01; 04; 12

МЕТОД ПЛОСКОГО ОДНОСТОРОННЕГО ЗОНДА ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

В. Ф. Лапшин, А. С. Мустафаев

Проанализирован метод реконструкции полной функции распределения электронов по скоростям (ФРЭС) и ее лежандровых компонент в аксиально-симметричной плазме с произвольной степенью анизотропии. Метод основан на измерении значений второй производной зондового тока плоского одностороннего зонда по потенциалу при различной его ориентации относительно оси симметрии плазмы.

Определены оптимальные углы ориентации зонда и обосновано необходимое число этих ориентаций для реконструкции лежандровых компонент ФРЭС заданного ранга. Приведены формулы расчета погрешностей метода с учетом погрешности экспериментальных данных. На примере модельной задачи показана работоспособность предлагаемого метода определения ФРЭС в плазме с произвольной степенью анизотропии.

Введение

Интерес к явлениям в анизотропной плазме возник в течение последних десятилетий в связи с многочисленными применениями низкотемпературной плазмы и прежде всего с широким развитием плазменной электроники [1-4].

Кинетика электронного газа в плазме описывается функцией распределения электронов по скоростям (ФРЭС), вид которой существенно зависит от степени анизотропии движения электронов. Моменты анизотропной ФРЭС определяют такие важные кинетические параметры, как концентрацию и дрейфовую скорость электронов, константы скоростей возбуждения и ионизации, тензор плотности потока импульса электронов, компоненты интеграла электронных столкновений [5] и др.

В связи с отсутствием экспериментальных методов до настоящего времени информацию об анизотропных ФРЭС в плазме получали преимущественно теоретически [6-11], путем решения кинетического уравнения Больцмана с использованием лоренцевского и трехтермового разложения ФРЭС, хотя делались и некоторые экспериментальные попытки [12-14].

В настоящее время разрабатывается метод [15-18], позволяющий экспериментально определять конечное число моментов функции распределения и восстановить полную ФРЭС в анизотропной плазме. Авторы [15-18] необоснованно сузили диапазон условий применимости метода необходимостью априорной информации о степени анизотропии ФРЭС в плазме.

В предлагаемой работе математически обоснован метод реконструкции полной ФРЭС и ее лежандровых компонент в плазме с произвольной степенью анизотропии. Определены оптимальные значения и необходимое число углов ориентации плоского одностороннего зонда относительно оси симметрии плазмы. Выполнен расчет погрешности метода с учетом погрешности экспериментальных данных.

На примере модельной задачи проведен анализ точности реконструкции ФРЭС с произвольной степенью анизотропии и устойчивости метода по отношению к погрешности экспериментальных измерений.

1. Основные уравнения

Метод реконструкции ФРЭС и ее лежандровых компонент разрабатывается для случая аксиально-симметричной, стационарной и локально-однородной плазмы. В сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль оси симметрии плазмы, ФРЭС не зависит от азимутального угла, пространственных и временной переменных

$$f(\mathbf{v}) = f(\varepsilon, \theta), \tag{1}$$

где $v = |\mathbf{v}|$, θ — полярный угол.

Метод основан на измерении плоским односторонним зондом величины второй производной тока на зонд по потенциалу J''_U и последующему расчету ФРЭС и ее лежандровых компонент [14]. Приведем краткий вывод исходных расчетных уравнений.

Измеряемые величины J''_U связаны с ФРЭС следующим соотношением [14]:

$$J''_U(eU, \alpha) = \frac{2\pi e^3 S}{m^2}\left[f(eU, \alpha) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{eU}^{\infty} d\varepsilon \frac{\partial}{\partial (eU)} f(\varepsilon, \theta_{\max})\right], \tag{2}$$

где

$$f(\varepsilon, \theta) \equiv f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}, \theta\right), \quad \cos\theta_{\max} = \sqrt{\frac{eU}{\varepsilon}}\cos\alpha + \sqrt{1 - \frac{eU}{\varepsilon}}\sin\alpha\cos\varphi,$$

α — угол между нормалью к непроводящей поверхности зонда и осью симметрии плазмы, e и m — заряд и масса электрона, U — задерживающий потенциал зонда относительно плазмы, S — площадь токопринимающей поверхности зонда.

Предполагая функции $f(eU, \theta)$ и $J''_U(eU, \alpha)$ дважды дифференцируемыми по углу, разложим их в ряды по полиномам Лежандра, которые сходятся при указанных условиях абсолютно и равномерно

$$f(eU, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(eU) P_j(\cos\theta), \tag{3}$$

$$J''_U(eU, \alpha) = \frac{2\pi e^3 S}{m^2}\sum_{j=0}^{\infty} F_j(eU) P_j(\cos\alpha). \tag{4}$$

Уравнение (2) позволяет получить соотношение, связывающее коэффициенты разложения $f_j(eU)$ и $F_j(eU)$

$$F_j(eU) = f_j(eU) - \int\limits_{eU}^{\infty} f_j(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial (eU)} P_j\left(\sqrt{\frac{eU}{\varepsilon}}\right) d\varepsilon. \tag{5}$$

