

05; 01

О НАДРЕЗАНИИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ЖЕСТКИМ КЛИНОВИДНЫМ ШТАМПОМ

Б. М. Нуллер, И. И. Шехтман

Рассматривается задача о надрезании упругой полуплоскости абсолютно жестким конечным клином небольшого угла раствора, ось которого и надрез перпендикулярны границе полуплоскости. Учитывается трение, возникающее на линиях контакта клина с упругим материалом, краевые условия содержат нелинейную составляющую контактных давлений. Условием разрушения материала перед острием клина служит известный критерий В. В. Новожилова. Граница полуплоскости свободна от напряжений, к торцу клина приложена осевая продольная сила. В математической постановке задача сведена к уравнению Винера—Хопфа и решена в квадратурах. Получена формула, связывающая величину силы резания с коэффициентом контактного трения, углом раствора клина, прочностными и упругими характеристиками полуплоскости. Построена также модель косога надрезания упругого полупространства. Исследовано влияние направления движения пространственного клина на силовые и энергетические параметры процесса.

Под резанием обычно понимают образование щели в материале при его разрушении за счет контакта в области вершины с острием движущегося жесткого клиновидного тела (резца), более твердого, чем сам материал. Начальный этап этого процесса, когда образовавшаяся щель еще мала и не вмещает резец полностью, назовем надрезанием. При надрезании некоторая часть резца остается за пределами области, занимаемой материалом.

В простейшей постановке резец будем рассматривать как пространственный абсолютно жесткий клин с плоскими гранями, в качестве надрезаемой области возьмем упругое полупространство, в качестве условия разрушения материала перед клином — критерий В. В. Новожилова [1]. В этом случае при прямом надрезании [2, 3] возникает задача о плоской деформации полуплоскости, ослабленной щелью, в которую вставлен клин; при косом надрезании наряду с плоской появляется антиплоская деформация той же области.

1. Пусть жесткий клин $|y| \leq \delta(1-x)$ с углом раствора 2δ под действием осевой силы $2T$ соприкасается с упругой полуплоскостью $x \geq 0$, ослабленной надрезом $y=0$, $0 \leq x \leq 1$. На берегах надреза между клином и полуплоскостью имеется контакт в условиях предельного трения с коэффициентом трения $\rho \geq 0$.

