

СТРУКТУРА И РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРОВ И НЕПРЯТЯГИВАЮЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ В ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОМ УРАВНЕНИИ ТИПА РЭЛЕЯ

А. Л. Железняк

Предложен метод исследования двухпараметрических семейств динамических систем с хаотическим поведением. С помощью этого метода изучается периодически возмущенное уравнение типа Рэля. Установлено, что при стремлении к нулю как параметра при старшей производной, так и амплитуды внешней силы хаотическое поведение исчезает. Изучены пути перехода к хаосу, обнаружены внутренние бифуркации странного аттрактора (СА). Получены оценки размерности возникающего в фазовом пространстве непрягивающего гиперболического множества.

Введение

За последнее десятилетие достигнут большой прогресс в понимании общих закономерностей перехода от регулярного поведения к стохастическому в нелинейных динамических системах (например, [1-4]). Картина возникновения и развития хаоса во многом ясна, тем не менее остается еще ряд принципиальных вопросов, не имеющих ответа даже для систем с малым числом степеней свободы. И в этой связи понятен интерес к изучению модельных уравнений, демонстрирующих сложную динамику и достаточно часто встречающихся в различных прикладных задачах.

В данной работе рассматривается периодически возмущенное уравнение типа Рэля

$$\mu \ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2) \dot{x} - x + \beta x^3 = \delta \sin \omega t. \quad (1)$$

Это модельное уравнение описывает колебания ангармонического осциллятора с нелинейной диссипацией (при $\varepsilon \neq 0$) под воздействием периодической внешней силы $2\pi/\omega$. Оно имеет несколько более общий вид, чем хорошо изученные уравнения Дюффинга [5-7] и Ван-дер-Поля [1, 8-10], и возникает, например, в задачах радиотехники и гидродинамики.

Основная цель работы — изучение влияния параметра при старшей производной μ и амплитуды внешней силы δ на качественную картину траекторий в фазовом пространстве, а также на структуру и размерность СА. На примере данного уравнения апробируется методика, позволяющая оценить размерность множества неустойчивых слоев непрягивающей гомоклинической структуры.

Всюду ниже параметры ε , β и ω будем полагать фиксированными, а именно $\varepsilon=0.1$, $\beta=100$, $\omega=1$.

Существование гомоклинической структуры

Хорошо известно, что в фазовом пространстве уравнений, подобных (1), могут возникать гомоклинические структуры (например, [5]). Существует такая возможность и для исследуемого уравнения. Действительно, невозмущенное уравнение (1) (при $\delta=0$) имеет три состояния равновесия (рис. 1): 0_1 ($1/\sqrt{\beta}$, 0)

и $O_2 (-1/\sqrt{\beta}, 0)$ — неустойчивые фокусы при $\mu > \varepsilon^2/8$ или неустойчивые узлы в противном случае; $O(0, 0)$ — седло, S^+ и S^- — его соответственно устойчивые и неустойчивые сепаратрисы. Нетрудно доказать, воспользовавшись, например, теоремой Рейссига [11], что при всех $\mu > 0$ на фазовой плоскости (x, \dot{x}) имеется устойчивый предельный цикл, являющийся образом периодических автоколебаний.

При «включении» возмущения устойчивые и неустойчивые сепаратрисные многообразия седлового периодического движения, соответствующего O и рассматриваемого уже в трехмерном фазовом пространстве (x, \dot{x}, t) , могут пересекаться. В этом случае в окрестности кривой пересечения сепаратрисных многообразий (гомоклинической кривой) возникает гомоклиническая структура, содержащая как счетное множество седловых предельных циклов, так и «случайные» траектории [12].

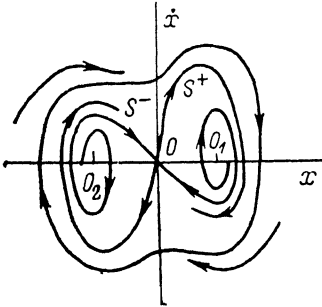


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (1) при $\delta=0$.

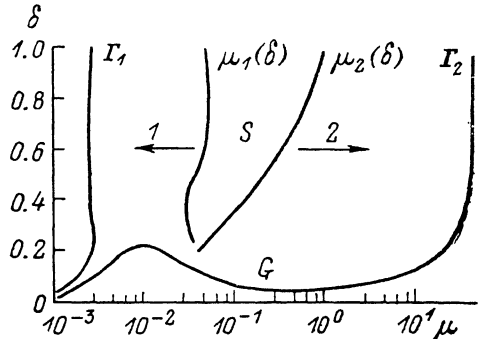


Рис. 2. Бифуркационные кривые на плоскости параметров (μ, δ) . Область G соответствует существованию гомоклинической структуры, область S соответствует существованию СА.

