

01; 05

**ЭФФЕКТИВНОЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ  
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ  
ДЛЯ СЛУЧАЙНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЛОКНИСТОГО  
КОМПОЗИЦИОННОГО ДИЭЛЕКТРИКА***А. З. Зинченко*

Рассматривается плоская электростатическая «задача  $N$  тел» для параллельных друг другу, но хаотически расположенных бесконечно протяженных цилиндров одинакового радиуса  $a$ , диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$  в среде проницаемости  $\epsilon_2$ . Система двоякопериодически продолжена на все пространство, и задан средний вектор электрического поля, нормального к осям цилиндров. Задача сведена к бесконечной системе уравнений относительно нормализованных коэффициентов Фурье-разложения потенциала на границах включений. На основе анализа характера взаимодействия коэффициентов Фурье (КФ) и скорости их убывания для случая  $\epsilon'/\epsilon_2 = \infty$  предложен метод высокоточного решения задачи при достаточно больших значениях  $N$  и концентрации включений  $c$  с минимальными затратами машинного времени и памяти ЭВМ. Решение является основным элементом схемы последующего расчета эффективной диэлектрической постоянной  $\epsilon^*$  неупорядоченной системы при высоких  $c$  с помощью моделирования методом Монте—Карло [1].

Хорошо известна классическая постановка задачи (восходящей еще к Максвеллу) о вычислении эффективной диэлектрической проницаемости локально-однородной монодисперсной среды, содержащей большое число хаотически расположенных сферических включений с произвольной объемной концентрацией  $c$  [2], а также математически эквивалентных задач в теориях проводимости и магнетизма. Наряду с существенно приближенными схемами (приближение самосогласованного поля, модели с регулярным расположением включений, ячеечные схемы) к настоящему времени также развиты методы, в принципе ориентированные на точное решение при любых  $c$ : разложение по степеням  $c$  путем перенормировки [3, 4] (или более строго [5]) и флуктуационное разложение [6]. Однако вириальное разложение пока найдено лишь до 0 ( $c^2$ ) включительно, а в рамках [6] вычислены только два члена; дальнейшее продвижение этими методами сопряжено с большими трудностями. Значительный интерес представляет анализ возможностей прямого численного моделирования для точного исследования указанных задач. Принципиальной сложностью по сравнению с методами молекулярной динамики и Монте—Карло [1, 7], развитыми на молекулярном уровне, является необходимость эффективного решения краевой задачи для каждой случайной конфигурации из  $N \gg 1$  сфер. Насколько можно судить по литературе, этот вопрос по существу не исследован, хотя и известен ряд схем (методы изображений и отражений, мультипольного разложения, граничных интегральных уравнений (ГИУ)), формально применимых к анализу  $N$  — частного взаимодействия.

В качестве первого шага в данной работе рассматривается похожая, но более простая двумерная задача (см. выше). Система параллельных цилиндров соответствует общепринятым моделям волокнистых материалов [3], однако еще важнее возможность дальнейшего обобщения основных принципов решения двумерной задачи на задачу сфер. Сечение материала плоскостью  $x_3 = \text{const}$ , нормальной к осям цилиндров ( $x_1, x_2, x_3$  — декартова система координат), образуется из основной конфигурации окружностей («частиц»)  $S_1, \dots, S_N$  с цен-

трами  $x^1, \dots, x^N \in V = [0,1] \times [0,1]$  путем двоякопериодического (1-периодического [8]) продолжения по  $x_1, x_2$ , с периодом 1. Координаты  $x^1, \dots, x^N$  могут принимать любые случайные, геометрически допустимые значения в  $V$ , при которых (рис. 1)

$$\zeta_{\alpha\beta} = \min |x^\alpha - x^\beta + k_1 e_1 + k_2 e_2| / a > 2, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad \alpha \neq \beta, \quad k_1, k_2 = 0, \pm 1, \quad (1)$$

где  $e_1, e_2$  — орты осей  $x_1, x_2$ .

Как обычно [1, 7], наложение на хаотическую систему условий периодического продолжения необходимо лишь для существенного ускорения сходимости

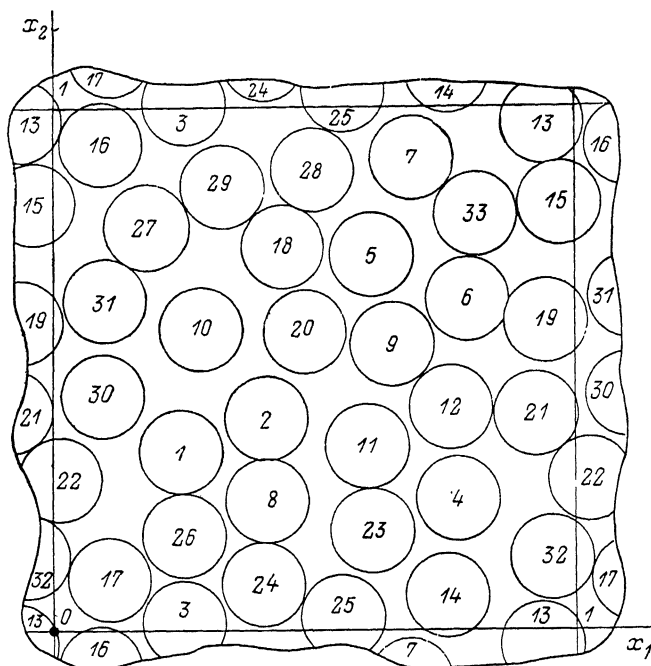


Рис. 1. Одна из случайно-периодических конфигураций при  $N=33, c=0.6498$ , полученная стохастическим методом [1].

