1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, № 3

01; 03

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ ЛАНЖЕВЕНОВСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г. Е. Скворцов

Дается развернутое изложение гидродинамически ланжевеновского подхода к описанию турбулентного течения. Этот подход включает учет случайных сил в уравнениях гидродинамики, решение уравнений для пульсаций и вычисление на их основе турбулентных характеристик. При этом определяются напряжения Рейнольдса, тензор турбулентной вязкости и их спектральные плотности. Получаются выражения турбулентных напряжений через градиенты средней скорости, замыкающие уравнения Рейнольдса. Обсуждаются зависимости спектров от градиентов скорости и тем самым закладываются основы неизотропной структурной теории. Полученные результаты сопоставляются с экспериментальными данными.

1. Турбулентность является наиболее распространенной формой движения газов, жидкостей и плазмы, она сопутствует горению и кипению, служит основным способом смешения и теплообмена. Многообразие условий возникновения турбулентности и широчайший диапазон ее пространственно-временных масштабов (от пристенного слоя до солнечной атмосферы) является пока непреодолимым препятствием для универсального описания феномена турбулентности. Предлагаемый подход в силу ряда своих качеств может служить подходящей основой достаточно общей теории турбулентного движения.

В работе даются обоснование и развернутая схема гидродинамически ланжевеновского подхода (ГЛП). Производится конкретизация ГЛП для погранслойного течения; при этом осуществляется замыкание уравнения Рейнольдса (и аналогичным образом уравнений для вторых моментов). Ранее [1, 2] был представлен ГЛ метод замыкания и даны некоторые его приложения. Вследствие краткости публикаций не был рассмотрен ряд существенных вопросов, что препятствовало использованию этого подхода.

Эффективность ГЛП обеспечивается его достаточной адекватностью природе турбулентного движения, простотой и общностью схемы, синтетическим характером по отношению к основным результатам, полученным ранее при описании турбулентности.

2. Гидродинамически ланжевеновский подход основывается на уравнениях гидродинамики, учитывает статистическую природу турбулентности посредством ланжевеновской силы и заключается в решении уравнений для пульсаций и использовании полученных выражений для замыкания уравнений турбулентного переноса.

Исходными служат уравнения гидродинамики турбулизованной жидкости (ТЖ). Они имеют такой компактный вид:

$$\partial_t \mathscr{P} = \mathscr{H}[\mathscr{P}] + F. \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{P} = \{\rho, \ V_i, \ T\}$ — совокупность гидродинамических (ГД) величин; $\mathscr{H}[\cdot]$ — оператор ГД системы; $F = \{f_\rho, f_i, f_T\}$ — набор турбулентных источников плотности ρ, скорости V_i и температуры T.

При обычных условиях (дозвуковых скоростях, отсутствии химических реакций) вклад случайной силы f_i является главным. Поскольку пульсации других ГД величин обусловлены пульсациями скорости, то будем говорить лишь о последних.

Случайная сила ланжевеновского типа в (1) учитывает характерные особенности турбулентного движения: стохастичность значений скорости и индивидуализацию жидких частиц. Последняя возникает вследствие «разрушения» ламинарного течения и приводит к представлению о структурно-кинетических элементах ТЖ — турбонах. Ланжевеновская сила (ЛС), действующая на жидкий элемент, призвана отражать весьма сложную эволюцию турбонов, которые рождаются, растут и распадаются, взаимодействуя со средним течением и друг с другом. Заметим, что более адекватно отражает динамику и статистику турбонов метод кинетического уравнения, который является, однако, намного сложнее, чем ГЛП. Использование ЛС оказывается весьма конструктивным. Она, и что важней, ее моменты и корреляционные функции могут быть экспериментально определены согласно уравнению (1) по случайным полям скорости и ускорения. ЛС обладает большой степенью универсальности, поскольку, как убедимся далее, ее спектр лежит в универсальной, инерционно-вязкой области. Вследствие слабой зависимости ЛС от локальных значений средних величин (что вытекает из свойства универсальности) удается для широкого класса течений при замыкании ограничиться решением линеаризованной системы пульсационных уравнений.