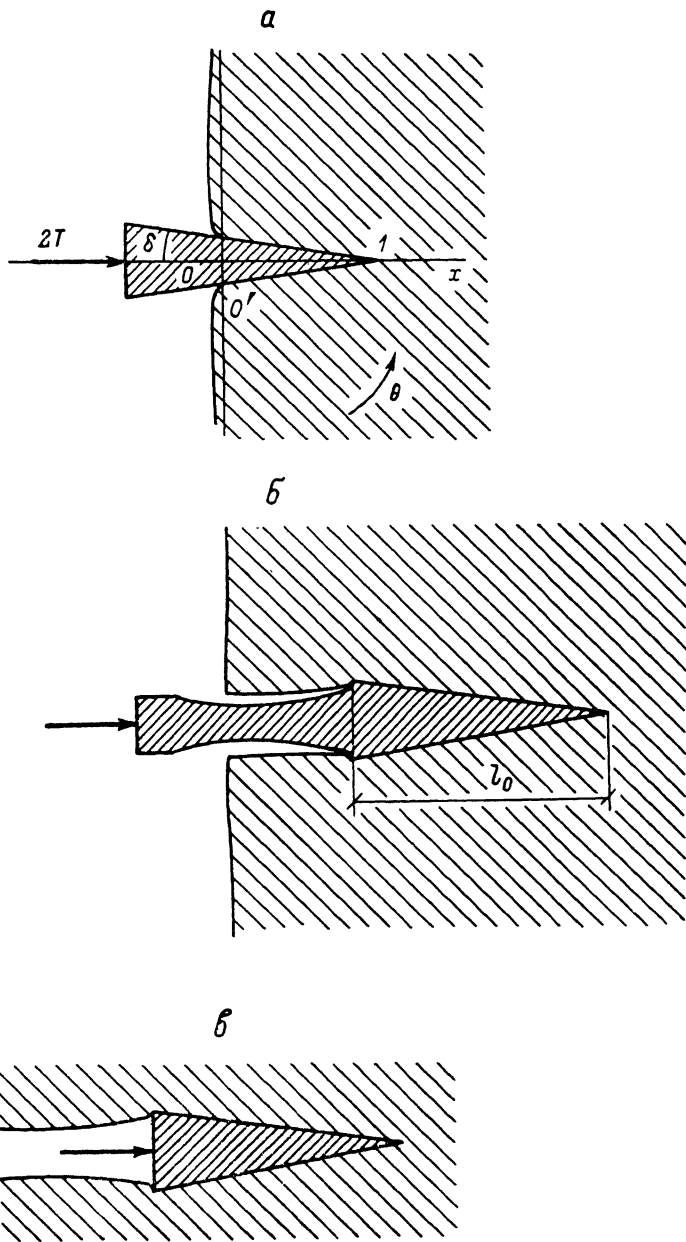
Введем в рассмотрение систему полярных координат r, θ с центром в точке O' $x=0, y=-\delta$ (см. рисунок, а), причем угол будем отсчитывать против часовой стрелки от луча $x=0, y \leq -\delta$. Ввиду симметрии задачи достаточно записать граничные условия для нижней четверти плоскости $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r, 0) = \tau(r, 0) = v(r, \pi/2) - v(r) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \\ v(r) = \delta r, \quad 0 \leq r \leq 1; \quad v(r) = \delta, \quad r > 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau(r, \pi/2) = 0, \quad r > 1, \\ \varphi(r, \pi/2) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(r, \theta) \equiv \tau(r, \theta) + \mu \sigma_{\theta}(r, \theta), \quad \mu = \rho + \delta. \quad (3)$$

Запись условия контакта с сухим трением в форме (3) связана с тем, что фактически при $\delta > 0$ напряжения τ , σ_θ на берегу надреза наклонены к осям x , y под углом δ и порождают на оси $\theta = \pi/2$ напряжения τ^1 , σ_θ^1 , которые, если считать δ и ρ малыми и пренебречь их квадратами и произведениями, связаны соотношением $\tau^1 = -\mu\sigma_\theta^1$.



Кроме того, в постановку задачи входит интегральное условие равновесия клина

$$T = \int_0^1 \tau(r, \pi/2) dr \quad (4)$$

и условия ограниченности локальной энергии вблизи точек $(0, \pi/2)$ и $(1, \pi/2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\langle (p \pm \kappa) \left[A_1(p) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p+1)\theta \mp A_2(p) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p+1)\theta \right] + \right. \\ \left. + (p-1) \left[A_3(p) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p-1)\theta \mp A_4(p) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p-1)\theta \right] \right\rangle \frac{dp}{r^p}, \quad (5)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$; G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона полуплоскости; контур L — прямая $\operatorname{Re} p = \lambda$, $-1 < \lambda < 0$.

Условия (1), (3) позволяют выразить $A_j(p)$ через одну неизвестную функцию $A(p)$

$$\begin{aligned} A_j(p) &= A(p) p^{-1} (1-p)^{-1} \Delta_j + \delta G R r_j, \\ \Delta_1 &= (1-p)(\kappa - 1 - 2p) \sin p\pi/2, \quad \Delta_2 = (1-p)(\kappa + 1 - 2p) \cos p\pi/2, \\ \Delta_3 &= -\Delta_1, \quad \Delta_4 = (1+p)(1-p)^{-1} \Delta_2, \\ r_1 &= -r_3 = (1+p) \Delta_4^{-1}, \quad r_2 = r_4 = 0, \\ \delta R &= \int_0^\infty v(r) r^{p-1} dr = -\delta [p(p+1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив полученные соотношения в (2), (3), получим два функциональных уравнения