к «термодинамическому» (« $T$ ») пределу. Краевая задача для потенциала  $\varphi(x_1, x_2)$  в этой бесконечной системе имеет вид

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = 0, \quad [\varphi] = \left[ \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = 0 \quad (\mathbf{x} \in S_\alpha \pmod{(1,1)}), \quad (2a)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{x} + \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad (2б)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon'$  или  $\varepsilon_s, [\dots]$  — скачок,  $n$  — внешняя к  $S_\alpha$  нормаль, искомая функция  $\varphi_1(\mathbf{x})$  1-периодична, а вектор  $\langle \mathbf{E} \rangle$  задан и фиксирует среднее (по  $V$ ) поле  $\langle -\nabla \varphi \rangle_V = \langle \mathbf{E} \rangle$ .

Задача (2) однозначно разрешима с точностью до константы [8]. Основным интерес представляет вычисление среднего вектора индукции  $\langle \mathbf{D} \rangle_V = \langle -\varepsilon \nabla \varphi \rangle_V$  и соответствующего тензора эффективной диэлектрической проницаемости для заданной конфигурации  $\mathbf{R} = (x^1, \dots, x^N)$  (с последующим осреднением по  $\mathbf{R}$ ).

## 1. Сведение задачи (2) к бесконечной алгебраической системе

Предлагается простейший способ (ср. с методами теории упругости для регулярных решеток [9]), основанный на введении вспомогательной 1-периодической функции  $G(\mathbf{x})$  (связанной с дзета-функцией Эпштейна второго порядка [10])

$$G(\mathbf{x}) = \ln |\mathbf{x}| + \int_0^{\mathbf{x}} [v(\mathbf{x}') - \nabla \ln |\mathbf{x}'|] \cdot d\mathbf{x}', \quad (3a)$$

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x} - k_1 \mathbf{e}_1 - k_2 \mathbf{e}_2| - \int_{D_{k_1 k_2}} \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dt \right]. \quad (3б)$$

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -2\pi + 2\pi \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - k_1 \mathbf{e}_1 - k_2 \mathbf{e}_2), \quad (3в)$$

где  $D_{k_1 k_2} = \{\mathbf{x} : |x_i - k_i| \leq 1/2\}$  — квадрат с центром  $(k_1, k_2)$ ; ряд (3б) абсолютно сходится. Трехмерный аналог  $G(\mathbf{x})$  построен иначе в [11].

Индексом  $e$  отмечаем величины, относящиеся к непрерывной фазе, штрихом — к наполнителю. Из (3в), периодичности  $G$ ,  $\varphi_1$  и формулы Грина следует равенство ( $dS$  — элемент длины дуги,  $\mathbf{x} \notin S_{\alpha} \pmod{(1, 1)}$ )

$$\varphi_1^e(\mathbf{x}) = \text{const} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \int_{S_{\beta}} \left[ G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_1^e(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} - \varphi_1(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{y}}} \right] dS_{\mathbf{y}}.$$

Аналогичное равенство для  $\partial \varphi_1' / \partial n_{\mathbf{y}}$  (с константой в левой части) и граничные условия (2а) позволяют исключить  $\partial \varphi_1 / \partial n$ . Далее, учитывая, что поведение псевдопотенциала с ядром  $\partial G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) / \partial n_{\mathbf{y}}$  при  $\mathbf{x} \rightarrow S_{\alpha}$  ( $\mathbf{y} \in S_{\alpha}$ ) такое же, как для обычного потенциала двойного слоя, получим сначала систему ГИУ относительно  $\varphi|_{S_{\alpha}}$

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = C - \frac{2\langle \mathbf{E} \rangle \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha})}{1 + \nu} + \frac{x}{\pi} \sum_{\beta=1}^N \int_{S_{\beta}} \varphi^*(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}},$$

$$\mathbf{x} \in S_{\alpha}, \quad \varphi^*(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{x}^{\alpha}, \quad x = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad \nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_e}. \quad (4)$$

Добавлением к  $\varphi$  подходящей константы всегда можно сделать  $C = 0$ ; для системы (4) все значения  $\mathbf{x} \in [-1, 1]$  регулярны. Вычисление  $\langle \mathbf{D} \rangle_{\nu}$  известным приемом [3-4] сводится к определению  $\varphi|_{S_{\alpha}}$

$$\langle \mathbf{D} \rangle_{\nu} = \varepsilon_e \langle \mathbf{E} \rangle - (\varepsilon' - \varepsilon_e) \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_{\alpha}} \varphi^* n dS. \quad (5)$$