3. Общая схема ГЛ метода замыкания уравнений турбулентного переноса включает получение уравнений для пульсаций, общее их решение, установление с помощью выражений пульсаций общего вида замыкающих соотношений, конкретизацию их для различных течений. Продемонстрируем ГЛ метод для вполне представительного случая несжимаемой и нетеплопроводной жидкости без действия регулярных сил.

Уравнения (1) в этом случае принимают вид

$$\partial_t V_i + V_j \partial_j V_i + \frac{1}{\rho}\partial_i p - \nu \Delta V_i = f_i, \quad \partial_j V_j = 0. \tag{2}$$

Выделяем, как обычно, среднюю и пульсационную компоненты $V_i = U_i + v_i$, $p = P + p'$. Осреднение (2) дает уравнение Рейнольдса

$$\partial_t U_i + \partial_j (U_i U_j) + \partial_j \overline{(v_i v_j)} + \frac{1}{\rho}\partial_i P = \nu \Delta U_i, \quad \partial_j U_j = 0, \tag{3}$$

$\rho\overline{v_i v_j}$ — турбулентные напряжения (Рейнольдса).

Для замыкания уравнений (3) необходимо выразить эти напряжения через средние скорости (производные и функционалы от них). Получим уравнения для пульсаций скорости. Комбинируя (2) и (3), будем иметь

$$\partial_t v_i + D_{ilj}(U_j v_l + U_l v_j) + D_{ilj}(v_i v_l) - D_{ilj}\overline{(v_j v_l)} - \nu \Delta v_i = \varphi_i,$$

$$D_{ilj} = \partial_j d_{il}, \quad d_{il} = \delta_{il} - \partial_i \frac{1}{\Delta}\partial_l, \quad \varphi_i = d_{il} f_l, \tag{4}$$

$1/\Delta$ — обратный оператор Лапласа, φ_i — модифицированная ЛС.

При получении (4) была учтена взаимосвязь пульсаций давления и скорости и первые выражены через вторые с помощью уравнения неразрывности. В уравнении (4) произведем оценку членов. Поскольку производные от пульсационных величин значительно больше производных от средних, то четвертый член мал сравнительно с третьим. Для большинства турбулентных течений (кроме струйных) средние квадраты пульсаций значительно меньше средних величин $(\overline{v_i^2})^{1/2} < 0.1\,U_i$, что позволяет пренебречь третьим членом в сравнении со вторым. Таким образом, приходим к линейному уравнению для пульсаций

$$\left[(d_t - \nu\Delta)\delta_{ij} + U_{ij} - \frac{2}{\Delta}(U_{lj}\partial_i + U_{lij})\partial_l\right] v_j = \varphi_i,$$

$$d_t = \partial_t + U_l \partial_l, \quad U_{ij} = \partial_j U_i, \quad U_{jli} = \partial^2_{li} U_j, \quad \nabla \cdot \mathrm{v} = 0. \tag{5}$$

Это уравнение используется для замыкания уравнений турбулентного переноса (ТП): оно решается, и по выражениям для пульсаций вычисляются дополнительные моменты, входящие в уравнения ТП, например напряжения Рейнольдса.

Общее решение уравнения для пульсаций (5) имеет такой вид:

$$\mathbf{v}=[(d_t-\nu\Delta)I+D-W]^{-1}\varphi=\int d\tau d\xi R^{(2)}(t-\tau,\ \mathbf{x}-\xi,\ U,\ D,\ \partial D(\tau,\ \xi))\varphi(\tau,\ \xi),$$

$$D=\{U_{ij}\},\ W=\frac{2}{\Delta}\{(U_{lj}\partial_i+U_{lij})\partial_l\}. \tag{6}$$

Отсюда получаем выражение тензора вторых моментов

$$\overline{\mathbf{vv}}=\int\int d\tau d\tau' d\xi d\xi' R^{(4)}(\tau,\ \xi;\ \tau',\ \xi';\ D,\ \partial D(\tau,\ \xi);\ D,\ \partial D(\tau',\ \xi'))\,\Phi^{(2)}(\tau,\ \xi;\ \tau',\ \xi'), \tag{7}$$

где $R^{(4)}=R^{(2)}(\tau,\ \xi)\,R^{(2)}(\tau',\ \xi')$, $\Phi^{(2)}=\overline{\varphi\varphi}$ — корреляционный тензор ЛС.

