коэффициент распределения тока $k=I_c/I$ будет равен отношению S_1 к общей площади боковых поверхностей отрицательного свечения S_1+S_2, т. е.

$$k=\frac{S_1}{S_1+S_2}=\frac{d+2d_{\text{к. с}}}{D-2d_{\text{к. ц}}+d+2d_{\text{к. с}}}.$$

Вычисление k на основании величин d_k, приведенных в таблице, для давлений, например 0.2 и 1 Тор ($D=30$ мм, $d=1$ мм), дает значения $k=0.19$ и 0.17 соответственно. Экспериментальные значения k, согласно рис. 2, для этих условий составляют 0.21 и 0.2. Учитывая приближенность в определении ширины темного катодного пространства, совпадение расчетных значений и экспериментальных можно считать достаточно хорошим.

Описанный механизм распределения тока на стержень и цилиндр объясняет тот факт, что при низких давлениях и малых d плотность тока стержня существенно превышает плотность тока цилиндра. Увеличение диаметра стержня приводит к выравниванию плотности тока на стержень и цилиндр, поскольку различие между площадями поверхностей, собирающих ионы на цилиндр и стержень, при этом уменьшается. При высоких давлениях рассмотренный механизм распределения тока перестает работать, так как отрицательные свечения у поверхности цилиндра и стержня становятся независимыми, и следует говорить о независимой параллельной работе двух разрядных промежутков.

Суммируя полученные в работе результаты, можно сделать следующие выводы.

1. Размещение на оси цилиндрического полого катода стержня, соединенного с цилиндром, т. е. преобразование ЦПК в КПК, приводит при низких давлениях газа к снижению напряжения горения тлеющего разряда и смещению границ области оптимальных давлений в сторону высоких давлений. При этом протяженность ООД возрастает.

2. При низких давлениях газа зависимость тока стержня от его диаметра нелинейна. При малых диаметрах стержня плотность тока на его поверхность значительно превышает плотность тока на цилиндр.

3. Характер распределения тока между цилиндром и стержнем в КПК определяется в основном соотношением тепловых потоков ионов в направлении катодных электродов.

Литература

[1] *Зыкова Е. В., Кучеренко Е. Т., Брыкайло И. Н.* // Вестн. Киев. ун-та. Физика. 1983. Вып. 24. С. 85—89.

[2] *Тиманюк В. А., Ткаченко В. М., Тютюнник В. Б.* // Вестн. Харьк. ун-та. Радиофизика и электроника. 1974. Вып. 3. С. 110—113.

[3] *Тиманюк В. А., Ткаченко В. М.* // VI Всесоюзн. конф. по физике низкотемпературной плазмы. Л., 1983. Т. 2. С. 66—68.

[4] *Кириченко В. И., Ткаченко В. М., Тютюнник В. Б.* // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 9. С. 1857—1867.

[5] *Döpel R., Wiss Z.* // Techn. Hochschule Ilmenag. 1969. Bd 15. N 1. S. 55—71.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступило в Редакцию
26 января 1988 г.
В окончательной редакции
13 сентября 1988 г.

---

01 *Журнал технической физики, т. 59, в. 7, 1989*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФАКТОР И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. А. Шелюто

1. Геометрический интеграл

$$J=\int\frac{ds\,d\sigma}{R}, \tag{1}$$

где R — бегущее расстояние между элементами поверхности ds и $d\sigma$, часто встречается в задачах математической физики. Наиболее известный пример — энергия взаимодействия двух равномерно заряженных пластин. Обычно подобные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции $1/R$ в ряд по полиномам Лежандра или другим функциям, отражающим симметрию задачи. Такие ряды, хорошо сходящиеся при расстояниях h между пластинами, много бо́льших характерных размеров пластин a, b, довольно медленно сходятся в случае, когда все размеры одного порядка. Более того, в пределе $h/a \leftarrow 0$ и $a \sim b$ интегралы типа (1), как показано ниже, вообще не могут быть получены путем разложения в ряд, что связано с неаналитической зависимостью вида $\ln(h/a)$ от малого параметра. Желательно поэтому иметь точное решение задачи, применимое при произвольных значениях параметров и эффективное в численных расчетах. В данной работе точное решение найдено для наиболее важного случая двух коаксиальных дисков.

2. Вычисления для определенности будем проводить на примере геометрического фактора — величины, использующейся при измерении активности радионуклидных препаратов. Геометрический фактор G определим как отношение числа частиц, попавших в детектор в единицу времени, к полному числу частиц, испущенных радионуклидным источником за это же время. Если источник излучения можно считать точечным, то $G=\Omega/4\pi$, где Ω — телесный угол с вершиной в точке нахождения источника, стягиваемый поверхностью детектора (или ограничивающей излучение диафрагмой). Для источника конечных размеров, лежащего в плоскости, параллельной плоскости диафрагмы, геометрический фактор равен

$$G = -\frac{1}{4\pi S_0}\frac{\partial}{\partial h}J = \frac{1}{4\pi}\int\frac{ds}{S_0}\int\frac{d\sigma}{R^2}\frac{h}{R}, \tag{2}$$

причем предполагается, что каждая элементарная площадка ds поверхности источника излучает сферически симметрично. Фактор $1/R^2$ в этой формуле соответствует закону обратных квадратов, отношение h/R равно косинусу угла между вектором $\mathbf{R}$ и нормалью к поверхности, интегрирование ведется по площади источника $S_0=\pi a^2$ и площади диафрагмы $\Sigma_0=\pi b^2$. Конечно, выражение (2) можно связать также с z-компонентой силы взаимодействия между заряженными дисками, однако скалярная величина G более удобна, так как позволяет использовать более богатую физическую интуицию при анализе предельных случаев.