Далее, разложим  $\varphi|_{S_{\alpha}}$  в ряд Фурье

$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{const}_{\alpha} + \frac{1}{1 + \nu} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{\alpha} \cos m\theta_{\mathbf{x}} + B_m^{\alpha} \sin m\theta_{\mathbf{x}}),$$

$$x_1 + ix_2 = z^{\alpha} + a \exp(i\theta_{\mathbf{x}}) \in S_{\alpha}, \quad z^{\alpha} = x_1^{\alpha} + ix_2^{\alpha}. \quad (6)$$

Смысл нормировки на  $1 + \nu$  будет ясен ниже. Подстановка (6) в (4) требует вычисления интегралов ( $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$I_{\alpha, \beta}^{m, n} = \int_{\mathbf{x} \in S_{\alpha}} \int_{\mathbf{y} \in S_{\beta}} \exp(im\theta_{\mathbf{x}} + in\theta_{\mathbf{y}}) \frac{\partial G(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}. \quad (7)$$

С этой целью используем тождества

$$G_{11} - iG_{12} + \mathcal{P}(z) = G_{22} + iG_{12} - \mathcal{P}(z) = -\pi, \quad z = x_1 + ix_2, \quad (8)$$

где  $G_{jk} = \partial^2 G(\mathbf{x}) / \partial x_j \partial x_k$ ,  $\mathcal{P}(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса с полюсами  $k_1 + ik_2$  [12].

Каждая из функций (8) в силу (3а), (3в), является целой, двоякопериодической и по теореме Лиувилля постоянной; равенство постоянных следует из инвариантности  $G(\mathbf{x})$  относительно поворота на  $\pi/2$ , а их значение определяется из (3в). Интегрирование (8) дает связь между  $\partial G / \partial x_i$  и дзета-функцией Вейерштрасса  $\zeta(z)$  ( $\mathcal{P}(z) = -\zeta'(z)$ ), позволяющую легко вычислить  $I_{\alpha, \beta}^{m, n}$  при  $\alpha \neq \beta$  методом вычетов. При  $\alpha = \beta$  поступаем аналогично, заменив предварительно

в (7), (8)  $G$  и  $\mathcal{P}$  на регулярные при  $x=0$  функции  $g(x)=G(x)-\ln|x|$  и  $p(z)=\mathcal{P}(z)-z^{-2}$ . В итоге получаем из (4) систему уравнений относительно  $Z_m^\alpha = A_m^\alpha + iB_m^\alpha$

$$\bar{Z}_m^\alpha = \kappa \sum_{\beta=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} C_{m,n} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta, n+m} Z_n^\beta + \delta_{m,1} \left[ -2a \langle \mathbf{E} \rangle + \pi a^2 \kappa \sum_{\beta=1}^N Z_1^\beta \right], \quad (9a)$$

$$C_{m,n} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! n! 2^{n+m}}, \quad (9б)$$

$$S_{\alpha\beta, n} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2a}{z^\alpha - z^\beta + k_1 + ik_2} \right)^n, \quad \alpha \neq \beta, \quad n \geq 3, \quad (9в)$$

$$S_{\alpha\beta, 2} = (2a)^2 \mathcal{P}(z^\alpha - z^\beta), \quad S_{\alpha\alpha, n} = 0 \quad (n \neq 0 \pmod{4}), \quad (9г)$$

$$S_{\alpha\alpha, 4l} = \sum_{k_1^2 + k_2^2 > 0} \left( \frac{2a}{k_1 + ik_2} \right)^{4l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (9д)$$

где  $\delta_{m,n}$  — символ Кронеккера, чертой обозначено комплексное сопряжение.

Средний вектор индукции (5) равен

$$\langle \mathbf{D} \rangle_V = \varepsilon_e \langle \mathbf{E} \rangle - \varepsilon_e \pi \kappa a \sum_{\alpha=1}^N [A_1^\alpha \mathbf{e}_1 + B_1^\alpha \mathbf{e}_2]. \quad (10)$$

Из (10) следует, что (достаточно произвольное) удержание в правой части (9а) лишь члена  $\delta_{m,1}[\dots]$  (причем слагаемое  $\delta_{m,1} \pi a^2 \kappa \sum Z_1^\beta$  связано с присутствием в (3) однородного компенсирующего фона) приводит к двумерному аналогу формулы Максвелла [8].

$$\varepsilon^*/\varepsilon_e = (1 + \kappa c)(1 - \kappa c)^{-1}, \quad c = \pi a^2 N. \quad (11)$$

В отличие от (4) для системы (9) значение  $\kappa=1$  также регулярно (см. Приложение 1), что дает возможность непосредственного предельного перехода в (9), (10) к случаю  $\nu=\infty$ ; таков смысл нормализации в (6).