Используя резольвенту интегрального уравнения (5), можно разрешить его относительно функций f_j [19]

$$f_j(eU) = F_j(eU) + \int\limits_{eU}^{\infty} F_j(\varepsilon) R_j(eU, \varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{6}$$

где

$$R_j(eU, \varepsilon) = \frac{2^{-(j+1)}}{eU}\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} a_{kj}\left(\frac{\varepsilon}{eU}\right)^{\frac{j-2k-1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$a_{kj} = (-1)^k \frac{(2j-2k)!\,(j-2k)}{k!\,(j-k)!\,(j-2k)!}, \qquad \left[\frac{j}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2} & \text{для нечетных } j, \\ \dfrac{j}{2} & \text{для четных } j. \end{cases}$$

Укажем здесь явный вид первых трех резольвент

$$R_0(eU,\ \varepsilon) \equiv 0, \quad R_1(eU,\ \varepsilon) = (2eU)^{-1}, \quad R_2(eU,\ \varepsilon) = 3\varepsilon^{1/2}(eU)^{-3/2}/2.$$

Для анализа уравнений (3), (4), (6) и проведения численных расчетов на ЭВМ приведем их к безразмерному виду. С этой целью введем новые переменные, помеченные символом «звездочка», по формулам

$$\varepsilon = \varepsilon_R \varepsilon^*,\ \varepsilon_R = 1.6022 \times 10^{-19}\ \text{Дж} = 1\ \text{эВ},\ eU = \varepsilon_R U^*,$$

$$J''_U(eU,\ \alpha) = J_R J''^*_U(U^*,\ \alpha),\ F_j(eU) = F_R F^*_j(U^*),\ F_R = \frac{m^2}{2\pi e^3 S} J_R,$$

$$f_j(eU) = F^R f^*_j(U^*), R_j(eU,\ \varepsilon) = \varepsilon_R^{-1} R^*_j(U^*,\ \varepsilon^*).$$

При реальных расчетах величину J_R удобно принять равной масштабному множителю прибора, регистрирующего размерную величину J''_U $(eU,\ \alpha)$. Далее (это не оговорено специально) фигурируют только безразмерные величины, поэтому символ «звездочка» опускаем.

Теперь исходные уравнения приобретают вид

$$J''_U(U,\ \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(U)\, P_j(\cos\alpha), \tag{7}$$

$$f_j(U) = F_j(U) + \int_U^{\infty} F_j(\varepsilon)\, R_j(U,\ \varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{8}$$

$$f(U,\ \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(U)\, P_j(\cos\theta). \tag{9}$$

Зондовый метод диагностики анизотропной плазмы заключается в измерении значений J''_U и последующем расчете по уравнениям (7), (8), (9) последовательно величин F_j, f_j и f. Проанализируем полученные уравнения.

2. Определение коэффициентов F_j

Определение коэффициентов F_j может производиться независимо для каждого U из некоторого заданного набора значений потенциала. Поэтому для краткости записи временно опустим переменную U. Коэффициенты F_j могут быть определены двумя способами.

Первый заключается в непосредственном использовании представления коэффициентов F_j при разложении J''_U в ряд по полиномам Лежандра

$$F_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^{1} J''_U(x)\, P_j(x)\, dx. \tag{10}$$

Интеграл (10) при этом заменяется какой-либо квадратурной формулой. Если рассматривать $P_j(x)$ в качестве весовой функции и использовать квадратурную формулу с алгебраической степенью точности не ниже интерполяционной, то получаем

$$F_j \approx \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^{1} S_N(x)\, P_j(x)\, dx = \frac{2j+1}{2} \sum_{k=1}^{N} A_k^{(j)} J''_U(x_k), \tag{11}$$

где

$$S_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\, \omega'(x_i)} J''_U(x_i)$$

— интерполяционный многочлен Лагранжа; $\omega(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_N)$; $\{x_i\}$ — система узлов, используемая при численном интегрировании; N — число узлов,

$$A_k^{(j)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)} P_j(x)\,dx.$$

Применение той же квадратурной формулы с постоянной весовой функцией, равной единице, дает

$$F_j \approx \frac{2j+1}{2} \sum_{i=1}^{N} C_i J_U''(x_i)\, P_j(x_i),$$

$$C_i = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}\,dx. \tag{12}$$

Всякая квадратурная формула точности ниже интерполяционной будет также иметь вид (12), но с другими коэффициентами C_i.

Второй способ заключается в замене бесконечной суммы ряда (7) на конечную $J_U''(x) \approx I_N(x) = \sum\limits_{j=0}^{N-1} F_j P_j(x)$. Это позволяет определить F_j из системы линейных уравнений

$$J_U''(x_i) = I_N(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} F_j P_j(x_i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{13}$$

Отметим, что определитель этой системы отличен от нуля для любого набора попарно различных значений x_i $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$. Это означает, что существует единственное решение системы уравнений (13). Найдем его явный вид. Для этого учтем, что полиномы S_N и I_N порядка $N-1$ совпадают в N-точках, а значит тождественно равны

$$\sum_{j=0}^{N-1} F_j P_j(x) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)} J_U''(x_i).$$

Из последней формулы получаем выражение для F_j

$$F_j = \frac{2j+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)} J_U''(x_i)\, P_j(x)\,dx = \frac{2j+1}{2} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(j)} J_U''(x_i). \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что точное решение системы линейных уравнений (13) задается квадратурной формулой (11).