В классической работе [1] геометрический фактор

$$G = \frac{h}{2S_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a dr\,r\int_0^b d\rho\,\rho\,[h^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi]^{-3/2} \tag{3}$$

был вычислен с помощью разложения подынтегральной функции R^{-3} в ряд по полиномам Лежандра. Как уже отмечалось, такие ряды очень медленно сходятся при $h\sim a\sim b$, что затрудняет их использование в практических расчетах. Непосредственное же интегрирование в формуле (3) приводит к появлению на раннем этапе эллиптических интегралов, препятствующих дальнейшим вычислениям. Обойдем эту трудность, введя дополнительное интегрирование по переменной z, устраняющее иррациональность знаменателя,

$$G = -\frac{1}{\pi S_0}\frac{\partial}{\partial h}\int_0^\infty dz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a dr\,r\int_0^b d\rho\,\rho\,[z^2+h^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi]^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2S_0}\frac{\partial}{\partial h}\int_0^\infty dz\int_0^a dr^2\int_0^b d\rho^2\,[(z^2+h^2+r^2+\rho^2)^2-4r^2\rho^2]^{-1/2}. \tag{4}$$

Подынтегральное выражение (4) зависит только от r^2 и ρ^2, что делает дальнейшее интегрирование элементарным. Результат интегрирования по ρ^2

$$G = \frac{h}{2S_0}\int_0^\infty\frac{dz}{\Delta}\int_0^a dr^2\left\{1-\frac{\Delta+r^2-b^2}{\sqrt{(\Delta+r^2+b^2)^2-4b^2r^2}}\right\}, \tag{5}$$

где $\Delta=z^2+h^2$, представляет самостоятельный интерес, так как позволяет получить геометрический фактор для точечного источника, смещенного относительно оси симметрии на расстояние a (или потенциал, создаваемый однородно заряженным диском). При этом в выражении (5) необходимо произвести замену $\pi\int_0^a dr^2/S_0 \to 1$. Интегралы по z после преобразований выражаются через табличные [2], геометрический фактор для смещенного точечного источника равен

$$G_a = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1-n}}{2\pi}\left[\frac{2b}{a+b}K(q) + \frac{a-b}{a+b}\Pi(n, q)\right], \tag{6}$$

где $K(q)$ и $\Pi(n, q)$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого и третьего родов [2],

$$q^2 = \frac{4ab}{h^2 + (a+b)^2}, \qquad n = \frac{(a+b)^2}{h^2+(a+b)^2}. \tag{7}$$

Во избежание недоразумений заметим, что определение эллиптического интеграла третьего рода $\Pi(n, q)$, согласно [2], отличается знаком n от более привычного определения [3].

Выражение (6) обладает очевидными пределами при $h \to 0$: $1/2$ ($a < b$, диафрагма полностью накрывает источник), $1/4$ ($a=b$, источник на краю диафрагмы), 0 ($a > b$, источник вне диафрагмы).

При $a=b$ получаем хорошо известную формулу

$$G_a = \frac{1}{4} - \frac{q'}{2\pi}K(q), \tag{8}$$

где $q' = \sqrt{1-q^2}$ — дополнительный модуль эллиптических интегралов.

Вернемся к выражению (5). Дальнейшее интегрирование по переменной r^2 дает

$$G = \frac{h}{2S_0}\int_0^\infty \frac{dz}{\Delta}\left\{\Delta + a^2 + b^2 - \sqrt{(\Delta + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}\right\}. \tag{9}$$

Используя те же интегралы [2], что и при получении формулы (6), имеем окончательно

$$G = \frac{1}{2S_0}\left[\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - (a-b)^2\sqrt{1-n}\,\Pi(n, q) - 4ab\sqrt{1-n}\,D(q)\right], \tag{10}$$

где $D(q) = (1/q^2)[K(q) - E(q)]$ — линейная комбинация полных эллиптических интегралов первого и второго родов [2].

Формула (10) является основным результатом данной работы. Входящие в нее эллиптические интегралы легко вычисляются на компьютере с произвольной точностью (имеются также достаточно полные таблицы [4]). Выражение (10) воспроизводит все известные предельные случаи. Так, при больших расстояниях между источником и диафрагмой ($h \gg a, b$) имеем $G \simeq \Sigma_0/4\pi h^2$. При стремлении h к нулю предел зависит от соотношения между a и b: $G \to \Sigma_0/2S_0$, если $a > b$, и $G \to 1/2$, если $a \leqslant b$. В предельном случае точечного источника ($a/b \to 0$), лежащего на оси симметрии, $G = (1 - h/\sqrt{h^2+b^2})/2$.

