

01;10

ДВУМЕРНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВЕДУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Т. Астрелин, В. И. Ерофеев

Получено условие равновесия аксиально-несимметричного пучка при транспортировке в канале произвольной формы в сильном магнитном поле. При его выполнении распределение плотности пучка в поперечном сечении за счет дрейфа частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях не меняется. Численным расчетом получены равновесные формы ленточного однородного пучка в прямоугольном канале.

Введение

Для транспортировки пучков заряженных частиц во внешнем магнитном поле обычно используются аксиально-симметричные пучки. Ограничение вакуумного тока пространственным зарядом частиц не позволяет поднять ток выше предельного значения [1], которое для сплошного пучка определяется энергией частиц. Увеличение предельного тока может быть достигнуто использованием ленточных пучков. Однако в процессе транспортировки такого пучка форма его сечения может искажаться вследствие дрейфа частиц в скрещенных полях.

В настоящей работе рассматриваются двумерные равновесия ленточного релятивистского пучка в сильном однородном магнитном поле. Другими словами, исследуются условия, при которых транспортировка пучка происходит без изменения распределения его плотности и продольной скорости в поперечном сечении. Ранее задача такого типа рассматривалась в работе [2], где получена форма оболочки, в которой транспортировка пучка эллиптического сечения с однородной плотностью заряда происходит без деформации его сечения. При этом считалось, что все электроны имеют одинаковую продольную скорость. Мы рассматриваем более общий случай, когда пучок транспортируется внутри цилиндрической проводящей оболочки с произвольной (некруговой) формой сечения. Причем как плотность электронов, так и их скорость могут зависеть от координат. Ларморовские радиусы электронов считаются малыми. Предполагается также, что полная энергия и поперечные импульсы у всех электронов одинаковы. Это означает, что продольные скорости частиц зависят лишь от электрического потенциала пространства φ . Вывод условия равновесия для этого случая приведен в разделе 1.

Аналитическое исследование равновесий пучка ранее проводилось Д. Д. Рютовым для некоторых предельных случаев. Краткое описание его результатов содержится в разделе 2.

В общем случае для нахождения равновесных конфигураций применяются численные методы. В разделе 3 приводится система уравнений, которым удовлетворяет пучок, и итерационная схема их решения. Результаты численных расчетов приведены в разделе 4.

1. Условие равновесия электронного пучка

Будем считать, что ведущее магнитное поле H_0 велико по сравнению с электрическим полем $E = -\nabla\varphi$, а следовательно, и с собственным магнитным полем H_p пучка и наведенных в оболочке токов. Будем также считать, что ларморов-

ский радиус электронов мал по сравнению с характерными масштабами системы. В этих предположениях можно пользоваться гидродинамическим описанием.

Уравнение непрерывности для пучка при его равновесии в предположении однородности системы в направлении транспортировки имеет вид

$$\nabla(\rho \mathbf{V}_\perp) = 0. \quad (1)$$

В каждой точке пучка скорость \mathbf{V}_\perp движения частиц поперек \mathbf{H}_0 направлена по касательной к линии уровня продольной составляющей канонического импульса электронов $\mathcal{P}_z = p_z + e/cA_z$, поскольку \mathcal{P}_z является интегралом движения. Таким образом, \mathbf{V}_\perp можно записать в виде

$$\mathbf{V}_\perp = K(\mathbf{r})[\nabla \mathcal{P}_z \times \mathbf{h}], \quad (2)$$

где $K(\mathbf{r})$ — коэффициент пропорциональности.

С другой стороны, в дрейфовом приближении \mathbf{V}_\perp описывается выражением

$$\mathbf{V}_\perp = -c \frac{[\nabla \varphi \times \mathbf{H}_0]}{H_0^2} + V_z \frac{[\nabla \times \mathbf{h} A_z]}{H_0}. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое есть скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях, а второе — поперечная составляющая скорости движения пучка вдоль искривленной линии полного магнитного поля $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_b$ (V_z — продольная скорость электронов, c — скорость света).