Замыкающее, или определяющее, соотношение (ОС) общего вида (7) выражает напряжения Рейнольдса через величины D, ∂D, а также корреляторы ЛС; последние отражают статистические свойства и структуру ТЖ. Соотношения (7) имеют операторно-функциональный, нелокальный и запаздывающий характер; они нелинейны относительно градиентов.

4. Первоначальная конкретизация ОС (7) может быть осуществлена на основе принципа соответствия аналогично тому, как это сделано в общей гидродинамике [3].

Произведем возможно более полную конкретизацию вида ОС для стационарного течения погранслойного типа, причем ограничимся рассмотрением «крупномасштабной» части течения. Последнее означает, что в этой области мал параметр неоднородности $l_T/\nabla\ln U_i$, l_T — длина пробега энергосодержащих турбонов (порядка толщины погранслоя). Это условие позволяет использовать при решении (5) приближение «замороженных» коэффициентов.

В этом приближении удобно решать (5), применяя преобразование Фурье по времени и координатам. Система (5) принимает вид

$$\left[(\nu k^2+i\Omega)\delta_{ij}+U_{ij}-\frac{2}{k^2}(U_{lj}k_i-iU_{lij})k_l\right]\hat{v}_j\equiv h_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})\hat{v}_j=\hat{\varphi}_i,$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}=0,\quad \Omega=\omega+\mathbf{U}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

Решение уравнений (8)

$$\hat{v}_i(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{H_{ni}}{H}\hat{\varphi}_n,\quad H=\det[h_{ij}], \tag{9}$$

H_{ni} — алгебраическое дополнение элемента n_{in}.

Вычисление вторых моментов в применяемом квазиоднородном приближении можно производить по ω, k-образам пульсаций, согласно формуле

$$\overline{v_iv_j}=\frac{1}{2}\int d\omega d\mathbf{k}\,[\overline{\hat{v}_i\hat{v}_j^+}+\overline{\hat{v}_i^+\hat{v}_j}]=\int d\omega d\mathbf{k}\,\hat{R}_{ij}(\omega,\ \mathbf{k}), \tag{10}$$

крестом отмечены комплексно-сопряженные величины, $\hat{R}_{ij}$ — спектральные плотности моментов.

Внося в (10) выражения $\hat{v}_i$ и используя приближение случайных фаз $\overline{\hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j^+}=\Phi_i(\omega,\ \mathbf{k})\,\delta_{ij}$ (справедливость которого может быть обоснована), получаем

$$\overline{v_iv_j}=\frac{1}{2}\int\frac{d\omega d\mathbf{k}}{HH^+}\sum_n(H_{ni}H_{nj}^++H_{ni}^+H_{nj})\,\Phi_n(\omega,\ \mathbf{k}). \tag{11}$$

С учетом вида H_{ni} будем иметь

$$\rho\overline{v_iv_j}=K_i\delta_{ij}-\rho\nu_{Tij}^{lm}U_{lm}+K_{ij}^{lmn}U_{lmn}, \tag{12}$$

где $K_i(D, dD)$ — диагональный член изотропного типа; $\rho\nu_{Tij}^{lm}(D, dD)$ — тензор турбулентной вязкости; третий член «напряжений второго порядка» мал в рассматриваемом случае.

Полученное ОС (12) является первым приближением (7); оно локально, однако существенно нелинейно относительно величин D, dD — основных аргументов турбулентной вязкости (ТВ). Интегральные представления (11) могут быть вычислены и ОС (12) полностью конкретизированы при наличии ω, k-спектра ЛС.