Простейший способ приближенного решения (9) состоит в усечении

$$Z_m^\alpha = 0 \quad (m > k_0) \quad (12)$$

( $k_0$  — семейство аппроксимаций), причем при  $k_0 \rightarrow \infty$  гарантируется равномерная сходимость решения (9), (12) к точному решению  $Z_m^\alpha$  (см. Приложение 1). Однако такая традиционная редукция бесконечных систем в данном случае крайне неэффективна для вычисления  $\langle \mathbf{D} \rangle_V$ , если  $k_0, N \gg 1$ , поскольку она не учитывает физически важное при итерационном решении свойство системы (9а), лишь взаимодействие низкочастотных гармоник ( $n, m \sim 1$ ) является дальнедействующим. Прямой же метод решения (9), (12) заведомо неприемлем (уже при  $k_0=N=30$  расчет лишь одной конфигурации на ЭВМ быстрого действия порядка БЭСМ-6 требовал бы по меньшей мере несколько часов процессорного времени и огромных ресурсов памяти). Предлагаемый ниже вариант более экономной редукции, чем (12), основан на предварительном исследовании скорости сходимости  $Z_m^\alpha \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

## 2. Скорость убывания коэффициентов Фурье

Имея в виду возможность аппроксимации рассматриваемой системы конечной системой, содержащей достаточно большое число ячеек периодичности, исследуем сначала скорость убывания КФ в задаче (2а) для произвольного конечного облака частиц  $S_1, \dots, S_M$ , окруженного неограниченной средой проницаемости  $\varepsilon_e$  и помещенного для простоты в однородное поле  $\mathbf{E}_\infty$  (отметим, однако, что установление связи между  $\mathbf{E}_\infty$  и  $\langle \mathbf{E} \rangle$  требовало бы (аналогично схеме [5], см. также [8]) решения макрозадачи электростатики для однородного,

вообще говоря, неизотропного диэлектрика в поле  $E_\infty$ ). Соответствующая система уравнений для КФ отличается от (9а) заменой  $\langle E \rangle$  на  $E_\infty$ , отсутствием члена  $\pi a^2 \chi \delta_{m,1} \Sigma \bar{Z}_1^\beta$  и, кроме того,  $S_{\alpha\alpha, n}^{\alpha\alpha} = 0$ ,  $S_{\alpha\beta, n}^{\alpha\beta} = [2a/(z^\alpha - z^\beta)]^n$  при всех  $n \geq 2$ .

Используя метод изображений [13], а также решения стандартных задач о поляризации одиночного цилиндра в однородном поле и в поле диполя, можно построить формальное точное представление

$$\varphi^\alpha(x) = -E_\infty \cdot x + \text{const} + \sum_{P \in \mathcal{A}} I(P) \cdot \nabla_x \ln |x - P|, \quad (13a)$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k, \quad \mathcal{A}_0 = \{x^1, \dots, x^M\}, \quad I(x^\alpha) = a^2 x E_\infty. \quad (13b)$$

Здесь  $\mathcal{A}_{k+1}$  определяется индуктивно как множество точек  $Q$ , представимых в виде  $Q = f_\alpha(P)$ ,  $P \in \mathcal{A}_k$ ,  $|P - x^\alpha| > a$ , где  $f_\alpha(\dots)$  — инверсия относительно  $S_\alpha$ , при этом

$$I(Q) = x (|Q - x^\alpha|/a)^2 (I^I - I^\perp), \quad I(P) = I^I + I^\perp, \quad (14)$$

где  $I^I$ ,  $I^\perp$  — составляющие вектора  $I(P)$  вдоль  $x^\alpha - P$  и в перпендикулярном направлении соответственно.

Ввиду крайне сложной (при  $M \geq 3$ ) структуры множества  $\mathcal{A}$  не следует ожидать эффективности представления (13), (14) как численного метода для большого числа плотно расположенных частиц (известны вычислительные трудности этого метода изображений для осесимметричной задачи сфер уже при  $M=3$  [14]). Однако это представление позволяет вскрыть характер убывания КФ. Умножив (13а) на  $\exp(\pm im\theta_x)$ , интегрируя по  $S_\alpha$  и группируя вклады точек  $P \in \mathcal{A}$ ,  $0 < |x^\alpha - P| < a$  и их прообразов  $f_\alpha^{-1}(P)$ , с помощью (13б) и (14) найдем

$$Z_m^\alpha = -2a E_\infty \delta_{m,1} - \frac{2}{x} \sum_{P: 0 < |P - x^\alpha| < a, P \in \mathcal{A}} \frac{I(P)}{(P - x^\alpha)} \left(\frac{P - x^\alpha}{a}\right)^m \quad (15)$$

(здесь и ниже в алгебраических операциях векторы рассматриваются как соответствующие комплексные числа).

Далее потребуется лемма. Пусть  $\zeta_{\alpha\beta} = |x^\alpha - x^\beta|/a$ ,  $\zeta_\alpha = \min \zeta_{\alpha\beta}$  ( $\beta \neq \alpha$ ) — нормализованное расстояние от  $x^\alpha$  до центра частицы, ближайшей к  $S_\alpha$ . Тогда имеем следующее.