Сравнивая формулы (2) и (3), найдем

$$K(\mathbf{r}) = \frac{V_z(\mathbf{r})c}{eH_0}. \quad (4)$$

С учетом выражений (2) и (4) уравнение (1) принимает вид

$$\nabla(\rho V_z [\nabla \mathcal{P}_z \times \mathbf{h}]) = 0.$$

Производя дифференцирование, получим

$$(\mathbf{h}\mathbf{G}) = 0, \quad (5a)$$

$$\mathbf{G} = [\nabla(\rho V_z) \times \nabla \mathcal{P}_z]. \quad (5b)$$

Вследствие однородности системы вдоль оси z лишь продольная составляющая вектора \mathbf{G} может быть отлична от нуля (см. (5b)). Для равновесия пучка необходимо, чтобы и она обращалась в нуль (см. (5a)). Таким образом, при равновесии $\mathbf{G} = 0$, т. е. линии уровня его плотности тока совпадают с линиями уровня \mathcal{P}_z

$$\rho V_z = f(\mathcal{P}_z), \quad (6)$$

где f — произвольная скалярная функция. Зависимость $f(\mathcal{P}_z)$ следует выбирать таким образом, чтобы ее можно было обеспечить на практике, подобрав соответствующие условия генерации пучка в диоде.

2. Аналитическое исследование равновесий

В данном разделе рассматривается случай пучка с током, значительно меньшим предельного вакуумного тока. В таком пучке продольные скорости всех частиц одинаковы. При его транспортировке в непроницаемой для магнитного поля проводящей оболочке потенциалы φ и A_z на ней постоянны. Принимая за нуль их значения на оболочке, получаем (см. (12), (13))

$$A_z(\mathbf{r}) = \beta_z \varphi(\mathbf{r}). \quad (7)$$

В этом случае условие равновесия принимает вид

$$\rho = f(\varphi). \quad (8)$$

В практическом отношении наиболее интересен случай однородного пучка

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & \varphi \leq \varphi_0 \\ 0, & \varphi > \varphi_0 \end{cases}$$

($\rho_0 < 0$, $\varphi_0 < 0$ — некоторые постоянные).

Ниже описываются следующие пучки такого типа: а) тонкий пучок, радиус которого мал по сравнению с характерными размерами оболочки; б) пучок, у которого зазор между границей сплошного пучка и оболочкой мал; в) трубчатый пучок с толщиной трубки, малой по сравнению с размерами оболочки и пучка.

а) На поверхности тонкого пучка создаваемое им самим электрическое поле намного превышает поле зарядов, наведенных в оболочке. Поэтому сечение равновесного пучка будет близким к окружности. Очевидно, что ее центр будет располагаться в той точке, где электрическое поле наведенных зарядов равно нулю (иначе пучок начнет дрейфовать как целое). Эта точка является седловой точкой потенциала наведенных зарядов. Поэтому в следующем приближении фигура равновесия будет не окружностью, а эллипсом. Ее форму можно описать следующим образом. В плоскости сечения пучка удобно ввести полярную систему координат с центром в точке равновесия. Полярная ось направлена вдоль хребта седловины наведенного потенциала. Этот потенциал представляется в виде

$$\varphi = \kappa Cr^2 \cos 2\theta$$

(κ — линейный заряд пучка на единицу длины вдоль z ; C — коэффициент, определяемый формой оболочки).

Граница соответствующей этому потенциалу фигуры равновесия описывается формулой

$$r(\theta) = R(1 + CR^2 \cos 2\theta),$$

где R — радиус пучка.