Функция Мельникова $\Delta(t_0)$ [13], характеризующая расстояние между сепаратрисными многообразиями, в первом приближении по δ имеет следующий вид [14]:

$$\Delta(t_0) = \left[-\sqrt{2\mu/\beta} \frac{\pi \cos t_0}{\operatorname{ch}(\sqrt{\mu} \pi/2)} + \frac{4K}{\beta\mu^{3/2}} \left(\frac{\mu}{3} - \frac{4}{35\beta} \right) \right] \delta,$$

где $K = \varepsilon/\delta$.

Условие знакопеременности функции Мельникова при изменении t_0 является критерием существования гомоклинической структуры. Этот критерий позволяет выделить на плоскости параметров (μ, δ) область G , ограниченную кривыми Γ_1 и Γ_2 (рис. 2), которая соответствует наличию гомоклиники в фазовом пространстве уравнения (1). Из приведенной формулы легко также вывести, что гомоклиническая структура отсутствует при каждом δ и при всех $\mu \notin [\mu', \mu'']$ (здесь μ', μ'' — некоторые положительные постоянные). Используя функцию Мельникова, можно оценить толщину d стохастического слоя, возникающего в окрестности гомоклинической траектории,

$$d = \max_{t_0} |\Delta(t_0)| \equiv \sqrt{2\mu/\beta} \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\sqrt{\mu} \pi/2)} |\delta| + \frac{4\varepsilon}{\beta\mu^{3/2}} \left| \frac{\mu}{3} - \frac{4}{35\beta} \right|. \quad (2)$$

О бифуркациях, приводящих к возникновению СА

В работах многих авторов подробно исследовались пути возникновения СА для уравнений осцилляторов при изменении амплитуды внешней силы. В зависимости от вида диссипативного и инерционного членов наблюдались различные сценарии перехода к хаосу: через последовательность удвоений периодов [7], перемежаемость [6, 7] и т. д. В данном разделе обсуждаются результаты двухпараметрического анализа бифуркаций в уравнении (1), приводящих к возникновению СА. При расчетах был использован комплекс программ

СУСЛЕТ [15], позволяющий следить за эволюцией мультипликаторов периодических движений; вычислялись спектры мощности сигналов $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, на основе которых выделялись базисные частоты; кроме того, с помощью имеющихся графических средств воспроизводились выходные сигналы и стробоскопическая проекция фазового пространства. На основе проведенных вычислений построены кривые $\mu_1(\delta)$ и $\mu_2(\delta)$, ограничивающие область S существования СА (рис. 2).

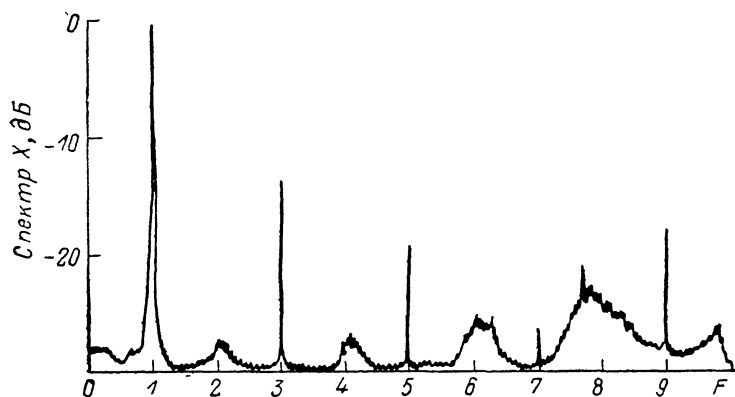
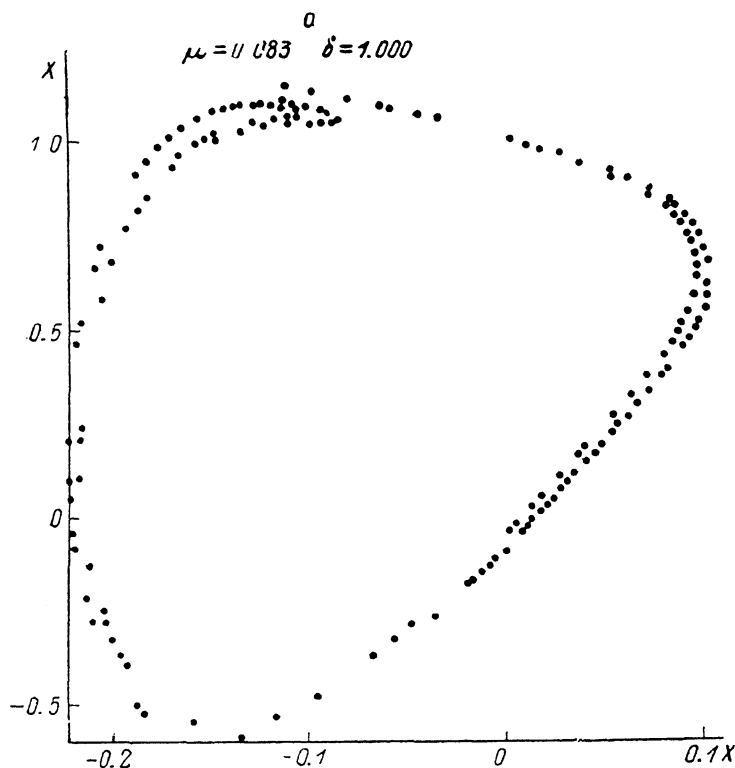


Рис. 3.