1. Все точки  $P$  множества  $\mathcal{A}$  лежат внутри окружностей

$$|P - x^\alpha| = a q(\zeta_\alpha), \quad q(\zeta) = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4})/2. \quad (16)$$

2. Точка  $P$  окружности  $|P - x^\alpha| = a q(\zeta_\alpha)$  является предельной точкой множества  $\mathcal{A}$  в том и только в том случае, если

$$P = x^\alpha + a P_\alpha, \quad P_\alpha = q(\zeta_\alpha) \xi_\alpha, \quad (17)$$

где  $\xi_\alpha$  — единичный вектор, направленный от  $x^\alpha$  к центру ближайшей к  $S_\alpha$  частицы; в частности, для общего положения частиц каждая из указанных окружностей содержит ровно одну предельную точку (17).

Представление (15) и лемма (ее строгое доказательство дано в Приложении 2) показывают, что  $q(\zeta_\alpha)$  — точная нижняя грань показателей прогрессий  $\langle q_\alpha \rangle^m$ , мажорирующих  $Z_m^\alpha$  при  $m \rightarrow \infty$ , причем для общего положения частиц асимптотика  $Z_m^\alpha$  должна иметь вид  $(p_\alpha)^m \cdot \varphi(m)$ . «Медленно меняющаяся» функция  $\varphi(m)$  определяется локальной структурой  $\mathcal{A}$  и множества диполей  $\{I(P)\}$  вблизи экстремальной предельной точки (17). При  $M=2$  явный вид [13] множества  $\mathcal{A}$ , а также (14), (15) дают

$$\begin{aligned} Z_m^\alpha &= -2a E_\infty \delta_{m,1} - 2a (p_\alpha)^m [E_\infty \bar{\xi}_\alpha \Sigma_1 + E_\infty \xi_\alpha \Sigma_2], \\ \Sigma_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} r_{2k}, \quad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} r_{2k+1}, \\ r_n &= \frac{x^n \lambda^n (1-\lambda)^2}{q(1-\lambda^{n+1})^2} \left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^{n+1}}\right)^{m-1}, \quad \lambda = q^2, \quad q = |p_\alpha|. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее всреду ограничимся случаем  $v = \infty$  ( $\kappa = 1$ ). В этом случае можно показать, что  $\Sigma_1, \Sigma_2 \simeq \text{const} \cdot m^{-1}$  ( $m \rightarrow \infty$ ). При  $M \geq 3$  аналитическое исследование  $\varphi(m)$  не представлялось возможным (равно как доказательство сходимости разложений (13а), (15)), однако тщательные расчеты однозначно указывают на справедливость асимптотики

$$Z_m^\alpha \simeq C_\alpha (p_\alpha)^m / m, \quad m \rightarrow \infty \quad (19)$$

с вещественными постоянными  $C_\alpha$  и для любой общей конфигурации из  $M \geq 3$  частиц. Для всевозможных типов относительного расположения трех частиц КФ определялись из бесконечной системы уравнений с редукцией (12) методом Зейделя. Для одной из конфигураций  $x^1 = (0, 0)$ ,  $x^2 = (2.1, 0)$ ,  $x^3 = (1.29343, 1.84107)$ ,  $a = 1$  (при этом  $\zeta_{12} = 2.1$ ,  $\zeta_{23} = 2.01$ ,  $\zeta_{13} = 2.25$ ),  $E_\infty = (-1, 0)$  в табл. 1

Т а б л и ц а 1

$\alpha$	$m$							
	3	10	20	30	40	50	60	100
1	0.859 -0.163	1.379 -0.002	1.515 -0.004	1.517 -0.015	1.524 0.003	1.516 0.008	1.5098 0.0069	1.5092 -0.0051
2	0.287 0.432	-0.566 0.117	-0.455 0.022	-0.461 0.000	-0.463 0.000	-0.463 0.000	-0.4635 0.0000	-0.4635 0.0000
3	0.665 -0.093	0.467 0.017	0.464 -0.003	0.463 0.000	0.464 0.000	0.464 0.000	0.4635 0.0000	0.4635 0.0000

для каждой пары  $\alpha, m$  указан столбец величин  $\text{Re}(m(p_\alpha)^{-m} Z_m^\alpha)$ ,  $\text{Im}(m(p_\alpha)^{-m} Z_m^\alpha)$  ( $k_0 = 150$ ); при  $m \leq 60$  и  $k_0 = 100$  расчет дает идентичные результаты. Исследование особых конфигураций (равнобедренные и равносторонние треугольники) показывает, что при наличии более чем одной частицы, ближайшей к  $S_\alpha$ , главный член асимптотики  $Z_m^\alpha$  имеет вид суммы выражений (19) по всем  $p_\alpha$  из (17).