Отметим, что оба способа определения F_j исходят из формулы (10) и требуют только достаточной степени гладкости угловой зависимости $J_U''(x)$. Таким образом, предлагаемая методика определения F_j свободна от ограничений, связанных с априорной информацией о степени анизотропии ФРЭС.

Погрешность обоих способов определения F_j сводится к погрешности процедуры замены интеграла (10) квадратурными формулами (11) или (12). Поскольку угловая структура интегрируемой в (10) функции J_U'' тесно связана, как это видно из (2), с угловой структурой исходной функции распределения, то такая погрешность в случае сильноанизотропной плазмы может быть, вообще говоря, весьма большой. Чтобы сделать эту погрешность минимальной, необходимо проводить измерения плоским зондом при таких его ориентациях относительно оси симметрии плазмы, для которых величина $J_U''(x)$ имеет локальные экстремумы. В аксиально-симметричной плазме единственным выделенным направлением является ось симметрии. Поэтому в систему узлов должны входить соответствующие углам $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$ значения косинусов $x=1$ и $x=-1$.

Для первого способа наименьшую погрешность будут иметь квадратурные формулы Маркова, обладающие наивысшей алгебраической степенью точности среди формул вида (12) с узлами $x=-1$ и $x=1$. Для второго способа наиболее точный результат достигается для системы узлов, при которой матрица линейной системы (13) наилучшим образом обусловлена. Такой системой является набор равноотстоящих друг от друга значений углов на отрезке $[0, \pi]$

$$\alpha_i = \pi \frac{i-1}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Более подробный анализ применения этих формул приводится ниже при решении модельной задачи.

3. Определение лежандровых компонент функции распределения электронов и оценка погрешностей метода

Для определения лежандровых компонент $f_j(U)$ используется уравнение (8). Интеграл в (8) имеет особенность в нуле, поэтому интегрирование ведется от некоторого минимального значения энергии $U_{\min}$ по всему промежутку $[U_{\min}, U_{\max}]$, вне которого величина $J''_U(U, \alpha)$ оказывается меньше порога чувствительности приборов экспериментальной установки и принимается равной нулю. Вычисление интеграла в (8) удобно производить по формулам трапеции и Симпсона. При этом шаг интегрирования, а значит, и шаг по потенциалу зонда при измерении $J''_U(U, \alpha)$ выбираются таким образом, чтобы расхождение результатов было незначительным. Тогда влиянием погрешности, возникающей при замене интеграла в (8) квадратурной формулой, на значение величины f_j можно пренебречь.

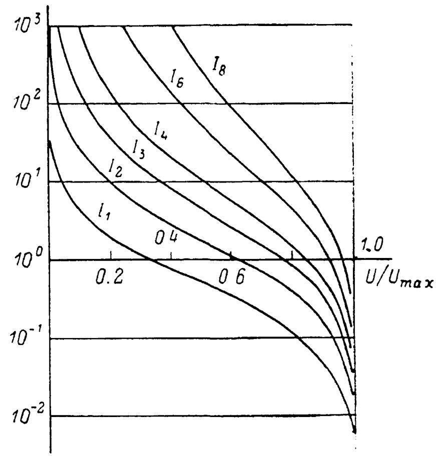

Рис. 1.

Приступая к оценке погрешностей, отметим, что систематическая ошибка при измерении J''_U не оказывает влияния на значения определяемых величин F_j для $1 \leqslant j \leqslant 2N-3$ при использовании формул Маркова и для $1 \leqslant j \leqslant N-1$ при решении линейной системы (13). Это вытекает из свойств ортогональности полиномов Лежандра и формул (11), (12). Для определения величины F_0 необходимо исключить систематическую ошибку из исходных значений J''_U. Последнее нетрудно сделать, если учесть, что при больших значениях энергии величины $J''_U(U, \alpha)$ и $F_0(U)$ должны быть практически равны нулю.

Обозначим теперь через Δ, Δ_{F_j} и Δ_{f_j} погрешности экспериментальных данных, коэффициентов F_j и f_j соответственно. Тогда, используя известные оценки погрешности при численном решении систем линейных уравнений [20], а также формул (8) и (11), получаем

$$\Delta_{F_j} \leqslant (2j+1)\Delta \quad \text{при использовании формул Маркова,}$$
$$\Delta_{F_j} \leqslant (\lambda_{\min})^{-1/2}\Delta \quad \text{при решении линейной системы (13),} \tag{15}$$
$$\Delta_{f_j}(U) \leqslant \Delta_{F_j}\left[1 + \int_U^{U_{\max}} R_j(U, \varepsilon)\, d\varepsilon\right].$$

Здесь $\lambda_{\min}$ — наименьшее из собственных чисел матрицы A^TA, $A = \{a_{ij}\} = \{P_{j-1}(\cos\alpha_i)\}$ — матрица линейной системы (13), A^T — транспонированная по отношению к A матрица. Значения величины $(\lambda_{\min})^{-1/2}$ для системы равноотстоящих углов при $N=3$, 4, 5 составляют соответственно 1.0, 1.1, 1.2.

