

Как показано в работе [1], характеристики сверхизлучения определяются коррелятором

$$\langle R_{\mathbf{k}}^+ R_{\mathbf{k}}^- \rangle = \sum_{i \neq j} \exp \{ i \mathbf{k} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \} \langle \sigma_{i+} \sigma_{j-} \rangle. \quad (1)$$

Для образца, содержащего канал, в котором разрушено сверхизлучательное состояние, (1) можно представить в виде

$$\sum_{i \neq j} \{ \exp [i \mathbf{k} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \langle \sigma_{i+} \sigma_{j-} \rangle \} = \sum_{i \neq j}^{\Sigma'} \{ \quad \} + \sum_{i \neq j}^{\Sigma^c} \{ \quad \}, \quad (2)$$

где суммирование в Σ , Σ' и Σ^c ведется соответственно по всему образцу, образцу без канала и по атомам (молекулам), заключенным в канале. Поскольку первое слагаемое в правой части (2) малó из-за отсутствия выделенного направления, то характер и направленность сверхизлучения будут определяться свойствами собственно канала.

Такой канал может быть создан, например, при пропускании пучка заряженных частиц через образец, находящийся в сверхизлучательном состоянии. Разрушение исходного состояния при прохождении пучка достигается за счет ионизации и возбуждения частиц образца. Очевидно, что для этой цели удобнее использовать тяжелые заряженные частицы — протоны, α -частицы, так как в этом случае малó уширение пучка из-за многократного рассеяния и можно пренебречь радиационным торможением пучка.

В соответствии с (1) интенсивность кооперативного излучения образца будет пропорциональна квадрату числа частиц (атомов, молекул) в канале, первичное энергетическое состояние которых изменено падающим пучком. Таким образом, наибольший эффект дости-