$$\begin{aligned} \varphi^+ + \varphi^- &= A F_1 - 4\delta G F_3, \quad \tau^+ + \tau^- = A F_2 - 4\delta G F_4, \\ F_1(p) &= a \sin p\pi + b(1 - \cos p\pi) - 2\mu p(a - 2p), \\ F_2(p) &= a \sin p\pi, \\ F_3 &= [p + \mu(p-1) \operatorname{tg} p\pi/2] B^{-1}, \quad F_4 = p B^{-1}, \\ B &= (p+1)(\kappa + 1 - 2p), \quad a = \kappa + 1, \quad b = \mu(\kappa - 1), \\ \varphi^- &= \int_1^\infty \varphi(r, \pi/2) r^p dr, \\ \tau^+ &= \int_0^1 \tau(r, \pi/2) r^p dr, \quad \varphi^+ = \tau^- = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

исключив из которых функцию $A(p)$, приходим к уравнению Винера—Хопфа

$$\begin{aligned} \varphi^- &= K \tau^+ + 4\mu \delta G a^{-1} F, \quad p \in L, \\ K &= F_1 F_2^{-1}, \quad F = (1 - \cos p\pi - 2\mu p^2) (p+1)^{-1} \sin^{-1} p\pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Разобьем функцию $K(p)$ на множители, удобные для факторизации,

$$\begin{aligned} K &= K_1 K_2, \quad K_1 = 1 + \frac{b}{a} \operatorname{tg} p\pi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \frac{\cos(p\pi - \alpha)}{\cos p\pi}, \\ \alpha &= \pi^{-1} \operatorname{arctg}(ba^{-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Факторизацию $K_1(p) = [K_1^+(p)]^{-1} K_1^-(p)$ с учетом формулы $\cos \pi z = \pi \Gamma^{-1}(1/2 - z) \Gamma^{-1}(1/2 + z)$ можно осуществить элементарными средствами

$$K_1^+ = \frac{\Gamma(1/2 + p - \alpha)}{\Gamma(1/2 + p)}, \quad K_1^- = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \frac{\Gamma(1/2 - p)}{\Gamma(1/2 - p + \alpha)}. \quad (10)$$

Заметим, что функция $K(p)$ имеет при $p=0$ устранимую особенность: на мнимой оси ее действительная часть всюду положительна, следовательно, индекс, как и у функции $K_1(p)$, равен отнесенной к π разности аргументов предельных значений $1 \pm iba^{-1}$. Функция $K_2 = K K_1^{-1}$ на мнимой оси не обращается в нуль, удовлетворяет условию Гельдера и имеет индекс, равный нулю.

Таким образом, ее можно факторизовать, решив методом Ф. Д. Гахова [5] однородную задачу Римана с коэффициентом $K_2(p)$ на мнимой оси

$$K_2^\pm(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln K_2(t) dt}{t-p} \right\}. \quad (11)$$

В отличие от [5] индексом «+» будем обозначать функции, регулярные в правой полуплоскости.

С учетом факторизации преобразуем (8) к виду

$$\frac{\varphi^-}{K^-} - X = \frac{\tau^+}{K^+}; \quad X = \rho \delta G X_0, \quad X_0 = \frac{4F}{aK^-}. \quad (12)$$

Решив далее задачу о скачке $X(p)$ на мнимой оси, получим в силу обобщенной теоремы Лиувилля

$$X = X^- - X^+, \quad X^\pm = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{X(t) dt}{t-p},$$

$$\frac{\varphi^-}{K^-} - X^- = \frac{\tau^+}{K^+} - X^+ = P_n, \quad p \in L. \quad (13)$$

Степень n полинома P_n определим из условия интегрируемости $\tau(r, \pi/2)$ в окрестности точки раздела условий $r=1-0$. Согласно (13), (9), (10) и асимптотической формуле Стирлинга для гамма-функций, при $p \rightarrow \infty$ функция $\tau^+(p) = O(p^{n-\alpha})$, откуда по теореме абелева типа ([6], с. 48) напряжение имеет вид $\tau(r, \pi/2) = O[(1-r)^{\alpha-n-1}]$, где $0 \leq \alpha < 1/2$; из неравенства $\alpha - n - 1 > -1$ будем иметь $n=0$, $P_n = C$.