Опишем наблюдавшиеся в системе бифуркации. Зафиксируем, например, параметр δ и будем увеличивать μ по пути I (рис. 2) так, чтобы $(\mu, \delta) \in G$. Расчеты показывают, что при $(\mu, \delta) \in G/S$ в фазовом пространстве имеется поглощающая область, в которой содержится двумерный тор и непритягивающая гомоклиническая структура седлового периодического движения 0 . При $\mu \rightarrow \mu_1(\delta)$ происходит синхронизация движений на торе, при этом к устой-

чивому циклу на торе «подтягивается» седловой цикл, сливается с ним и исчезает. В момент данной касательной бифуркации мультипликатор цикла равен $+1$. Поскольку после бифуркации в системе нет других заметных устойчивых циклов, то на месте разрушенного тора возникает СА небольшой размерности — тор-аттрактор. Данный тип разрушения двумерного тора рассмотрен, например, в [16].

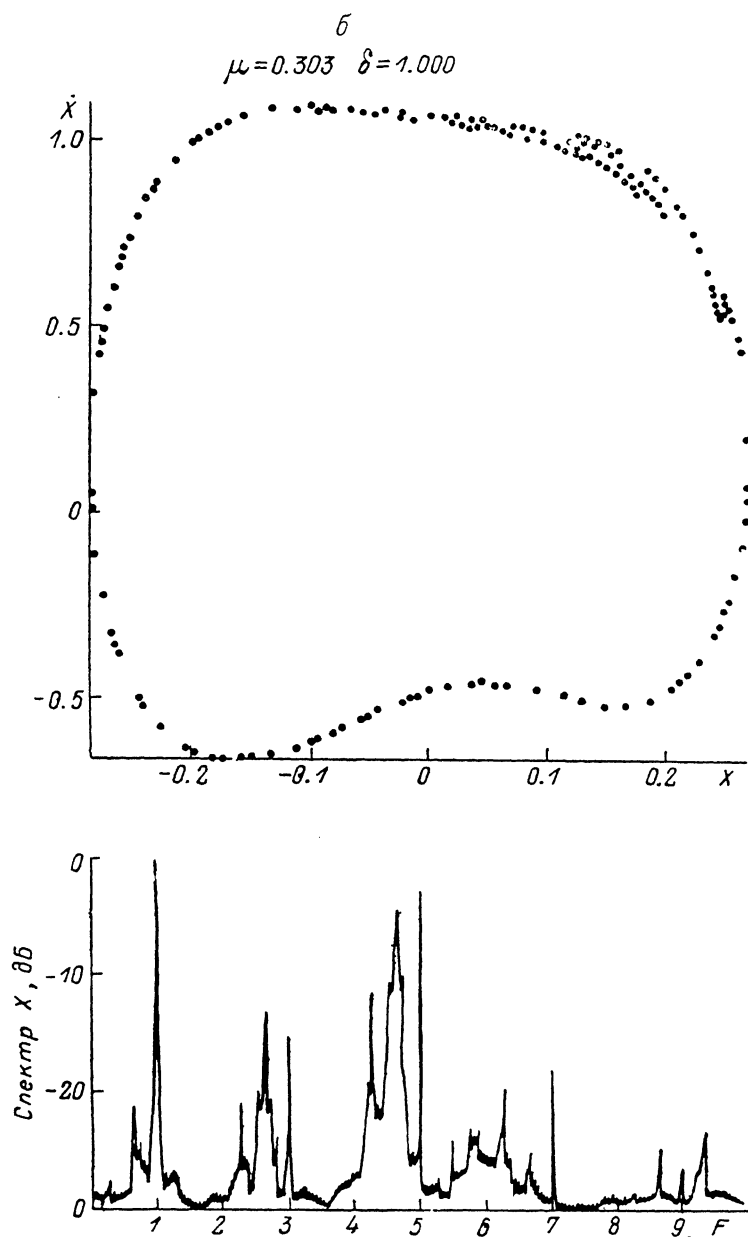


Рис. 3 (продолжение).

На рис. 3, а приведены стробоскопическая проекция фазового пространства уравнения (1) и спектр мощности сигнала $x(t)$ при бифуркационных значениях параметров $\mu=0.083$, $\delta=1$. Сильная «изрезанность» возникающего тор-аттрактора, по-видимому, связана с тем, что участвующий в бифуркации седловой цикл имеет собственную гомоклинику. Аналогичная бифуркация, приводящая к возникновению тор-аттрактора, наблюдается при изменении μ по пути 2 (рис. 2). На рис. 3, б приведены стробоскопическая проекция и спектр

мощности при $\mu=0.303$, $\delta=1$. Видно, что в момент бифуркации седловой предельный цикл заметной гомоклинической структуры не имеет. Таким образом, переход к стохастичности в исследуемом уравнении осуществляется через перемежаемость.