б) В случае малого зазора между границей пучка и оболочкой транспортного тракта незаполненная пучком доля дрейфового пространства мала. Поэтому распределение потенциала будет почти таким же, как и при сплошном заполнении пучком дрейфового пространства. Пусть $\varphi_0(\mathbf{r})$ — решение электростатической задачи для случая сплошного заполнения. Тогда напряженность электрического поля на поверхности оболочки Γ

$$E_0 = -\nabla\varphi_0(\mathbf{r})|_{\Gamma} \quad (9)$$

При наличии небольшого зазора между границей пучка и оболочкой электрическое поле будет мало отличаться от (9) как на поверхности оболочки, так и внутри зазора. Поэтому ширина зазора равновесного пучка определяется соотношением

$$\delta = -\varphi_{rp}/E_0, \quad (10)$$

где φ_{rp} — потенциал границы пучка.

Полученное выражение относится к гладкой оболочке. Если же на ней имеются точки излома, то вблизи них описание формы границы пучка с помощью (10) не применимо. Для практически наиболее распространенного случая излома с прямым углом форма границы пучка вблизи угла описывается формулой

$$8\rho_0xy \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi \quad (11)$$

(x, y — координаты точки в декартовой системе, оси которой направлены вдоль прилегающих участков границы; a — характерный размер оболочки).

Пучок заполняет квадрант $x > 0, y > 0$ (рис. 1). Минимальное расстояние от границы до вершины угла с логарифмической точностью равно

$$\delta_{\min} \simeq \frac{1}{2} \frac{\varphi/\rho_0 a^2}{\ln(2/\sqrt{\varphi/\rho_0 a^2})}.$$

Решение (11) переходит в (10) на расстояниях от вершины угла, в несколько раз превышающих δ_{\min} .

в) Состояние бесконечно тонкого трубчатого пучка (рис. 2) удобно характеризовать поверхностной плотностью заряда $\sigma = \int \rho \, dn$, где ρ — плотность объемного заряда, а интегрирование ведется по нормали в трубке. В равновесии трубка представляет собой эквипотенциаль, поэтому электрическое поле перпендикулярно внешней поверхности трубки; $E_n = 4\pi\sigma$. Распределение плотности ρ по поверхности трубки определяется из следующих соображений. Линейная плотность тока, обусловленного поперечным движением частиц (т. е. ток на единицу длины пучка) в стационарном состоянии, постоянна на всей поверх-

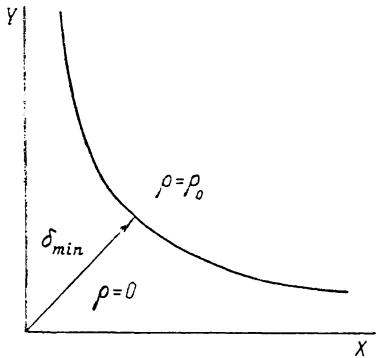


Рис. 1.

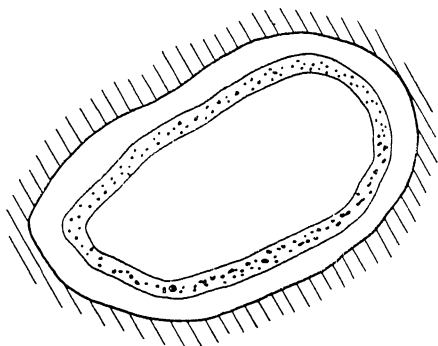


Рис. 2.

ности трубки. Используя формулу (2) с учетом (7), можно выразить плотность тока J_{\perp} через электрическое поле E в трубке

$$J_{\perp} = \frac{c}{H} \int E \rho_0 \, dn (1 - \beta_z^2).$$

Учитывая соотношение $\rho_0 = 1/4\pi \partial E / \partial n$, можно получить

$$J_{\perp} = \frac{cE_n^2}{8\pi H} (1 - \beta_z^2) = \frac{2\pi c^2}{H} (1 - \beta_z^2),$$

откуда следует, что $\sigma = \text{const}$.

Таким образом, решение задачи о равновесии трубчатого пучка сводится к выполнению двух условий: постоянства поверхностной плотности заряда и эквипотенциальность трубки. Наиболее просто эта задача решается для случая малого зазора δ между пучком и оболочкой. В этом случае, очевидно, зазор должен быть всюду одинаков $\delta = \varphi/4\pi\sigma$ (φ — потенциал пучка).