5. Рассмотрим более подробно случай плоского течения $\mathrm{U}(x_1, x_2)=(U_1, U_2, 0)$ погранслойного типа $|U_1| \gg |U_2|$, $|d_2U_i| \gg |d_1U_i|$. Для него матрица системы (8) принимает вид

$$\begin{gathered}h_1=\varkappa+\gamma_1U_{11}+i(\Omega+\xi_1U_{111}),\ h_{12}=\gamma_1U_{12}-k_{12}U_{22}+i\xi_1U_{112},\\ h_2=\varkappa+\gamma_2U_{22}-k_{12}U_{12}+i(\Omega+\xi_1U_{122}),\quad h_{21}=\gamma_2U_{21}-k_{12}U_{11}+i\xi_1U_{112},\\ h_{13}=h_{23}=0,\quad h_{31}=-k_{13}U_{11},\quad h_{32}=-k_{13}U_{12},\quad h_3=\varkappa+i\Omega,\\ \varkappa=\nu k^2,\ k_{ij}=2k_ik_j/k^2,\quad \gamma_i=1-k_{ii},\quad \xi_1=2k_1/k^2.\end{gathered}\tag{13}$$

Используя выделенность в матрице (13) блока для $\hat{v}_{1,2}$ и условие несжимаемости для $\hat{v}_3$, получаем

$$\hat{v}_1=\frac{1}{H}(h_2\hat{\varphi}_1-h_{12}\hat{\varphi}_2),\qquad \hat{v}_2=\frac{1}{H}(-h_{21}\hat{\varphi}_1+h_1\hat{\varphi}_2),$$

$$\hat{v}_3=-\frac{1}{Hk_3}[(k_1h_2-k_2h_{21})\hat{\varphi}_1+(k_2h_1-k_1h_{12})\hat{\varphi}_2].\tag{14}$$

Выражение $\hat{v}_3$ из уравнений с матрицей (13) и условие несжимаемости в виде (14) дают линейную связь между $\hat{\varphi}_i$, из которой, в частности, вытекает, что ЛС не является соленоидальной.

Используя выражения ω, k-образов пульсаций (14), а также приближение случайных фаз, непосредственным образом получаем спектральные плотности всех вторых моментов. Приведем наиболее характерные из них, отбрасывая несущественные члены

$$R_{12}(\omega,\ \mathbf{k})\simeq-(\varkappa+\gamma_1U_{11})\gamma_1\Psi_2U_{12}-\Omega\xi_1\Psi_2U_{112}-(\varkappa-\gamma_2U_{11}-k_{12}U_{12})\gamma_2\Psi_1U_{21},$$

$$\Psi_1=\frac{\Phi_i(\omega,\ k)}{HH^+},\qquad H(\omega,\ k)\simeq h_2h_2,$$

$$h_ih_i^+=(\varkappa+\gamma_iU_{ii}-\delta_{i2}k_{12}U_{12})^2+(\Omega+\delta_{i2}\xi_1U_{122})^2.\tag{15}$$

$$R_1(\omega,\ \mathbf{k})=\psi_1+\gamma_1^2\Psi_2U_{12}^2,\quad R_2(\omega,\ \mathbf{k})=\psi_2,\quad \psi_i=\frac{\Phi_i(\omega,\ \mathbf{k})}{h_ih_i^+}.\tag{16}$$

Выражения (15), (16) определяют вид соотношений (12) и дают интегральные представления тензоров ТП. Например, для основной компоненты ТВ ν_{T12}^{12}, согласно (15), имеем

$$\nu_T(U_{ij},\ U_{ijl})=\int\frac{d\omega d\mathbf{k}}{HH^+}\gamma_1(\varkappa+\gamma_1U_{11})\Phi_2(\omega\mathbf{k}).\tag{17}$$

Полученные выражения (15)—(17) демонстрируют ряд свойств коэффициентов ТП; например, они выявляют их поведение для предельных значений градиентов. Так, (17) показывает, что ν_T при исчезновении градиентов стремится к отличному от нуля однородному значению, при неограниченном увеличении градиентов ТВ стремится к нулю. Такое поведение согласуется с предписаниями общей гидродинамики [3]. Заметим, что, хотя исходные рамки рассмотрения ограничены малыми градиентами, полученные выражения тензоров ТП дают удовлетворительную экстраполяцию на область значительных градиентов.