На рис. 1 представлены в полулогарифмическом масштабе графики величин $I_j(U/U_{\max}) = \int_U^{U_{\max}} R_j(U, \varepsilon)\, d\varepsilon$. Как видно, интервал энергий $[U_{\min}, U_{\max}]$, для которого погрешности вычисляемых величин f_j находятся в разумных пределах, сужается с увеличением j. Поэтому число лежандровых компонент f_j, которое может быть найдено с помощью предлагаемого метода, ограничено и зависит от уровня точности эксперимента.

4. Решение модельной задачи

Решение модельной задачи проводилось с целью определения погрешности метода, предлагаемого для нахождения лежандровых компонент f_j, а также с целью изучения возможности восстановления полной ФРЭС и влияния экспериментальных погрешностей на результаты вычислений.

В качестве модельной была выбрана ФРЭС, описывающая пучок быстрых электронов в максвелловской плазме [1] и имеющая в размерной форме вид

$$f(\mathbf{v}) = f(\varepsilon, \theta) = n_м \left(\frac{m}{2\pi k T_м}\right)^{3/2} \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_м}\right) + \gamma_1 \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\gamma_2}\right)^2 + \frac{\cos\theta - 1}{\beta}\right\}\right]. \quad (16)$$

Здесь медленные электроны задаются концентрацией $n_м$ и температурой $T_м$. Характеристики пучка быстрых электронов определяют параметры: β — степень анизотропии, ε_0 — средняя энергия, γ_2 — характерная полуширина пучка в пространстве энергий. ФРЭС нормирована па концентрацию

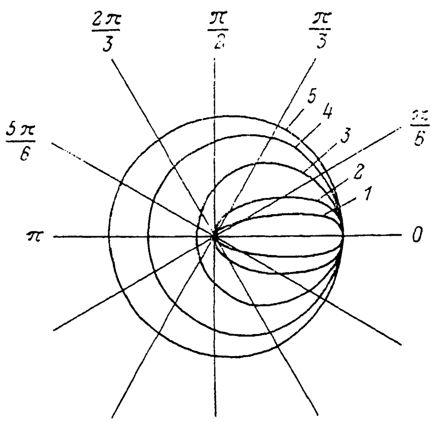

Рис. 2. Угловая зависимость модельной ФРЭС при энергии $\varepsilon=\varepsilon_0=10$ для различных степеней анизотропии.

β: *1* — 0.1, *2* — 0.3, *3* — 1.0, *4* — 3.0, *5* — 10.0.

$$\int f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = n_м (1 + \xi), \quad \xi = \frac{n_б}{n_м},$$

$n_б$ — концентрация быстрых электронов пучка. Параметр γ_1 задавался через соотношение концентраций $n_б$ и $n_м$:

$$\gamma_1 = \xi \frac{(kT_м)^{3/2}\sqrt{\pi}}{\beta\,[1 - \exp(-2/\beta)]} \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\gamma_2}\right)^2\right\} d\varepsilon\right]^{-1}.$$

Далее приведем обезразмеривание, как описано в разделе 1. В результате ФРЭС (16) приводится к виду

$$f(\varepsilon, \theta) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_м}\right) + \gamma_1 \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\gamma_2}\right)^2\right\} \exp\left\{\frac{\cos\theta - 1}{\beta}\right\}. \quad (17)$$

После этого по формуле (2) рассчитывались значения $J''_U(U, \alpha)$. Причем вычисления проводились для набора равноотстоящих углов $\alpha_i = \pi(i-1/N)$ и углов, косинусы которых совпадают с узлами квадратурной формулы Маркова. Величина энергии U принимала все значения от $U_{\min}$ до $U_{\max}$ с шагом ΔU. За $U_{\min}$ принималась величина ΔU, а значение $U_{\max}$ находилось как минимальное U, удовлетворяющее неравенствам $U > \varepsilon_0$ и $J''_U(U+\Delta U, 0)/J''_U(\varepsilon_0, 0) \leqslant 10^{-4}$. Дальнейшие расчеты проведены для значений параметров $\varepsilon_0=10$, $T_м=1$, $\gamma_2=0.5$, при этом $U_{\max}=12$.

На рис. 2 приведены виды угловой зависимости $f(\varepsilon_0, \theta)$ для различных степеней анизотропии, а на рис. 3, *а* — соответствующие им энергетические зависимости $J''_U(U, 0)$. Величины J''_U, рассчитанные для модельной ФРЭС (17), хорошо согласуются с результатами экспериментальных измерений в плазме низковольтного пучкового разряда в гелии (рис. 3, *б*). Из рис. 3, *а* видно, что уменьшение степени анизотропии электронов пучка приводит к исчезновению области энергий, где значения $J''_U(U, 0)$ отрицательны. Это соответствует про-

[1] ФРЭС, подобная модельной, наблюдается в плазме низковольтной пучковой дуги в инертных газах [17].