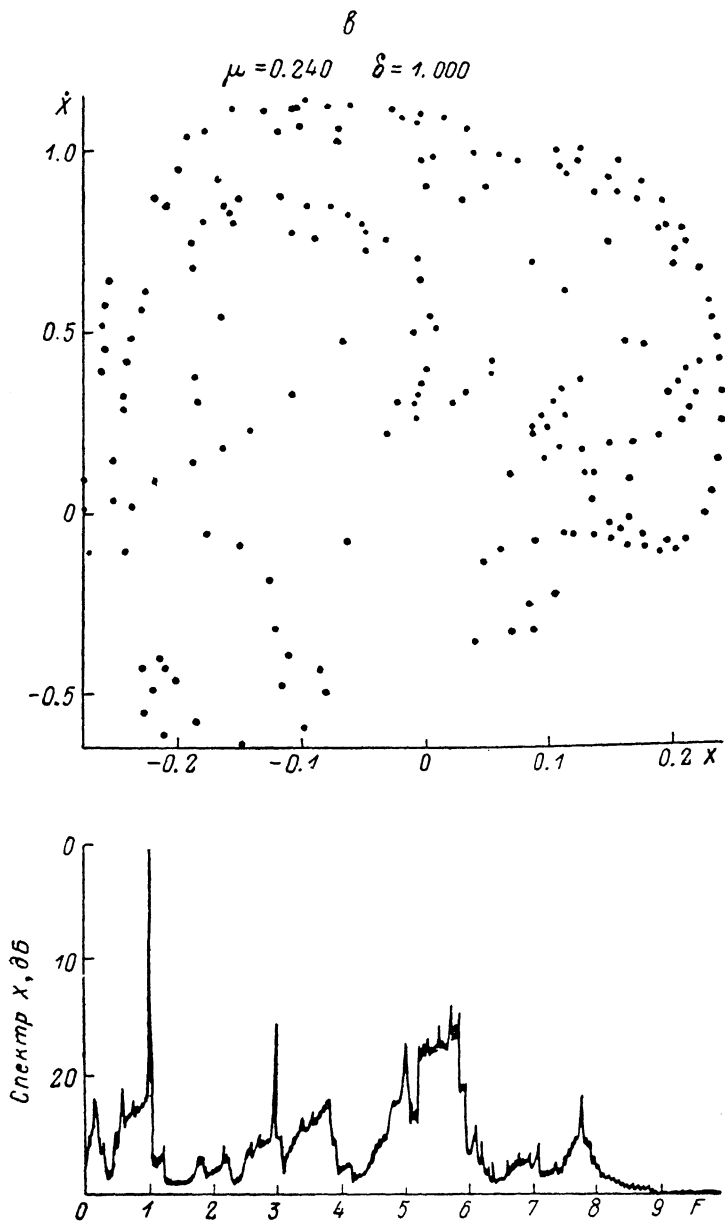


Рис. 3 (продолжение).

Следует заметить, что кривые $\mu_1(\delta)$ и $\mu_2(\delta)$, ограничивающие область S , являются фрактальными, поскольку представляют собой счетное объединение бифуркационных кривых, соответствующих касательным бифуркациям предельных циклов на торе с различными рациональными числами вращения, и бифуркационных значений, отвечающих разрушению торов с квазипериодической обмоткой. Бифуркации последнего типа [17] при численном эксперименте обнаружены не были, так как множество соответствующих бифуркационных значений, по-видимому, имеет малую меру.

Проведенные вычисления позволяют высказать следующее утверждение. При $\mu \rightarrow 0$ и при каждом δ уравнение (1) может демонстрировать только регулярную динамику: при малых μ (расчеты производились вплоть до $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$) в фазовом пространстве имеется только гладкий двумерный тор с периодическими траекториями на нем или с квазипериодической обмоткой. Исчезновение стохастичности объясняется тем обстоятельством, что при малых μ сжатие фа-