Выражения спектров (15), (16) позволяют получить оценку «спектрального коэффициента корреляции» $K_{12}(\omega,\ \mathbf{k})$ для больших значений частоты. Согласно (15), (16), имеем (принимая $\Phi_1\sim\Phi_2$)

$$K_{12}(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{|R_{12}(\omega,\ \mathbf{k})|}{|R_1(\omega,\ \mathbf{k})R_2(\omega,\ \mathbf{k})|^{1/2}}\approx\frac{|\Omega\xi_1U_{112}+\varkappa\gamma_1U_{12}|}{\Omega^2+\varkappa^2}.\tag{18}$$

Это предсказание (относительно универсальное из-за наличия градиентов в числителе) можно сравнить с экспериментом (см. [4, с. 419]). Качественное согласие очевидно: зависимости $K_{12}(\omega)$ при большой частоте для разных течений (струи, канала, погранслоя) подчиняются закону ω^{-s}, $1 \leqslant s \leqslant 2$.

Получим некоторые сведения относительно спектра ЛС $\Phi_i(\omega, \mathbf{k})$. Этот спектр выражается через спектры вторых моментов (СВМ). По определению $\hat{\varphi}_i$, согласно (8), имеем

$$\Phi_i(\omega, \mathbf{k}) = (\varkappa^2 + \Omega^2)\hat{R}_i + U_{ij}\hat{R}_j + 2\varkappa \sum_j U_{ij}\hat{R}_{ij} + \ldots \tag{19}$$

Очевидно, для малой скорости сдвига или для больших частот и волновых чисел спектр ЛС выражается через СВЧ посредством первого слагаемого. Такая связь свидетельствует об универсальности ЛС: она показывает, что спектр ЛС лежит правее спектра энергии в универсальной области. Эта связь при малой анизотропии позволяет получить зависимость для спектра ЛС, если вид изотропного СВМ известен. Для оценок правомерно считать, что спектр ЛС очень мал вне некоторого «среднего» интервала, включающего инерционный, а в нем слабо меняется.

6. Коэффициенты турбулентного переноса конкретизируются полуфеноменологическим образом с использованием получаемых на основе интегральных представлений интерполяционных выражений.

Первоначальное выявление зависимостей R_{ij} произведем, применяя способ «подходящих масштабов», на примере R_{12}. Перейдем в интегральном представлении (17) к безразмерным величинам $\omega = \omega_0\omega'$, $k_i = k_0 k_i'$, $\Phi_i(\omega, \mathbf{k}) = \Phi_0\Phi_i'$, $\Phi_0 = \varepsilon_0/k^3$, при этом получим (штрихи опускаются)

$$\nu_T(Y) = \frac{\varepsilon_0\omega_0}{(\nu k_0^2)^3} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}\gamma_1(k^2 + \gamma_1 Y_3)\,\Phi_2(\omega\omega_0, \mathbf{k}k_0)}{[(k^2 + \gamma_1 Y_3)^2 + \Omega^2]\left[(k^2 - \gamma_2 Y_3 - k_{12}Y_1)^2 + \left(\Omega + \frac{k_1}{k} Y_2\right)^2\right]},$$

$$Y_0 = \frac{U_1}{\nu k_0}, \quad Y_1 = \frac{U_{12}}{\nu k_0^2}, \quad Y_2 = \frac{U_{122}}{\nu k_0^3}, \quad Y_3 = \frac{U_{11}}{\nu k_0^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}\nu k_0^2 + Y_0 k_1, \tag{20}$$

где ε_0 — характерное значение диссипации.

В качестве подходящих масштабов выбираются величины ω_0, k_0, ε_0 с учетом ряда факторов: физических условий, простоты, соответствия. Например, выбор $\omega_0 = \nu k_0^2$ указывает подходящий диапазон частот, а также уменьшает число независимых масштабов. Подходящими масштабами k_0 могут служить $k_* = U_*/\nu$, $U_* = (\tau_W/\rho)^{1/2}$ — скорость трения; $k_{01,2} = |U_{12}/\nu|^{1/2}, |U_{122}/\nu|^{1/3}$. Два последних масштаба позволяют сократить один из основных параметров $Y_{1,2}$ в подынтегральном выражении (20) и скомпоновать соответствующий комплекс. В качестве масштаба диссипации можно взять ее значение вблизи стенки $\varepsilon_* = U_*^4/\nu^3$ или в центре канала, а также локальные величины $\varepsilon_{01,2,3} = \nu k_0^2 U_1^2$, νU_{12}^2, $\nu U_{122}^2/k_0^2$. Разумеется, когда потребуется, можно использовать колмогоровские масштабы.