3. Исходные уравнения и алгоритмы их численного решения

Полная система уравнений, описывающая равновесные конфигурации электронного пучка, состоит из условия равновесия (6) и уравнений Пуассона для электростатического и продольной компоненты магнитного потенциалов

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho, \quad (12)$$

$$\Delta A_z = -4\pi\rho\beta_z \quad (13)$$

с граничными условиями на оболочке транспортировочного тракта

$$\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad (14)$$

$$A_z|_{\Gamma} = 0. \quad (15)$$

В случае пучка малой плотности продольные скорости электронов одинаковы и потенциалы φ и A_z пропорциональны друг другу (см. (7)). Поэтому задача упрощается и сводится к решению уравнений (8) и (12) с граничным условием (14).

Численные решения рассмотренных выше задач находятся для заданного полного тока пучка I_0 , что накладывает ограничение на уровень плотности заряда

$$I_0 = \int \rho V_z d^2 r_{\perp} \quad (16)$$

Для решения задачи в общем случае (6), (12)–(15) используется итерационный метод последовательного приближения профиля пучка к равновесному виду. Каждый $i+1$ -й итерационный шаг содержит следующие этапы.

1. Решение уравнения Пуассона (12) с правой частью относительно потенциала $\varphi_i = \varphi(\mathbf{r})$.

2. Решение уравнения Пуассона (13) относительно векторного потенциала A_{zi} с правой частью, зависящей от ρ_i и $\beta_{zi} = \beta_z(\varphi_i)$.

3. Из соотношений (6) и (16) находится нормированный профиль плотности $\hat{\rho}_{i+1}(\mathbf{r})$, определяемый скалярным φ_i и векторным A_{zi} потенциалами

$$\hat{\rho}_{i+1} = \frac{f(\varphi_i, A_{zi}) I_0}{V_{zi} \int f(\varphi_i, A_{zi}) V_{zi} d^2 r_{\perp}} \quad (17)$$

4. Производится процесс релаксации плотности заряда, при котором предыдущий профиль плотности ρ_i обычно дает основной вклад (с весом $(1-\omega)$), а новый (17) — малый вклад (с весом ω)

$$\rho_{i+1}(\mathbf{r}) = \omega \hat{\rho}_{i+1}(\mathbf{r}) + (1-\omega) \rho_i(\mathbf{r}) \quad (18)$$

Здесь коэффициент релаксации $0 \leq \omega \leq 1$ определяет устойчивость схемы и скорость сходимости профиля плотности к равновесному. Полученный профиль плотности $\rho_{i+1}(\mathbf{r})$ используется в уравнении Пуассона на новой итерации. Начальный профиль плотности следует задавать не слишком удаленным от ожидаемого решения (это условие определяется видом выбранной функции (6)).

В случае $V_z = V_0 = \text{const}$ этапы 1 и 2 заменяются решением уравнения Пуассона (12) относительно потенциала φ_i , а в остальном характер итерационного процесса остается таким же.

В случае однородного по скорости и плотности пучка более эффективным оказывается определение равновесной формы границы пучка. Опишем ее однозначной зависимостью $r(l)$, где параметр l может быть, в частности, полярным углом в цилиндрической системе координат. При решении задачи используется следующий итерационный процесс.

1. Решается уравнение Пуассона (12) для плотности пучка ρ_i и контура границы $r_i(l)$. Находится распределение потенциала $\varphi_i(r_i)$ вдоль границы.

2. Строится следующее приближение для границы пучка:

$$r_{i+1} = \alpha \frac{\varphi_i(r_i) - \varphi_{\text{гп}}}{\varphi_{\text{гп}}} r_i + r_i \quad (19)$$

где $\alpha > 0$ — безразмерный коэффициент, имеющий такой же смысл, как и коэффициент ω в формуле (18).

3. Для новой формы границы пучка, имеющего в сечении площадь S_{i+1} , из условия (16) найдем плотность заряда

$$\rho_{i+1} = I_0 / V_0 S_{i+1} \quad (20)$$

используемую на следующей итерации.