Т а б л и ц а 2

$\alpha$	$m$								
	1	3	10	15	20	23	27	31	35
1	-0.455 6.888	-1.185 -0.537	-0.709 0.131	-1.085 0.018	-1.017 -0.019	-1.011 -0.019	-1.011 -0.005	-1.013 0.003	-1.016 0.006
2	-2.743 6.507	-0.853 -0.588	-1.135 0.090	-1.042 -0.006	-1.027 -0.015	-1.025 -0.006	-1.026 0.000	-1.026 0.002	-1.026 0.002
3	-10.770 -5.807	0.338 0.576	-6.038 -0.287	-5.121 -0.323	-5.330 0.231	-5.413 0.230	-5.453 -0.075	-5.498 0.026	-5.462 0.001
4	0.055 -8.561	0.032 2.711	-2.198 1.226	2.651 -3.098	-0.784 2.433	1.662 2.678	-1.159 2.117	-1.785 -0.240	-0.031 -1.790
5	-11.139 1.276	-1.014 -0.705	-3.335 0.844	-6.532 -0.722	-4.100 0.356	-4.214 -0.309	-4.564 0.410	-5.229 0.431	-5.510 -0.024
6	13.886 3.229	6.130 2.109	8.772 -0.754	8.811 -0.116	8.601 0.092	8.569 0.000	8.462 -0.008	8.503 0.006	8.478 -0.003
7	12.096 3.744	8.418 -0.259	6.630 0.069	6.827 0.000	6.787 -0.016	6.781 -0.021	6.776 -0.009	6.776 0.000	6.777 0.005
8	-1.110 6.760	1.415 -1.828	1.535 0.195	0.104 -0.511	1.331 0.543	0.328 -0.596	0.444 -0.621	0.559 -0.628	0.669 -0.621
9	9.935 10.518	-2.297 -3.910	2.848 4.362	0.160 4.023	-1.599 1.428	6.203 2.634	7.153 -0.289	5.595 -2.664	3.235 -3.608

Численно установлено, что и в исходной задаче (2а), (2б) асимптотика  $Z_m^\alpha$  имеет вид (19), (17) (с единственным отличием в определении (1) расстояния

$\zeta_{\alpha\beta}$ ). Для одной из конфигураций (рис. 1), полученной при  $N=33$ ,  $c=0.6498$  из регулярной с помощью стохастической процедуры [1], в табл. 2 даны значения  $\text{Re} \{m(\mathbf{p}_\alpha)^{-m} Z_m^\alpha\}$ ,  $\text{Im} \{m(\mathbf{p}_\alpha)^{-m} Z_m^\alpha\}$  для отдельных частиц. Система (9а), (12) ( $\langle E \rangle = -\mathbf{e}_1$ ) решалась итерационно при  $k_0=70$  (с вычислением  $S_{\alpha\beta, n+m}$ , как в разделе 3). Для указанных  $\alpha$  ниже даны значения  $|\mathbf{p}_\alpha|$ , и  $\lambda_\alpha = q(\zeta_\alpha)/|\mathbf{p}_\alpha|$ , где  $\zeta_\alpha$  — следующий после  $\zeta_\alpha$  по возрастанию элемент множества расстояний  $\zeta_{\alpha\beta}$  до  $\mathbf{x}^*$ .

$\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \mathbf{p}_\alpha $	0.837	0.890	0.798	0.639	0.654	0.923	0.806	0.903	0.771
$\lambda_\alpha$	0.737	0.693	0.886	0.982	0.943	0.821	0.743	0.986	0.982

Из этих данных следует, что асимптотика (19) достигается быстро лишь в том случае, если  $\zeta_\alpha$  — четко выраженный минимум ( $\alpha=1, 2, 7$ ), в то время как оценка

$$|Z_m^\alpha| = 0 \quad (|\mathbf{p}_\alpha|^m/m), \quad m \rightarrow \infty \quad (20)$$

свободна от этого ограничения. Применимость (19), (20) не связана с равенством  $\beta^*(\beta^*(\alpha)) = \alpha$  (где  $\beta^*(\alpha)$  — номер частицы, ближайшей к  $S_\alpha$  в смысле расстояния (1)), которое для  $\alpha=2-5, 7$  и не выполняется. Эти выводы подтверждены исследованием остальных  $\alpha$  и другой случайно-периодической конфигурации с  $N=16$ ,  $c=0.75$ ;  $k_0=70, 100$ .

Утверждение и доказательство леммы непосредственно переносятся на трехмерный случай. Это дает основания предполагать, что найденный выше точный результат, согласно которому при любой концентрации включений асимптотика КФ на  $S_\alpha$  имеет тот же вид, что и в случае изолированной пары  $S_\alpha, S_{\beta^*(\alpha)}$  (хотя постоянные  $C_\alpha$  определяются коллективным взаимодействием), справедлив и для (нормализованных) коэффициентов разложения  $\varphi|_{S_\alpha}$  по сферическим гармоникам в задаче сфер одинакового радиуса.