Возьмем в качестве подходящих масштабы $\omega_0 = \nu k_0^2$, k_{02} и ε_{02}. При таком выборе ТВ приобретает вид

$$\nu_T = \nu K^{2/3}\chi(K, Y_3, B), \tag{21}$$

$K = |U_{12}^3/\nu U_{122}^2|$, $B = U_1^2|\nu/U_{12}|$ — комплексы Кармана и Бьергума, используемые в феноменологических теориях [5].

Комплекс K является основным аргументом ТВ в (21), причем χ — относительно слабо меняющаяся функция. При $\chi \approx \mathrm{const}$ зависимость (21) совпадает с выражением, принятым В. В. Новожиловым в качестве наилучшей аппроксимации опытных данных для $\mathrm{Re} \sim 10^4$ [5]. Заметим, что для течения с постоянным сдвигом $U_{122} = 0$ комплекс B становится основным и это отражается посредством выбора k_{01}, ε_{01}. При существенно больших Re ($\sim 10^7$) более подходящим является сочетание масштабов k_{01} и ε_{02}, для которого получаем

$$\nu_T = \nu K \eta(K, Y_3, B). \tag{22}$$

Такая зависимость при $\eta \approx \text{const}$ переходит в выражение Кармана. Далее вид функций χ и η будет конкретизирован. Заметим, что, когда интересуют исчезающие или бесконечные значения dU, d^2U, целесообразно использовать «нейтральную» нормировку, например, k_*, ε_*.

7. Произведем дальнейшую конкретизацию интегральных представлений R_{ij} посредством интегрирования по ω. Для этого используем метод вычетов. Явная часть подынтегральных выражений (15)—(17) удовлетворяет известным условиям его применимости. Считаем, что функция $\Phi_i(\omega)$ согласуется с этими условиями и, кроме того, не имеет особенностей на конечном интервале (например, может быть постоянной — «белый шум»). При этом подынтегральное выражение имеет полюсные особенности — нули знаменателя $H(\omega)=0$ (в рассматриваемом случае $H(\omega)$ — полином второго порядка).

Замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости и применяя формулу вычетов, получаем для $R_{ij}(\mathbf{k})$ такие выражения:

$$R_{12}(\mathbf{k}) = -\nu_{T0}(k^2+\gamma_1 Y_3)\gamma_1 \operatorname{Im}\left[\frac{2}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\Phi_{21}}{\Pi_1}-\frac{\Phi_{22}}{\Pi_2}\right)\right]U_{12} \equiv -\nu_T(\mathbf{k})U_{12},$$

$$\omega_1 = -\mathrm{k}_1 Y_0 + i\,|k^2+\gamma_1 Y_3|,\quad \omega_2 = -(k_1 Y_0 + \xi_1 Y_2) + i\,|k^2 - \gamma_2 Y_3 - k_{12} Y_1|,$$
$$\Pi = (\omega-\omega_1^+)(\omega-\omega_2^+),\ \Pi_n = \Pi(\omega_n),\ \Phi_{in} = \Phi_i(\omega_n \mathbf{k}),\ n=1,\ 2, \tag{23}$$

$$R_1(\mathbf{k}) = \frac{R_0\Phi_{11}(\mathbf{k},\ Y)}{|k^2+\gamma_1 Y_3|} + \frac{\gamma_1\nu_T(k)}{k^2+\gamma_1 Y_3} Y_1 U_{12}, \tag{24}$$

$$R_2(\mathbf{k}) = \frac{R_0\Phi_{22}(\mathbf{k},\ Y)}{|k^2 - k_{12}Y_1 - \gamma_2 Y_3|},\quad R_0 = \nu_{T0}\varkappa_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\varkappa_0}. \tag{25}$$