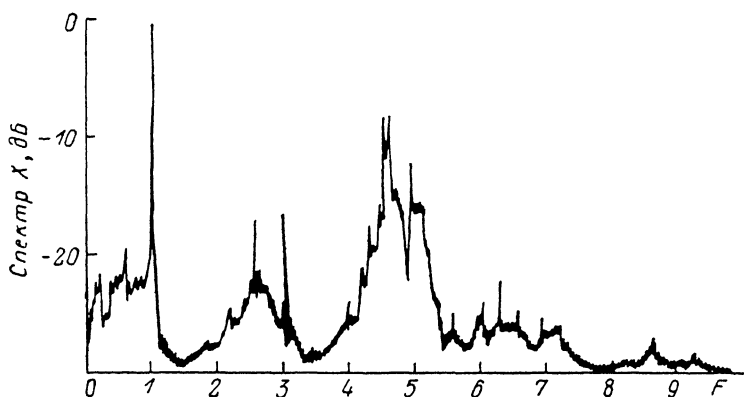
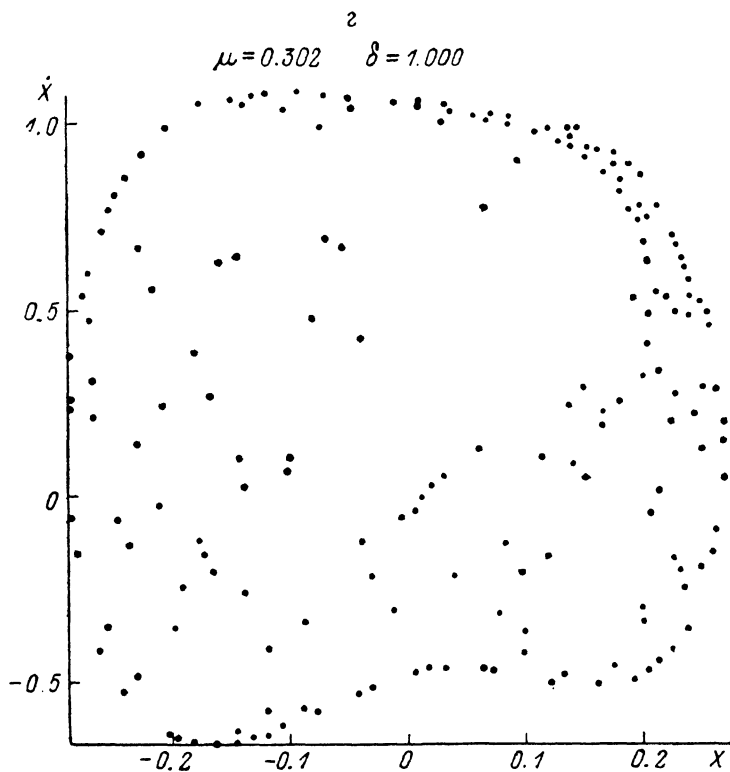


Рис. 3 (продолжение).

зового объема в окрестности поверхности медленных движений превышает экспоненциальную расходимость близких траекторий за время релаксации.

СА в фазовом пространстве уравнения (1) не был обнаружен при всех $\delta \leq 0.1$.

Вообще говоря, автоколебательные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с параметром μ при старшей производной можно разбить на два класса в зависимости от того, регулярную или стохастическую динамику они демонстрируют при $\mu \rightarrow 0$. Рассматриваемое уравнение типа Рэля (1) относится к системам, у которых стохастичность исчезает при

уменьшении параметра μ . К системам, в которых могут устанавливаться стохастические релаксационные колебания (стохастичность сохраняется при $\mu \rightarrow 0$), следует отнести, например, модель простого генератора шума [18] и периодически возмущенное уравнение Ван-дер-Поля [8].¹ Строгой теории, на основе которой можно провести подобную классификацию, пока нет, но, очевидно, определяющую роль здесь играет строение поверхности медленных движений.

О внутренних бифуркациях СА

Как показывает численный анализ уравнения (1), при изменении параметров μ и δ меняется не только тип аттракторов (предельный цикл, тор, СА), но и строение самого СА. Это хорошо видно, если сравнить стробоскопические проекции фазового пространства и спектры мощности при бифуркационных значениях параметров (рис. 3, а, б) и при параметрах, соответствующих развитой стохастичности ($\mu=0.240$ (д), 0.302 (е)). В этой связи возникает вопрос: как и с помощью каких характеристик удобнее всего изучать изменение структуры СА при варьировании параметров?

Как известно, одним из основных свойств СА, определяющим случайное поведение траекторий динамической системы, является экспоненциальная расходимость близких траекторий. Среднюю скорость расходимости характеризуют ляпуновские показатели $\{\lambda_i\}$, введенные в качестве меры стохастичности в [19]. Важным достоинством ляпуновских показателей является возможность их вычисления на ЭВМ; в данной работе использовался алгоритм, предложенный в [20].

Знание ляпуновских показателей позволяет ввести количественную меру стохастичности — ляпуновскую размерность аттрактора $\dim_A A$ [21]. Для систем с полутора степенями свободы

$$\dim_A A = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1, \lambda_2 < 0, \\ 2, & \text{если } \lambda_1 \equiv 0, \lambda_2 < 0, \\ 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}, & \text{если } \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \end{cases}$$

$\lambda_3 \equiv 0$, что соответствует сдвигу по потоку.

Ляпуновская размерность надежно вычисляется на ЭВМ, поэтому она является удобной величиной, с помощью которой можно сравнивать между собой разные аттракторы.