Условием сходимости решения может быть малость смещения точек границы (19) либо малость отклонения потенциала от заданного равновесного значения. Для общей постановки задачи сходимостью определяется малостью изменения значений переменных в процессе итераций.

Описанные выше алгоритмы были реализованы с применением пакета прикладных программ POISSON-2 [3] для решения уравнения Пуассона. Для однородного пучка и пучка с постоянной скоростью частиц V_0 они проверялись на задаче о равновесном распределении пучка в цилиндрическом волноводе.

Начальное распределение плотности задавалось в пучке, имеющем квадратное сечение. Для пучка с $V_z = \text{const}$ зависимость (8) была выбрана в виде

$$\rho \sim \begin{cases} 0, & \varphi > B, \\ 1/(A + (\varphi - B)^2), & \varphi \leq B, \end{cases}$$

где A и B — постоянные.

Как для однородного, так и для пучка с $V = V_0$ установившееся распределение плотности близко к осесимметричному. В обоих случаях для достижения точности установления потенциала на границе $\delta\varphi/\varphi \leq 0.01$ оказалось достаточным 15—20 итераций при значениях $\omega = 0.2$ и $\alpha = 0.2$ в алгоритмах (18) и (19) соответственно.

Проверка алгоритмов решения задачи в общем случае (с учетом зависимости скорости V_z от потенциала) проводилась на задаче о предельном вакуумном

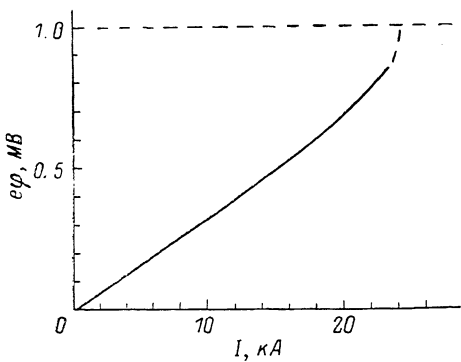


Рис. 3.

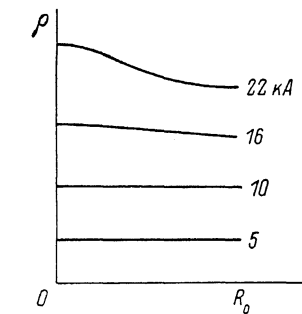


Рис. 4.

токе пучка с постоянной плотностью тока j_0 . Для случая цилиндрического волновода его приближенное значение определяется интерполяционной формулой [1]

$$I_{\text{пр}} = \frac{mc^3}{e} \frac{(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 + 2 \ln(R_0/r_0)}, \quad (21)$$

где R_0 — радиус волновода, r_0 — радиус пучка. При полном заполнении сечения волновода $r_0 = R_0$ предельный ток пучка с $\gamma = 3$, определенный из (21), составляет ~ 19 кА.

Была проведена серия расчетов с различными значениями тока пучка I . Зависимость потенциала на оси φ_0 от I приведена на рис. 3. Как видно, при малых токах $I \leq 10$ кА зависимость $\varphi_0(I)$ близка к линейной, что соответствует приближению $V_z = \text{const}$; $\varphi_0 = I/V_z$. При увеличении тока пучка потенциал на оси возрастает, и при $I \leq 24$ кА величина φ_0 сравнивается с начальной энергией пучка ϵ_0 . Происходит запираение центральной части пучка его пространственным зарядом. Полученное значение предельного тока сплошного пучка $I \approx 24$ кА согласуется с током 19 кА, рассчитанным по (21).

Распределение плотности пучка по радиусу для различных токов показано на рис. 4. Видно, что при малых токах плотность близка к однородной $\rho = I / \pi R_0^2 V_z$, а при увеличении тока плотность заряда в центре возрастает быстрее, чем на краях из-за уменьшения продольной скорости электронов.