Приведем вид k-спектра основной компоненты ТВ $\nu_T(\mathbf{k},\ Y)$, упрощенный посредством исключения продольной неоднородности и привлечения условия $\Phi_i(\omega_1) \approx \Phi_i(\omega_2)$ (слабое изменение спектра ЛС в «среднем» интервале или малая неоднородность)

$$\bar{\nu}_T(\mathbf{k},\ Y) \simeq \frac{\gamma_1 k^4 \Phi_2(\omega(k),\ \mathbf{k})(k^2+|k^2-k_{12}Y_1|)}{|k^2-k_{12}Y_1|\,[k^2(k^2+|k^2-k_{12}Y_1|)^2+k_1^2 Y_2^2]},$$

$$\bar{\nu}_T = \nu_T/\nu_{T0}. \tag{26}$$

Полученные k-спектры (23)—(26) учитывают наличие градиентов и анизотропию и могут служить основой соответствующей, более общей, структурной теории. В однородном случае спектры (25), (26) отражают анизотропию: при $Y_{1,\ 2}=0$ разность

$$R_1(k) - R_2(k) = \frac{R_0}{k^2}[\Phi_1(\omega_{10},\ k) - \Phi_2(k)] = \bar{v}_1^2(k) - \bar{v}_2^2(k) \tag{27}$$

отлична от нуля. В изотропном случае спектры $R_{1,\ 2}(k)=R(k)$ сводятся к известному спектру энергии $E(k)$

$$\nu k^2 R(k) = \pi\Phi(\omega_{10},\ k) = \nu E(k)/6\pi. \tag{28}$$

Использование изотропного k-спектра ЛС в качестве приближения Φ_2 в (26) позволяет получить ряд полезных результатов.

Вид спектра ТВ (26) показывает, что при $Y_1=0$ (на оси симметрии течения, например) он не равен нулю (положителен), при $Y_1 \to k^2/K_{12}$ спектр ТВ стремится к бесконечности, в пристенной области, где $|Y_{1,\ 2}| \gg 1$, он весьма мал. Такое поведение k-спектра предписывает соответствующее изменение ТВ: рост от некоторого, отличного от нуля, значения на оси, достижение максимальной величины в средней области между осью и стенкой и убывание до очень малого значения при подходе к стенке. Такая картина согласуется с опытными данными [6].

8. Рассмотрим зависимость $\nu_T(Y_1,\ Y_2)$ на основе ее интегрального представления со спектром (26). Значение ТВ для исчезающих градиентов $Y_{1,\ 2}=0$ после интегрирования по ω в (20) с учетом (19) равно

$$\bar{\nu}_T(0,\ 0) = \int d\mathbf{k}\gamma_1 R_2(\omega_{10},\ \mathbf{k}). \tag{29}$$

При конкретизации выражений в приближении изотропного спектра (ИС) будем использовать для $E(k)$ простую интерполяцию, согласующуюся с опытными данными [4, рис. 26].

$$\bar{E}(k) = [(a + (k\lambda)^2)(1 + b^2(k\lambda)^4)]^{-1},\ \lambda = k_0\eta,\ \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4},$$

$$\bar{E} = E/E_0,\ E_0 = (\varepsilon\eta^3/\nu)\sqrt{2b}/\pi,\ a = 2\cdot 10^{-3},\ b^2 = 15. \tag{30}$$

В изотропном случае, согласно (28), (30), имеем

$$\bar{\nu}_{Tis} = \frac{2\pi}{9}\frac{k_0 E_0}{\nu_{T0}\omega_0}\int dk\bar{E}(k) \simeq \frac{\sqrt{2}}{9}\bar{\varepsilon}\chi^2\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2} \approx \bar{\nu}_T(0,\ 0),$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0. \tag{31}$$

Уточним поведение $\nu_T(Y)$ вблизи линии симметрии (оси) для течения Пуазейля в плоском канале или трубе. В силу уравнения движения

$$[\nu + \nu_T(Y)]\,Y_1 = -gy,\ g = \left|\frac{dP}{dx}\right|/2\rho\nu k_0^2, \tag{32}$$

на оси имеем $Y_1 = 0$, $Y_{20} = -g/\nu_T(0,\ Y_{20})\,k_0$. При $Y_1 = 0$ представление ν_T упрощается и в приближении ИС принимает вид

$$\bar{\nu}_T(0,\ Y_2) \simeq \frac{2}{3\pi}\bar{\varepsilon}\lambda^3\int dk\bar{E}(k)\sqrt{V}\left[(0.5 + V)\arcsin\frac{1}{\sqrt{V+1}} - \sqrt{V}\right],$$

$$V = 2k^6/Y_2^2. \tag{33}$$

Привлекая (30), можно произвести вычисление зависимости (33) и, в частности, определить Y_{20}. Вблизи оси, как можно показать из общего выражения, $\nu_T(Y_1,\ Y_{20}) > \nu_T(0,\ Y_{20})$, $|\,Y_1\,| \ll 1$, т. е. ТВ возрастает при отходе от оси. При этом кривизна профиля Y_1^1 имеет локальный максимум на оси и при отходе заметно убывает. Последнее служит теоретическим подтверждением наличия «шапочки Дарси».