В настоящей работе с помощью ляпуновской размерности изучено влияние параметров μ и δ на строение СА. Был проведен цикл расчетов; на их основе область S на плоскости параметров (μ, δ) , соответствующая наличию СА, была разбита на кривые, на которых дробная часть ляпуновской размерности СА являлась постоянной. Эти кривые естественно назвать «изодимы» (термин введен в [22]). На рис. 4 построено разбиение области S на изодимы, при построении использовался сглаживающий алгоритм. Изодима 0 ограничивает область существования СА, шаг разбиения $V \dim_A A = 0.05$. Как видно, структура разбиения весьма сложна. В области, ограниченной внешней изодимой, существуют «окна» регулярных движений, кроме того, имеются бифуркационные кривые, отвечающие бифуркациям гомоклинических траекторий. Наиболее сложное разбиение имеет место при малых μ и δ ($\mu \sim 0.02-0.1$, $\delta \sim 0.2-0.4$). Однако построение более тонкой и подробной структуры разбиения не только требует значительных дополнительных затрат машинного времени, но и оказывается трудновоспроизводимым даже после применения алгоритма сглаживания. Это связано с тем, что изодимы, по-видимому, являются фрактальными кривыми. Тем не менее по построенному разбиению можно проследить (конечно, в общих чертах) за тем, как меняется строение СА при изменении управляющих параметров. Так, на рис. 4 штриховыми линиями отмечены бифуркационные

¹ Впрочем, в [8] показано лишь существование неустойчивых предельных циклов сколь угодно больших периодов; СА не было обнаружено ни в [8], ни позднее (см., например, [9] и библиографию в ней).

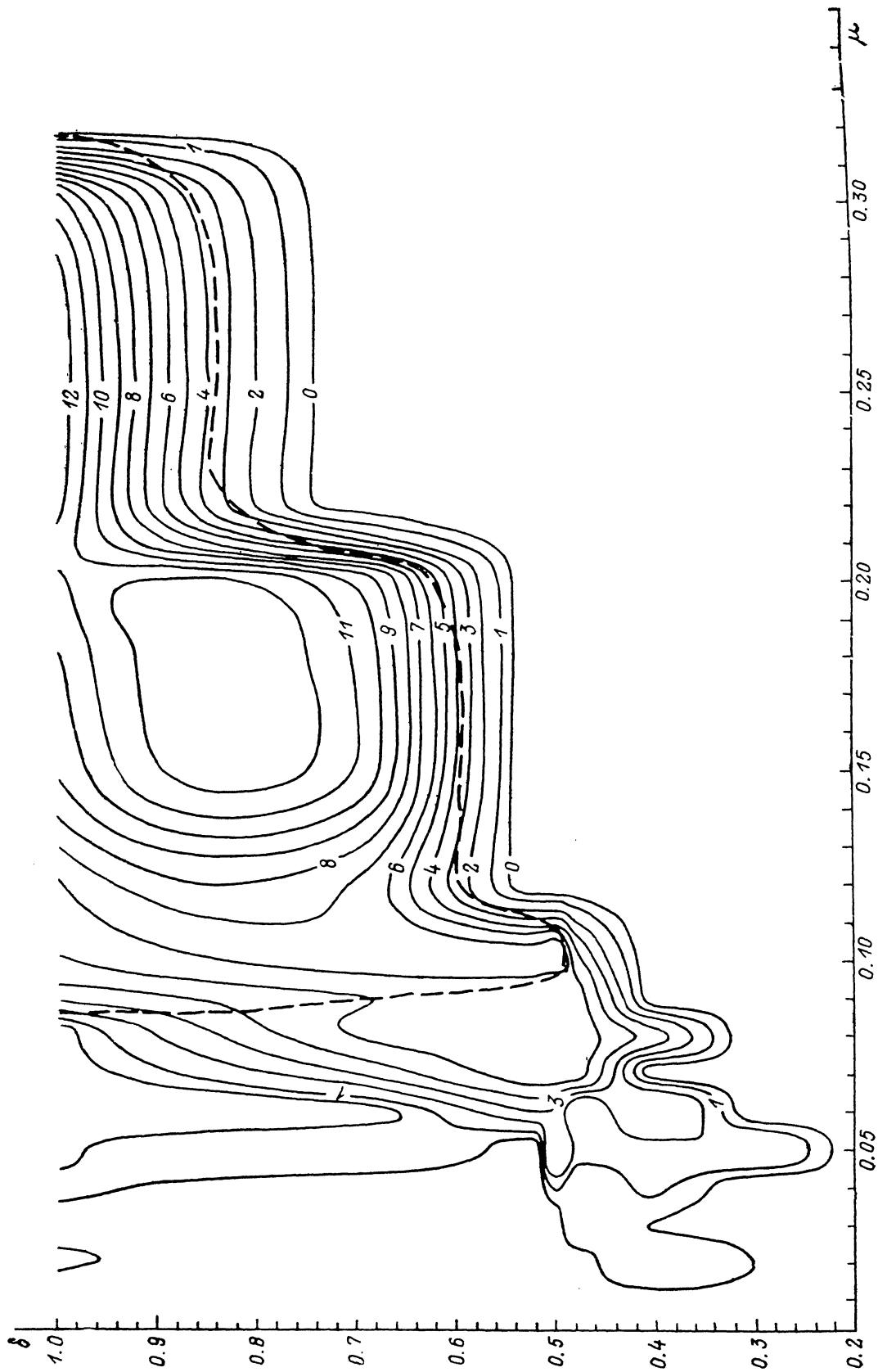


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров (μ , δ) на изодинии.