цессу изотропизации пучка электронов при их движении вдоль оси газового разряда (рис. *3*, *б*).

Погрешность метода реконструкции ФРЭС и ее лежандровых компонент определяется погрешностью процедуры замены интеграла в (10) квадратурной формулой (11) или (12) при нахождении F_j и погрешностью процедуры обрывания ряда в (9) при восстановлении ФРЭС.

Численный анализ описанных в разделе 2 способов определения величин F_j проводился при $U=\varepsilon_0$, так как при этом значении энергии зависимость

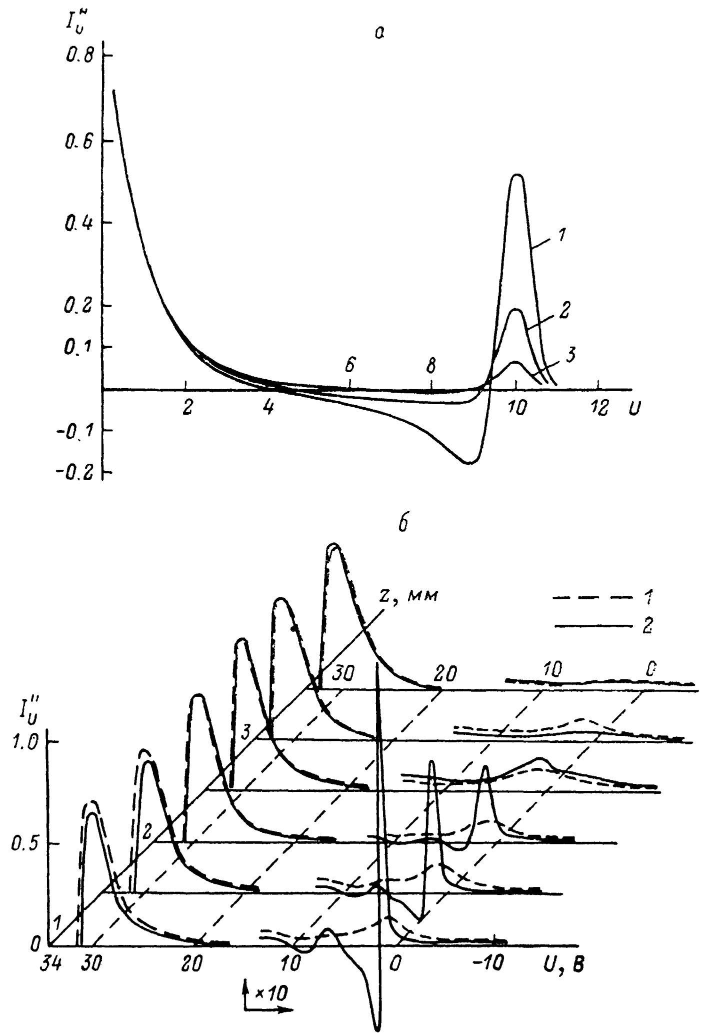

Рис. 3. Энергетическая зависимость J''_U для модельной ФРЭС при $\xi=n_б/n_м=0.1$ и $\alpha=0°$ для различных степеней анизотропии β (*1* — 0.1, *2* — 0.3, *3* — 1.0) (*а*) и экспериментальные значения для низковольтного пучкового разряда в гелии $p_{He}=1$ Тор, ток разряда $i=0.4$ А (*б*).

Нормаль к поверхности зонда параллельна (*2*) и перпендикулярна (*1*) оси разрядного промежутка.

от угла величины J''_U (U, α) наиболее сильна. Результаты можно сформулировать следующим образом. Точность определения F_j зависит от числа используемых узлов, т. е. от числа ориентаций зонда при измерении J''_U. Причем при $N \leqslant 5$ несколько более точным является способ решения линейной системы, а при $N \geqslant 6$ — формулы Маркова. Число узлов определяется тремя факторами: необходимым количеством определяемых коэффициентов F_j, характером зависимости J''_U от угловой переменной и требуемой точностью. В таблице для каждого из первых пяти коэффициентов F_j для различных степеней анизотронии приведено наименьшее число узлов, при котором точность методики их определения составляет 1% и 0.1 %.