При подходе к точке $\nu_{T\max}$ величина $|\,Y_1'\,|$ стремится к минимальному значению $g/\nu_{T\max}$ и, достигнув его, начинает возрастать по направлению к стенке. При этом ТВ убывает и на границе вязкого подслоя сравнивается с молекулярной вязкостью. Убывание ТВ для достаточно больших значений градиентов вытекает из представления (20), в частности, согласно (33), при $|\,Y_2\,| \gg 1$ имеем, используя вид спектра (30),

$$\bar{\nu}_T(0,\ Y_2) \simeq \frac{\bar{\varepsilon}\lambda}{6\,|\,Y_2\,|}\int dk k^3\bar{E}(k) = \frac{2\pi\bar{\varepsilon}}{3\lambda b\,|\,Y_2\,|}. \tag{34}$$

Применяя приближение ИС, можно конкретизировать зависимости χ и η в (21), (22), определяя их посредством численного интегрирования. Из предшествующего анализа видно, что функции χ и η будут существенно меняться вблизи оси. Выражение (22) при η, равной постоянной (Кармана), хорошо описывает универсальную, логарифмическую, область течения. В этой области господствуют быстрые вихри — берсты и влияние вязкости несущественно (основной множитель νK от вязкости не зависит). Дальше от стенки берсты укрупняются, затормаживаются и затем дробятся; при этом роль вязкости увеличивается. Эта область до окрестности оси хорошо описывается формулой (21) со слабо-меняющимся фактором χ (область действия феноменологической теории В. В. Новожилова [5]).

Для достаточно точного описания всего течения (исключая вязкий пристенный слой) целесообразно использовать интерполяционное выражение $\nu_T(Y_1,\ Y_2)$, согласованное с полученным спектральным представлением, конкретизируя его на основе опытных данных для турбулентной вязкости [6].

9. Завершая изложение ГЛ подхода, сделаем ряд замечаний относительно его связей с основными разделами теории турбулентности. Использование ЛС естественным образом обусловлено броуновскиподобным движением жидких молей. Это характерное свойство было положено в основу физической модели ТЖ родоначальниками теории турбулентности. Непосредственно ЛС использовалась в задачах турбулентной вибрации. В лагранжевской форме описания турбулентности ЛС применена Е. А. Новиковым [7], это рассмотрение включается в ГЛП как частный случай.

Из содержания данной работы видна связь ГЛП с теорией размерности для турбулентности (метод подходящих масштабов), с феноменологическими теориями, а также с теорией структуры ТЖ (использование спектров).

Широко применяемое моментное описание ТЖ связано с ГЛП очевидным образом: из пульсационных уравнений (4) или (5) получаются уравнения для моментов скорости и ее градиентов. Важным достоинством ГЛП является рациональный метод замыкания моментных уравнений. Например, уравнения для вторых моментов, согласно (5), замыкаются совершенно аналогично тому, как это сделано в работе для уравнений Рейнольдса.

Работа посвящается светлой памяти В. В. Новожилова.

Литература

[1] *Скворцов Г. Е., Тимохов Л. А.* // Вестн. ЛГУ. 1980. № 13. С. 106—110.
[2] *Скворцов Г. Е., Тимохов Л. А.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 11. С. 2245—2247.
[3] *Скворцов Г. Е.* // Вестн. ЛГУ. 1979. № 13. С. 94—98.
[4] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 698 с.
[5] *Новожилов В. В.* Теория плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1977. 164 с.
[6] *Никурадзе И.* // Проблемы турбулентности. М.; Л., 1936. С. 75—150.
[7] *Новиков Е. А.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 12. С. 2159—2167.

Ленинградский
государственный университет

Поступило в Редакцию
16 марта 1988 г.