Из (13) получим, что $\tau^+ = K^+(C + X^+)$. Используя условие (4) в плоскости трансформант $\tau^+(0) = T$ и равенство (13), найдем постоянную $C = T [K^+(0)]^{-1} - X^+(0)$ и решение уравнения (8)

$$\tau^+(p) = K^+(p) \{ T [K^+(0)]^{-1} - X^+(0) + X^+(p) \}. \quad (14)$$

Контактные напряжения $\tau(r, \pi/2)$ получим обратным преобразованием их меллиновской трансформанты $\tau^+(p)$

$$\tau(r, \pi/2) = \frac{1}{2\pi i} \int_L K^- \frac{F_2}{F_1} \left[\frac{T}{K^+(0)} - X^+(0) + X^- - X \right] r^{-p-1} dp. \quad (15)$$

Пронумеруем корни p_n функции $F_1(p)$, лежащие в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, в порядке возрастания $|\operatorname{Re} p_n|$. Взяв вычет подынтегральной функции (15) в точке $p=p_1$, можно найти асимптотику контактных напряжений $\tau(r, \pi/2)$ при $r \rightarrow 0$

$$\tau(r, \pi/2) = K^-(p_1) \frac{F_2(p_1)}{F_1'(p_1)} \left[\frac{T}{K^+(0)} - X^+(0) + X^-(p_1) - X(p_1) \right] r^{p_1-1} + O(r^{p_1-1}). \quad (16)$$

Функция $\varphi^-(p)$ имеет при $p \rightarrow \infty$ асимптотику $\varphi^-(p) = (a^2 + b^2)^{1/2} a^{-1} C p^{-\alpha} + O(p^{-\alpha})$. Из условия $\tau=0$, $\varphi \equiv \mu \sigma_\theta$ при $r > 1$, $\theta = \pi/2$ следует, что в упругом теле на продолжении оси надреза возникают бесконечные растягивающие напряжения, асимптотика которых при $r \rightarrow 1+0$ имеет вид

$$\sigma_\theta(r, \pi/2) = (a^2 + b^2)^{1/2} [a\mu\Gamma(\alpha)]^{-1} C (r-1)^{-1+\alpha} + O[(r-1)^{-1+\alpha}]. \quad (17)$$

Если надавливающая сила, а вместе с ней интенсивность напряжений (17) превышает некоторое критическое значение $T > T_0$, то происходит разрушение материала перед острием резца, надрез увеличивается. T_0 можно определить из критерия хрупкой прочности В. В. Новожилова [1]

$$\int_1^{1+a_0} \sigma_\theta(r, \pi/2) dr \geq a_0 \sigma_c, \quad (18)$$

где a_0 , σ_c — прочностные характеристики материала.

Подставив (17) в (18) и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} T_0 &= \mu (t_1 a_0^{1-\alpha} \sigma_c + t_2 \delta G), \quad t_1 = K^+(0) a (a^2 + b^2)^{-1/2} \Gamma(1 + \alpha), \\ t_2 &= K^+(0) X_0^+(0), \quad X^+(p) = \mu \delta G X_0^+(p). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначенные звездочкой размерные величины параметров задачи

$$G = G^* l, \quad T = T^*, \quad a_0 = a_0^* l^{-1}, \quad \sigma_c = \sigma_c^* l, \quad (20)$$

где l — размерная длина зоны контакта.

Подставим (20) в (19)

$$T_0^* = H(l) = \mu (t_1 a_0^{*1-\alpha} \sigma_c^* l^\alpha + t_2 \delta G^* l). \quad (21)$$

Из (21) следует, что критическое значение силы, необходимое для увеличения длины надреза, тем меньше, чем меньше длина уже существующего надреза, коэффициент трения, модуль упругости и прочностные постоянные материала полуплоскости. Это качественно совпадает с результатами эксперимента.