кривые, на которых гомоклиническая структура седлового периодического движения, отвечающего 0, становится притягивающей и сливается с тор-аттрактором. При этом возникает СА, имеющий иное строение и значительно большую ляпуновскую размерность: на рис. 4 видно сгущение изодим. Данное предположение подтверждается анализом стробоскопических проекций фазового пространства и спектров мощности.

Разбиение на изодимы позволяет выделить следующие характерные особенности: 1) параметры μ и δ качественно одинаково влияют на ляпуновскую размерность СА; 2) при уменьшении как μ , так и δ максимальная размерность СА уменьшается; 3) СА исчезает при $\mu \rightarrow 0$ и при $\delta \rightarrow 0$.

Об алгоритме оценки хаусдорфовой размерности множества неустойчивых слоев гомоклинической структуры

Как говорилось выше, на основе проведенных вычислений на плоскости параметров μ и δ можно выделить область значений, для которых гомоклиническая структура принадлежит СА. Однако гомоклиническая структура существует (хотя и не является притягивающей) для значительно более широкой области значений параметров (рис. 2). Ниже излагается алгоритм (см. также [22]), который позволяет оценить хаусдорфову размерность множества неустойчивых слоев гомоклинической структуры для тех значений параметров μ и δ , когда это множество является непритягивающим и не принадлежит СА.

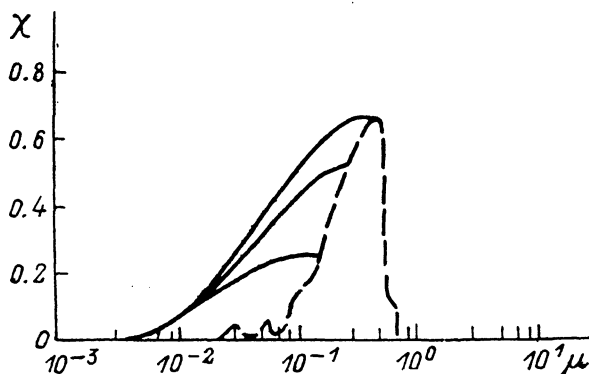


Рис. 5. Зависимости от параметра μ дробной части χ хаусдорфовой размерности множества неустойчивых слоев гомоклинической структуры (1—3) и дробной части ляпуновской размерности СА (штриховая кривая).

Пусть 0 — седловая неподвижная точка отображения $T: R^2 \rightarrow R^2$, Γ — гомоклиническая траектория седловой точки, $d \ll 1$ — размер окрестности $\Gamma \cap 0$.² В [23] показано, что дробная часть χ хаусдорфовой размерности множества неустойчивых слоев $\Gamma \cap 0$ является корнем уравнения

$$|\chi \ln \frac{C\sigma}{d} = -\ln(\sigma^{-\chi} - 1), \quad (3)$$

где σ — меньший единицы мультипликатор точки 0; C — некоторая постоянная, зависящая только от отображения T .

Предположим, что формула (3) справедлива и при конечных d ; верна гипотеза, выдвинутая в [24], согласно которой хаусдорфова размерность $\dim_H A$ аттрактора A совпадает с ляпуновской размерностью $\dim_\Lambda A$ (строгий результат [25]: $\dim_H(\rho) \leq \dim_\Lambda(\rho)$, где ρ — эргодическая мера, сосредоточенная на аттракторе A).

² Точнее говоря, d — максимальный радиус дисков, из которых состоит окрестность гомоклинической траектории.

Зафиксируем значения параметров μ и δ , при которых гомоклиническая структура является притягивающей. Несложно установить, что меньший единицы мультипликатор точки 0 удовлетворяет соотношению

$$\sigma = \exp(\varepsilon/2\mu - \sqrt{(\varepsilon/2\mu)^2 + 1/\mu}). \quad (4)$$

Определим размер d окрестности $\Gamma \cap 0$, согласно (2); вычислим дробную часть χ ляпуновской размерности СА, в состав которого входит гомоклиническая структура. После этого из уравнения (3) легко найти постоянную C . Далее считая, что C практически не зависит от параметров, и каждый раз вычисляя σ и d , можно определить величину χ для значений параметров μ и δ , при которых гомоклиническая структура является непритягивающей. На рис. 5 штриховой линией показана зависимость дробной части $\dim_{\Delta} A$ от параметра μ ($\delta = 1$), найденная численно; сплошными линиями отмечено семейство кривых $\chi(\mu)$, определяемых из уравнения (3), для которых постоянная C вычислена при разных μ и δ . Видно, что при достаточно малых μ все кривые данного семейства близки между собой, и можно ожидать, что размерность множества неустойчивых слоев гомоклинической структуры при малых μ оценивается верно.