Для определения лежандровых компонент f_j для шага по энергии $\Delta U = 0.2$ погрешность процедуры численного интегрирования в (8) не превосходит

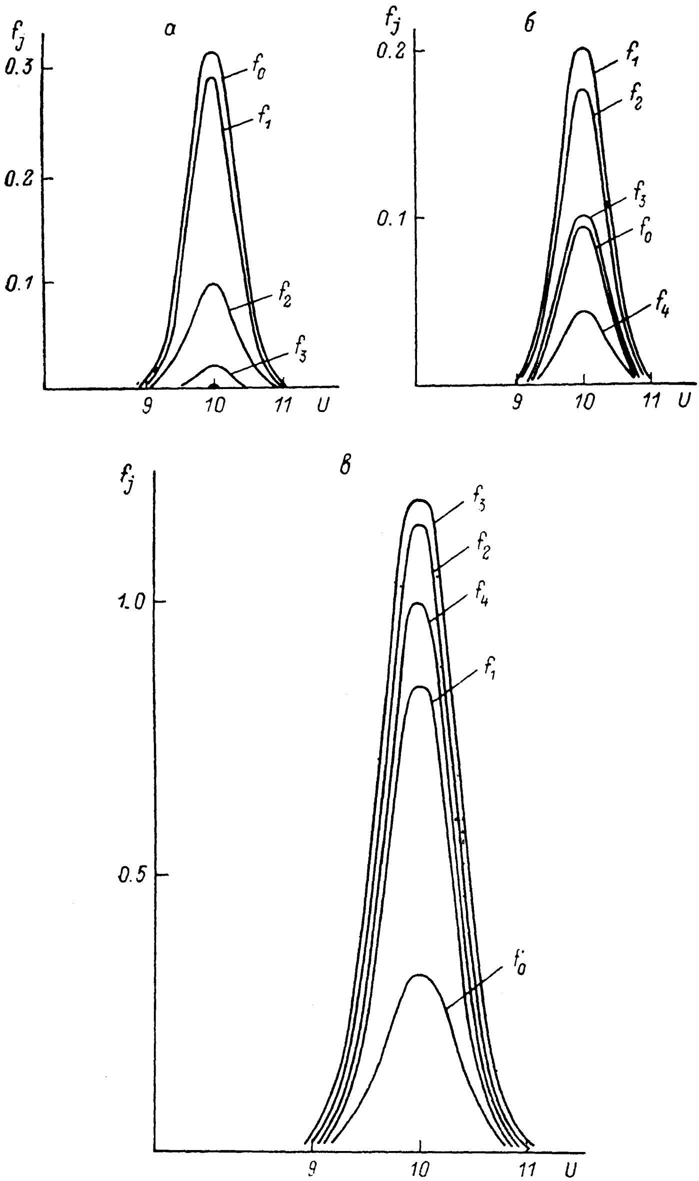

Рис. 4. Энергетическая зависимость лажандровых компонент f_j для модельной ФРЭС при различных степенях анизотропии β и соотношениях концентраций $n_б/n_м = \xi$.

а: $\beta=1.0$, $\xi=1.0$; *б*: $\beta=0.3$, $\xi=0.3$; *в*: $\beta=0.1$, $\xi=1.0$; *г* — f_j, рассчитанные по экспериментальным данным (произвольные единицы), $p_{He}=2$ Тор, разрядный ток $i=0.13$ А, $U=24.6$ В. Плоский зонд расположен в прикатодном слое на расстоянии длины свободного пробега электронов.

при различных степенях анизотропии $\beta=0.1$—10 погрешности способов определения коэффициентов F_j. На рис. 4, *а*—*в* приведены виды энергетической зависимости первых пяти лежандровых компонент для различных степеней анизотропии.

Значения компонент f_j, рассчитанные для $\beta=1.0$ при $N=5$, $\beta=0.3$: при $N=7$ и для $\beta=0.1$ при $N=9$, в масштабе рис. 4 практически не отличаются от точных. На рис. 4, *г* даны для сравнения кривые энергетической зависимости

f_0—f_3, реконструированные по описанной методике в плазме гелиевого низковольтного пучкового разряда.

Далее рассматривалась возможность реконструкции полной ФРЭС для ограниченного числа N ориентаций зонда при измерении величины J''_U (U, α). Для этого при заданном N производился расчет значений J''_U (U_k, α_i), где $U_k = k \Delta U$ $(\Delta U = 0.2, k = 1, 2, \ldots)$, $U_{max}/\Delta U$, $\{\alpha_i\}$ — система равноотстоящих углов при $N \leqslant 5$, а при $N \geqslant 6$ — система углов, косинусы которых совпадают

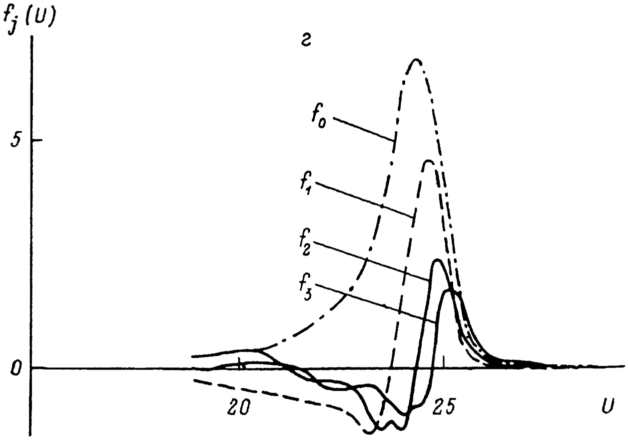

Рис. 4 (*продолжение*).