4. Результаты решения

Для практически важного случая однородного пучка с плотностью ρ_0 и скоростью V_0 исследовалось его равновесие при различных формах транспортировочного канала. Рассматривался случай канала, образованного плоскими параллельными пластинами, и случай канала прямоугольного сечения с соотношением длин сторон 1 : 10. На рис. 5 приведены формы равновесной границы пучка при различных площадях поперечного сечения пучка S , соответствующую

щих различным значениям граничного потенциала $\varphi_{гр}$. Погрешность установления потенциала границы не превышает 2%. Граница пучка на рис. 5 характеризуется отношением $\xi = S/a^2$, где $2a$ — зазор между стенками канала.

Как видно из рис. 5, при $\xi \leq 1$ сечение пучка близко к кругу. При увеличении площади сечения равновесного пучка боковые стороны сечения расходятся в канале без изменения своей формы, а горизонтальные устанавливаются на расстоянии $\delta \approx a/4$ от стенок канала. Это важное свойство равновесного пучка

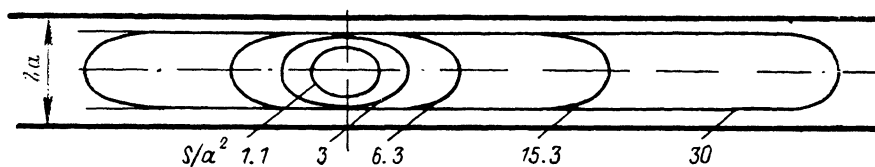


Рис. 5.

подтверждается простыми соображениями. Аппроксимируем боковую границу сильно вытянутого равновесного пучка прямоугольной границей полубесконечного ленточного пучка с той же плотностью заряда ρ_0 . Тогда для полубесконечного пучка вдали на горизонтальной границе и в середине боковой стороны значения потенциалов составляют $4\pi\rho_0\delta(a-\delta)$ и $\pi\rho_0(a^2-\delta^2)$ соответственно. Из условия равенства этих потенциалов, которое выполняется для равновесного пучка, следует, что $\delta = a/3$. Различие в форме границы равновесного и полу-

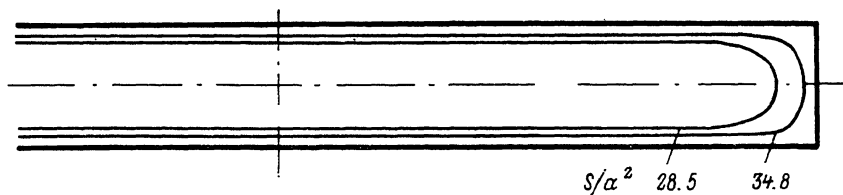


Рис. 6.

бесконечного пучка приведет к тому, что для равновесного пучка зазор δ будет несколько меньше, что и наблюдается.

Наличие зазора такой величины ($\approx a/4$) между пучком и стенкой является основным требованием на равновесный пучок. Этот факт имеет большое практическое значение. Он означает, что для исключения потерь электронов на стенки вследствие ларморовского вращения частиц достаточно увеличить до нужной степени ширину транспортного канала. В свою очередь это позволяет смягчить требования к угловым характеристикам пучка и, следовательно, к конструкции диода и системы ввода пучка в транспортный канал.

На рис. 6 показано влияние боковой стороны транспортировочного канала на равновесную форму пучка. Как видно, при приближении боковой границы пучка к стенке канала величина зазора δ между горизонтальной границей пучка и стенкой канала уменьшается.

Авторы выражают благодарность Д. Д. Рютову за постановку задачи и участие в ее решении на начальном этапе.

Литература

- [1] Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. // УФН. 1971. Т. 103. Вып. 4. С. 609—640.
- [2] Лебедев В. А., Мешков И. Н., Шарана А. Н. // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 4. С. 726—732.
- [3] Астрелин В. Т., Иванов В. Я. // Автометрия. 1980. № 3. С. 92—99.

Институт ядерной физики СО АН СССР
Новосибирск

Поступило в Редакцию
10 августа 1987 г.
В окончательной редакции
31 декабря 1987 г.