Вообще говоря, данная оценка является завышенной, поскольку, во-первых, в формуле (3) учитывается лишь одна гомоклиническая траектория — «базовая», а в реальной структуре их может быть несколько; во-вторых, СА содержит не только гомоклинику, но и «останки» тор-аттрактора. Тем не менее это, по-видимому, единственный способ увидеть, как при изменении управляющих параметров меняется размерность гомоклинической структуры в конкретной динамической системе.

Заключение

В работе предложен метод исследования двухпараметрических семейств динамических систем с хаотическим поведением, заключающийся в построении на плоскости параметров бифуркационных кривых рождения СА и изодим — кривых, на которых СА имеют постоянную размерность. Применение этого метода к периодически возмущенному уравнению типа Рэля позволило установить, что при стремлении к нулю любого из управляющих параметров (параметра при старшей производной или амплитуды внешней силы) хаотическое поведение исчезает. Поскольку известны системы данного класса, для которых это не так, то возникает вопрос о том, как по типу поверхности медленных движений и структуре траекторий на ней определить, способствует хаосу или гасит его малый параметр при старшей производной. Постановка такой задачи — один из результатов работы. В работе установлено также, что амплитуда внешней силы и параметр производной оказывают одинаково существенное влияние на размерность СА, поэтому не менее чем двухпараметрическое исследование подобных задач может привести к ясности в понимании их строения. Предложенная работа является первым шагом в этом направлении.

Автор искренне благодарен В. С. Афраймовичу за постоянную поддержку и полезные обсуждения и М. И. Рабиновичу за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

- [1] Рабинович М. И. // УФН. 1978. Т. 125. № 1. С. 123—168.
- [2] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. N. Y.: Springer, 1983. 453 p.
- [3] Eckmann J.-P., Ruelle D. // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. N 3. P. 617—656.
- [4] Афраймович В. С. // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 189—213.
- [5] Морозов А. Д. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 2. С. 241—255.
- [6] Ueda Y. // J. St. Phys. 1979. Vol. 20. N 2. P. 181—196.
- [7] Holmes P., Whitley D. // Physica. 1983. Vol. 7D. N 1—3. P. 111—125.
- [8] Cartwright M., Littlewood J. // J. Lond. Math. Soc. 1945. Vol. 20. N 2. P. 180—189.
- [9] Guckenheimer J. // Physica. 1980. Vol. 1D. N 2. P. 227—235.
- [10] Holmes P., Rand D. // Quart. Appl. Math. 1978. Vol. 35. N 4. P. 495—509.

- [11] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 318 с.
- [12] Шильников Л. П. // Мат. сб. 1967. Т. 74 (116). № 3. С. 378—397.
- [13] Мельников В. К. // Тр. Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. № 1. С. 3—52.
- [14] Железняк А. Л. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1986. С. 194—208.
- [15] Хибник А. И. Материалы по МО ЭВМ. ОНТИ НЦБИ. 1979. Вып. 5. 72 с.
- [16] Абраймович В. С., Шильников Л. П. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 3—26.
- [17] Feigenbaum M., Kadanoff L., Shenker S. // Physica, 1982. Vol. 5D. N 2, 3. P. 370—386.
- [18] Куляшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. // РИЭ. 1980. Т. 25. № 2. С. 336—443.
- [19] Henon M., Heiles C. // Astron. J. 1964. Vol. 69. N 1. P. 73—79.
- [20] Shimada I., Nagashima T. // Prog. Theor. Phys. 1979. Vol. 61. N 6. P. 1605—1616.
- [21] Frederikson P., Kaplan J., Yorke E., Yorke J. // J. Dif. Eq. 1983. Vol. 49. N 2. P. 185—208.
- [22] Абраймович В. С., Железняк А. Л. // Тез. докл. Всесоюз. школы-семинара «Математическое моделирование в науке и технике». Пермь, 1986. С. 22—23.
- [23] Абраймович В. С., Песин Я. Б. // УМН. 1984. Т. 39. № 2. С. 135—136.
- [24] Kaplan J., Yorke J. // Commun. Math. Phys. 1979. Vol. 67. N 1. P. 93—100.
- [25] Douady A., Oesterle J. // C. R. Acad. Sci. 1980. Vol. 290AB. N 24. P. 1135—1138.

Институт прикладной физики
АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
31 декабря 1987 г.
В окончательной редакции
19 января 1989 г.