### 3. Экономичный метод вычисления $\langle D \rangle_V$

В пространстве решений используем норму

$$\|Z\| = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sup_m |Z_m^\alpha|. \quad (21)$$

Ограничим суммирование по  $n$  в (9а) пределами

$$1 \leq n \leq N_{\max}(\alpha, \beta, m), \quad N_{\max}(\alpha, \beta, 1) \geq 1. \quad (22a), (22b)$$

Условие (22б) связано с необходимостью учета (абсолютно расходящегося в «Т» пределе)  $Z_1^\alpha \rightarrow Z_1^\beta$  взаимодействия для всех пар  $\alpha \neq \beta$ . Помимо (22б), требуем, чтобы норма (21) невязки, возникающей при подстановке точного решения в отброшенные члены, была не больше  $O(\delta)$  (задано  $\delta > 0$ ). Для  $|Z_m^\alpha|$  при  $n > N_{\max}$  принимаем априорную оценку (20), пренебрегаем зависимостью численных коэффициентов в (20) от  $\alpha$  (считая ее второстепенной), тогда (по причинам, которые станут ясны ниже) можно положить эти коэффициенты равными 1. Доопределяя  $\zeta_{\alpha\alpha} = a^{-1}$ , имеем при  $n+m \geq 3$  для  $|S_{\alpha\beta, n+m}|$  оценку  $(2/\zeta_{\alpha\beta})^{(n+m)}$ . Подставляя эти оценки в отброшенные члены, для однозначного определения  $N_{\max}$  распределим невязку по частицам следующим образом:

$$\sum_{n=N_{\max}(\alpha, \beta, m)+1}^{\infty} C_{m, n} \left(\frac{2}{\zeta_{\alpha\beta}}\right)^{n+m} \frac{|\mathbf{p}_\beta|^n}{n} < \frac{\delta}{(\zeta_{\alpha\beta})^3}. \quad (23)$$

Суммирование (23) по  $\beta$  и  $\alpha$  дает норму (21) невязки  $O(\delta)$ , причем численный коэффициент  $N^{-1} \Sigma \Sigma (\zeta_{\alpha\beta})^{-3}$ , почти не зависящий от конфигурации, остается порядка единицы и в «m» пределе. Критерий (23) обеспечивает невозрастание  $N_{\max}$  с ростом  $\zeta_{\alpha\beta}$  и отсутствие взаимодействия высокочастотных гармоник

по всеми гармониками достаточного удаленных частиц, точнее,  $N_{\max}(\alpha, \beta, m)$  при

$$m^{-1}[(\zeta_{\alpha\beta} - |\mathbf{p}_\beta|)^{-m} - \zeta_{\alpha\beta}^{-m}] > (\zeta_{\alpha\beta})^{-3} \delta, \quad m > 1. \quad (24)$$

Независимо от рассуждений, приводящих к построению (22), (23) однопараметрического  $\delta$  — семейства конечномерных аппроксимаций системы (9а), гарантируется равномерная сходимость соответствующего решения  $Z_m^\alpha(\delta)$  к точному решению  $Z_m^\alpha$  при  $\delta \rightarrow 0$  (см. Приложение 1). Вместе с тем следует ожидать, что  $\delta$ -аппроксимация обеспечивает при  $\delta \rightarrow 0$  и  $N \gg 1$  существенно лучшее соотношение между достигаемой точностью расчета  $\langle \mathbf{D} \rangle_V$  из (10) и объемом вычислений на одной итерации, чем  $k_0$ -аппроксимация (12) при  $k_0 \rightarrow \infty$ . Однако во избежание усложнений с распределением оперативной памяти БЭСМ-6 использовался компромиссный вариант: в системе (9а), (12) производилось дополнительное обнуление коэффициентов по критерию (22), (23) (но с ограничением  $N_{\max} \leq k_0$ ). Для необходимого согласования  $\delta$  и  $k_0$  сначала оцениваем невязку  $h_\delta$  возникающую в результате усечения (12)

$$h \geq N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \max_{m \leq k_0} \left| \sum_{\beta=1}^N \sum_{n=k_0+1}^{\infty} C_{m,n} S_{\alpha\beta} S_{n+m} Z_n^\beta \right|. \quad (25)$$

Поскольку  $k_0 \gg 1$ , то сохраняем лишь  $\beta = \beta^*(\alpha)$ , полагая  $S_{\alpha\beta, n+m} \approx [2\alpha/(z^\alpha - z^\beta)]^{n+m}$ . Далее, справедливость (19) может быть лишь следствием присутствия в асимптотическом разложении  $Z_n^\beta$  при  $n \rightarrow \infty$  члена  $-C_\alpha (-\mathbf{p}_\alpha)^n/n$ , даже если  $\beta^*(\beta^*(\alpha)) \neq \alpha$ ; подстановка этой составляющей  $Z_n^\beta$  в (25) дает единственный неосциллирующий член внутренней суммы. В результате естественно принять оценку

$$h \geq h^* = N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \max_{m \leq k_0} \left[ \sum_{n=k_0+1}^{\infty} C_{m,n} \left(\frac{2}{\zeta_\alpha}\right)^{n+m} \frac{|\mathbf{p}_\alpha|^n}{n} \right]. \quad (26)$$