Наиболее просто геометрический фактор выглядит в случае равных радиусов источника и диафрагмы

$$G = \frac{1}{2} - \frac{2q'}{\pi}D(q). \tag{11}$$

Асимптотика выражения (11) при $h/a \to 0$

$$G \simeq \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi a}\left(\ln\frac{a}{h} + 3\ln 2 - 1\right) \tag{12}$$

содержит упоминавшееся логарифмическое слагаемое $(h/a)\ln(h/a)$ и, следовательно, не может быть получена из исходной формулы (3) разложением в ряд по степеням h/a.

3. Интегральное представление (4) для G является весьма удобным и позволяет решить более сложную задачу — вычислить геометрический фактор цилиндрического источника конечной толщины без самопоглощения (малое поглощение в истонике можно учесть по теории возмущений). Считая h_1 и h_2 расстояниями от диафрагмы до соответственно ближнего и дальнего оснований цилиндрического источника и интегрируя (9) по h, получим

$$G_v = \frac{h}{2V_0}\left\{\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - \frac{4ab}{3\sqrt{1-n}}[(1-q^2)D(q) + E(q)] - \right.$$
$$\left. - (a-b)^2\sqrt{1-n}\left[\Pi(n, q) - \frac{q^2}{1-n}D(q)\right]\right\}\Bigg|_{h_1}^{h_2}, \tag{13}$$

где $V_0 = S_0(h_2 - h_1)$. В пределе $h_2 \to h_1$ выражение (13) переходит в (10).

4. До сих пор рассматривались радионуклидные источники, каждый элементарный участок которых излучался сферически-симметрично. Существуют, однако, источники с зависимостью интенсивности излучения от азимутального угла θ. В этом случае излучение каждого источника элементарной площадки пропорционально величине

$$f(\theta) = N^{-1}(1 + 3\zeta\cos^2\theta + \zeta_2\cos^4\theta + \ldots), \tag{14}$$

где N — нормировочный множитель.

Геометрический фактор G_ζ для источника с угловой зависимостью (14) получается последовательным дифференцированием выражения (10) для G по параметру h. Действительно, введение дополнительного $\cos^2\theta = (h/R)^2$ в подынтегральное выражение (2) равносильно применению к нему, а следовательно, и к (10) оператора $\frac{1}{3}(1 - h\partial/\partial h)$.

Приведем результат вычисления G_ζ для простейшего случая плоского источника радиуса a и диафрагмы такого же радиуса, ограничившись двумя первыми слагаемыми в формуле (14),

$$G_\zeta = \frac{1}{2} - \frac{2q'}{\pi}\left[\frac{1-\zeta}{1+\zeta}D(q) + \frac{\zeta}{1+\zeta}K(q)\right]. \tag{15}$$

Знаменатель $1+\zeta$ обязан своим происхождением условию нормировки, в пределе $\zeta \to 0$ выражения (11) и (15) совпадают.

Аналогичным образом можно легко получить точные выражения для некоторых других величин (емкости, индуктивности) в системах с цилиндрической симметрией, причем окончательные выражения всегда более компактны, чем представления в виде ряда.

Литература

[1] *Петржак К. А., Бак М. А.* // ЖТФ. 1955. Т. 25. В. 4. С. 636—642.
[2] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 1986. Т. 1, 3.
[3] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. Т. 3.
[4] *Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г.* Таблицы эллиптических интегралов. М.: Изд-во АН СССР, 1962, 1963. Т. 1, 2.

Всесоюзный научно исследовательский
институт метрологии
им. Д. И. Менделеева

Поступило в Редакцию
1 февраля 1988 г.
В окончательной редакции
27 сентября 1988 г.

01; 02; 07 *Журнал технической физики, т. 59, в. 7, 1989*

КОМПТОН-ЭФФЕКТ И НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ АТОМАМИ

С. А. Герасимов

В настоящей работе речь идет о связи комптоновского профиля $J(q)$, величины, пропорциональной дважды дифференциальному сечению комптоновского рассеяния $d^2\sigma/d\omega d\Omega$ [1] γ-излучения атомами

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} = \sigma_T\frac{m}{\varkappa}\frac{\omega_2}{\omega_1}J(q) \tag{1}$$

с фактором некогерентного рассеяния S

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_T S, \tag{2}$$

где σ_T — томсоновское сечение рассеяния, $\omega = \omega_1 - \omega_2$, ω_1 и ω_2 — соответственно частота падающего и рассеянного излучений, $\varkappa = (\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2\cos\theta)^{1/2}/c$, θ — угол рассеяния, $q = \hbar\varkappa/2 - m\omega/\varkappa$ (m — масса покоя электрона), $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$.