с узлами квадратурной формулы Маркова. Далее, согласно описанной методике, вычислялись величины F_j и f_j. Значения полной ФРЭС определялись по первым N лежандровым компонентам

$$f(U, \theta) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j(U) P_j(\cos\theta).$$

На рис. 5, *а*, *б* приведены результаты численного анализа для различных N. Хорошо видно, что с увеличением N расчетные кривые довольно быстро приближаются к точным.

Минимальное число ориентаций плоского одностороннего зонда, необходимое для достижения требуемой точности метода определения коэффициентов F_j

	Точность метода 1 %				Точность метода 0.1 %			
	$\beta = 3$	$\beta = 1$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.1$	$\beta = 3$	$\beta = 1$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.1$
F_0	3	3	5	7	3	5	5	9
F_1	3	5	5	7	5	5	7	9
F_2	3	3	5	7	3	5	7	9
F_3	—*	5	7	9	—	7	7	9
F_4	—	5	7	9	—	9	9	11

* Не восстанавливается ввиду малости в сравнении с предыдущими коэффициентами.

Таким образом, предлагаемый метод реконструкции ФРЭС и ее лежандровых компонент обеспечивает хорошую точность результатов при относительно небольшом числе ориентаций зонда даже в случае сильноанизотропной плазмы.

С целью изучения влияния экспериментальных погрешностей на вычисленные значения f_j (U) и f (U, θ) на величину J''_U (U, α) накладывались случайные ошибки, имеющие нормальное распределение с математическим ожиданием $Mx = 0$ и дисперсией $Dx = \sigma$, и систематическая ошибка t

$$\tilde{J}''_U(U, \alpha) = J''_U(U, \alpha)(1 + x) + \frac{1}{30} J''_U(\varepsilon_0, 0)x + t.$$

Дисперсия σ изменялась в пределах от 10^{-3} до 0.1, а величина t — от $-J''_U(\varepsilon_0, 0)$ до $J''_U(\varepsilon_0, 0)$. По полученным таким образом исходным «экспериментальным» данным находились коэффициенты F_j и лежандровые компоненты f_j. Число ориентаций зонда выбиралось из таблицы так, чтобы погрешность

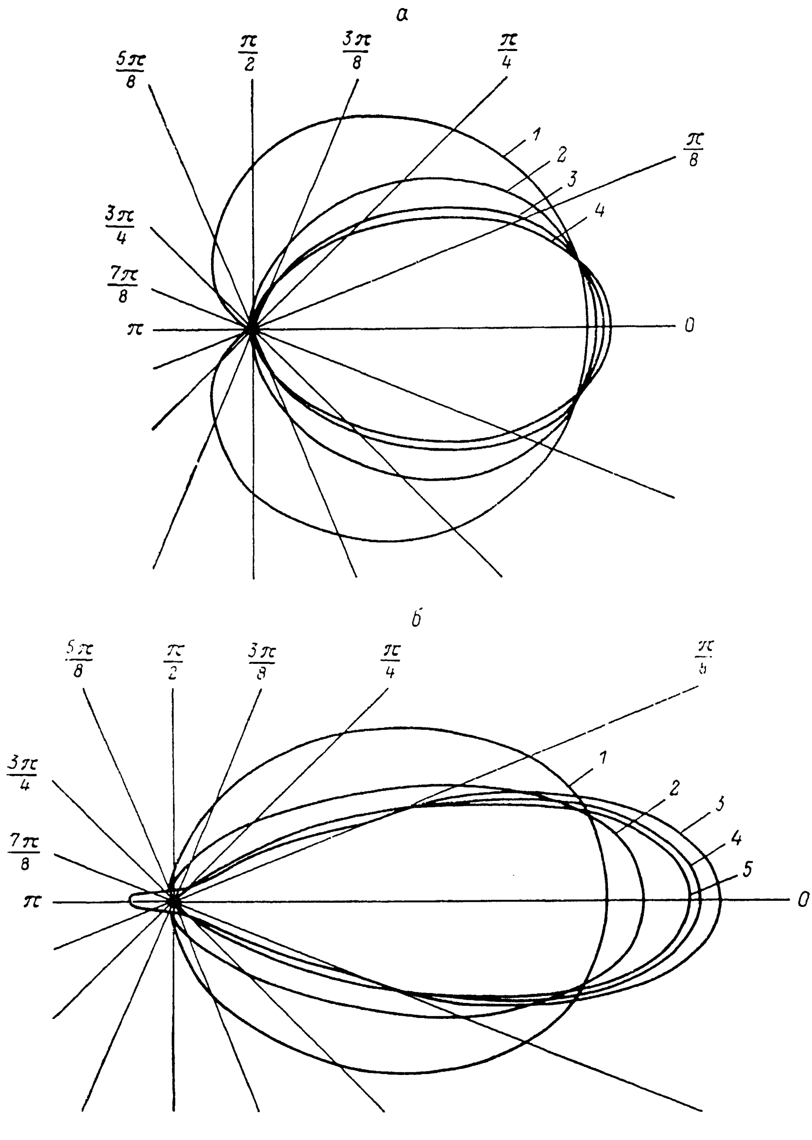

Рис. 5. Угловая зависимость полной ФРЭС, рассчитанная для разного числа ориентаций зонда N при разных степенях анизотропии β.