Пусть теперь жесткий резец имеет клиновидное окончание конечной длины l_0 , за которым следует фаска (см. рисунок, б). Пусть, надавливая на резец силой $2T$, им воздействуют на полуплоскость, в которой еще нет надреза, т. е. длина надреза $l=0$. Из (21) $T_0^*=0$, т. е. любой силы $T > 0$ достаточно, чтобы материал начал разрушаться. В полуплоскости образуется надрез, длина его увеличивается, процесс может прекратиться только при $H(l)=T$. Функция $H(l)$ монотонна, следовательно, при $T < H(l_0)$ процесс остановится на некоторой длине надреза $l < l_0$. Продвижение резца через материал (резание) (см. рисунок, в) означает в отличие от надрезания образование в материале щели длиной $l > l_0$ и возможно только при $T > H(l_0)$.

2. Рассмотрим косое надрезание упругого полупространства трехмерным жестким клином $|y| \leq \delta(1-x)$, $-\infty < z < \infty$, при котором угол между направлением поступательного движения резца и осью Ox равен γ . Пусть на единицу ширины клина действуют на оси Ox сила $2T_x'$ и по оси Oz сила $2T_z'$, коэффициент контактного трения ρ_1 не зависит от γ . Тогда пространственная задача распадается на решенную выше плоскую смешанную (задачу А) при $\rho = \rho_x = \rho_1 \cos \gamma$ и антиплоскую основную (задачу В) для четвертьплоскости $y < 0$, $x > 0$ с граничными условиями $\tau_{yz} = \rho_x \sigma_y^0$ ($x \in [0, 1]$), $\tau_{yz} = 0$ ($x > 1$) при $y=0$, где $\rho_x = \rho_1 \sin \gamma$, σ_y^0 — нормальные контактные напряжения в задаче А. Решение антиплоской задачи не дает особенностей в напряжениях на продолжении разреза, где в силу симметрии $\tau_x = 0$, не вносит поправок в критерий Новожилова и может быть отброшено при вычислении величин T_x' , T_z' и т. д. Если условие разрушения материала выполняется со знаком равенства, то аналогично (19) из решения задачи А получим

$$T_x = \mu_1 S, \quad S = t_1 a_0^{1-\alpha} \sigma_c + t_2 \delta G, \quad \mu_1 = \rho_x + \delta. \quad (22)$$

С другой стороны, условие равновесия клина имеет вид

$$T_x = \mu_1 J, \quad T_z = \rho_x J, \quad J = \int_0^1 \sigma_y^0(x, 0) dx. \quad (23)$$

Сопоставляя (22) и (23), получим равенство $J=S$. Так как величина S при малых ρ_1 и δ слабо зависит от γ , то косое резание существенно отличается от прямого, ибо с увеличением γ снижается вплоть до нуля величина ρ_x , а значит, уменьшается составляющая T_x -силы надрезания. Полная сила, действующая на единицу ширины клина, $2T=2S \sqrt{\delta^2 + 2\delta \rho_1 \cos \gamma + \rho_1^2}$ также принимает наименьшее значение при $\gamma=1/2\pi$, когда надрезание вырождается в поперечное скольжение клина. Энергия, затрачиваемая на единичное увеличение площади надреза, $E=T \cos^{-1} \gamma$ минимальна при $\gamma=0$. Таким образом, косое надрезание энергетически невыгодно. Однако при $\gamma \rightarrow 1/2\pi$ величина глубины

надрезания данной силой $2T$ стремится к максимально возможной l_m , при этом сила направлена под углом $\gamma_1 = \arctg(T_x T_x^{-1}) = \arctg(\rho_1 \delta^{-1})$, величину l_m можно определить из условия $T_x = H(l_m)$, $T_x = T\delta(\rho_1^2 + \delta^2)^{-1/2}$.

Литература

- [1] Новожилов В. В. // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212—222.
- [2] Филоненко С. П. Резание металлов. М.; Киев: Машгиз, 1963. 211 с.
- [3] Ивановский Е. Г. Резание древесины. М.: Наука, 1975. 330 с.
- [4] Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
- [5] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
- [6] Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 278 с.

Ленинградская лесотехническая
академия им. С. М. Кирова
Научно-исследовательская часть

Поступило в Редакцию
3 февраля 1988 г.

В окончательной редакции
27 октября 1988 г.