а: $\beta=0.3$, N: *1* — 2, *2* — 3, *3* — 4, *4* — точная ФРЭС; *б*: $\beta=0.1$, N: *1* — 3, *2* — 5, *3* — 7, *4* — 9, *5* — точная ФРЭС.

метода была меньше дисперсии погрешности исходных данных σ. Рассчитанные значения $\tilde{f}_j$ сравнивались с точными величинами f_j, определенными по формуле

$$f_j(U) = \frac{2j+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(U, \theta)\, P_j(\cos\theta)\, d\cos\theta.$$

Как и следовало ожидать, систематическая ошибка t не оказывает практически никакого влияния на компоненты $\tilde{f}_j$. Если принять за исходную «экспериментальную» ошибку величину $\Delta = \sigma J''_U(\varepsilon_0, 0)$, то погрешность вычисленных значений $\tilde{f}_j(U)$ всегда с большим запасом удовлетворяет соотношению (15). По найденным первым N лежандровым компонентам восстанавливалась полная функция распределения $\tilde{f}(U, \theta)$. При этом учитывались только те компоненты $\tilde{f}_j$, значения которых удовлетворяли неравенству $|\tilde{f}_j(U)| > \Delta_{fj}(U)$

$$\tilde{f}(U, \theta) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{f}_j(U) P_j(\cos\theta), \quad k \leqslant N-1. \tag{18}$$

Численный анализ показывает, что исходные ошибки величины J_U'' слабо влияют на процесс сходимости расчетных величин $\tilde{f}$ к точным. Так, кривые угловой зависимости $\tilde{f}(\varepsilon_0, \theta)$, определенные для различных N, при $\sigma < 0.05$ в масштабе рис. 5, *а*, *б* практически сливаются с соответствующими кривыми $f(\varepsilon_0, \theta)$, рассчитанными для точных исходных данных.

Погрешность $\tilde{f}(U, \theta)$ всегда удовлетворяет неравенству $\Delta_f(U) \leqslant \Delta_{fk}(U)$, где k — индекс последней учитываемой в сумме (18) компоненты.

Заключение

В настоящей работе проанализирован зондовый метод диагностики анизотропной плазмы. Показано, что анизотропная ФРЭС и ее лежандровые компоненты могут быть определены методом плоского одностороннего зонда в аксиально-симметричной плазме в отсутствие априорной информации о ее степени анизотропии. Предлагаемый метод обеспечивает хорошую точность результатов при проведении измерений для ограниченного числа ориентаций зонда в плазме. Метод является устойчивым по отношению к ошибкам экспериментальных измерений. Влияние погрешностей эксперимента на результаты расчетов может быть учтено по соответствующим формулам.

В заключение авторы выражают свою признательность Ф. Г. Бакшту за внимание к работе и полезные обсуждения ее результатов.

Литература

[1] *Иванов А. А.* Физика сильнонеравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 352 с.
[2] *Файнберг Я. Б.* // Атомная энергия. 1961. Т. 11. № 4. С. 313—335.
[3] *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М.: Наука, 1982. 271 с.
[4] *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
[5] *Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 383 с.
[6] *Хаксли Л., Кромптон Р.* Диффузия и дрейф электронов в газе. М.: Мир, 1977. 890 с.
[7] *Kitamori K., Tagashira H., Sakai Y.* // J. Phys. D. 1978. N 11. P. 283—292.
[8] *Makabe T., Mori T.* // J. Phys. D. 1980. Vol. 13. P. 387—396.
[9] *Makabe T., Mori T.* // Trans. IEE of Japan. 1982. Vol. 102. N 11/12. P. 101—108.
[10] *Winkler R., Braglia G. L., Hess A., Wilhelm J.* // Beitr. Plasmophys. 1984. Vol. 24. N 6. P. 657—674.
[11] *Winkler R., Braglia G. L., Hess A., Wilhelm J.* // Beitr. Plasmophys. 1985. Vol. 25. N 4. P. 351—378.
[12] *Makabe T., Goto T., Mori T.* // J. Phys. B. 1977. Vol. 10. P. 1781—1787.
[13] *Makabe T., Mori T.* // J. Phys. B. 1978. Vol. 11. P. 3785—3793.
[14] *Baraff G. A., Buchsbaum S. J.* // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 1007—1019.
[15] *Мезенцев А. П., Мустафаев А. С., Федоров В. Л.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 3. С. 544—549.
[16] *Федоров В. Л.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 5. С. 926—929.
[17] *Мезенцев А. П., Мустафаев А. С.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 11. С. 2232—2235.
[18] *Мезенцев А. П., Мустафаев А. С., Лапшин В. Ф., Федоров В. Л.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 11. С. 2104—2110.
[19] *Федоров В. Л., Мезенцев А. П.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 3. С. 595—597.
[20] *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966. 632 с.

Ленинградский горный институт
им. Г. В. Плеханова

Поступило в Редакцию
21 января 1988 г.