Наконец, требуем, чтобы невязка, полученная после повторного усечения (22), (23), осталась того же порядка величины, положив

$$\delta = Nh^* \left[ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\zeta_{\alpha\beta})^{-3} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Левая часть (9а) с ограничениями (12), (22) итерировается методом Зейделя при «самосогласованном» начальном приближении  $Z_m^\alpha = 2\alpha(1-c)^{-1} \cdot \delta_{m,1}$  (без ограничения общности считаем  $\langle \mathbf{E} \rangle = -\mathbf{e}_1$ ). Расчеты показали, что в этом случае последовательности  $f_{11}^\mu = -\langle D_1^\mu \rangle / \varepsilon$ ,  $f_{22}^\mu = -\langle D_2^\mu \rangle / \varepsilon$  элементов тензора относительной эффективной проницаемости, вычисляемых после  $\mu$ -й итерации, всегда монотонны и допускают значительное ускорение сходимости путем  $\Delta^2$ -преобразования

$$g_{ij}^\mu = (1 - \rho_\mu)^{-1} (f_{ij}^{\mu+1} - \rho_\mu f_{ij}^\mu), \quad \rho_\mu = (f_{11}^\mu - f_{11}^{\mu-1})^{-1} (f_{11}^{\mu+1} - f_{11}^\mu),$$

причем критерий  $|g_{ij}^\mu - g_{ij}^{\mu-1}| < \delta_1 (1 - \rho_\mu)$  гарантирует достижение искомого  $f_{ij}^\infty$  с заданной точностью  $\delta_1 > |g_{ij}^\mu - f_{ij}^\infty|$ . При итерировании (9а) важен «неестественный» порядок  $(\alpha(\beta(m(n))))$  вложения циклов (с уточнением вектора  $Z_m^\alpha$  лишь после завершения цикла по  $\beta$ ). Такой порядок обеспечивает выход из цикла по  $m$  при достижении (24), а также позволяет (с увеличением объема вычислений менее чем в 1.8 раза (при  $k_0, N \gg 1$ )), пересчитывать  $N_{\max}(\alpha, \beta, m)$  и  $S_{\alpha\beta, n+m}$  на каждой итерации, сводя к минимуму объем необходимой памяти ЭВМ; благодаря этому даже относительно большие хаотические конфигурации допускают весьма точный расчет на БЭСМ-6. Предварительно с машинной точностью находим базисные элементы  $S_{\alpha 1, 2}, S_{\alpha 1, 3}$  ( $\alpha > 1$ ) с помощью их представления [12] через быстроходящиеся ряды для тэта-функций  $\theta_i(z^2 - z^1)$ . Элементы  $S_{\alpha\beta, 2}, S_{\alpha\beta, 3}$  ( $\alpha, \beta \neq 1, \alpha \neq \beta$ ) аналитически выражаются через базисные на основе теоремы сложения [12] для  $\mathcal{S}(z)$ . Высшие  $S_{\alpha\beta, n}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) имеют точное представление через  $S_{\alpha\beta, 2}, S_{\alpha\beta, 3}$  посредством некоторых полиномов от  $(S_{\alpha\alpha, 2})^2$ ;



коэффициенты полиномов вычисляются заранее путем дифференцирования уравнения [12]

$$[\mathcal{P}'(z)]^2 = 4\mathcal{P}^3(z) - g_2\mathcal{P}(z), \quad g_2 = 16 \left[ K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^4 = 189.072720129.$$

Расчеты показали достаточную устойчивость этого метода вычисления  $S_{\alpha\beta, n}$  с ростом  $n$  и в среднем его значительное преимущество над суммированием (9в), хотя теоретически при  $n \rightarrow \infty$  вычисление  $S_{\alpha\beta, n}$  с помощью (9в) оптимальной. Для  $S_{\alpha\alpha, 4n}/a^{4n}$  ( $n \leq 3$ ) известны их точные выражения через  $g_2$  [12], а остальные  $S_{\alpha\alpha, 4n}$  эффективно вычисляются из (9д). Некоторым эквивалентом использованной выше теории эллиптических функций для трехмерного случая может служить развитая в физике твердого тела теория решеточных сумм.

Эффективность экономичной редукции характеризуется величиной

$$c_{\text{eff}} = N^2 k_0^2 \left[ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \sum_{m=1}^{k_0} N_{\max}(\alpha, \beta, m) \right]^{-1} \geq 1,$$

определяющей коэффициент уменьшения объема вычислений при переходе от (9), (12) к модифицированной  $k_0$ -аппроксимации (9), (12), (22), (23), (26), (27) в идеальных условиях с предварительно вычисленными  $S_{\alpha\beta, k}$   $N_{\max}$ . Для конфигурации, представленной на рис. 1 (см. раздел 2), ниже даны значения  $f'_{11}$  (неэкономичный метод (9), (12)),  $f''_{11}$  (экономичный) и соответствующие значения  $c_{\text{eff}}$ .

$k_0$	1	15	22	25	33	37	45	70
$f'_{11}$	4.841	6.547	6.579	—	6.595	—	6.601	6.6041
$f''_{11}$	4.841	6.536	6.572	6.580	6.592	6.595	6.599	6.6036
$c_{\text{eff}}$	1	6.90	10.24	11.66	15.39	17.24	20.85	31.75

Видно, что переход к экономичному методу дает особенно большой выигрыш при высоких требованиях к точности, а незначительное повышение погрешности легко компенсируется небольшим увеличением  $k_0$ . В условиях пересчета  $S_{\alpha\beta, k}$  и  $N_{\max}$  ( $k_0 > 22$ ) фактический коэффициент уменьшения машинного времени (по сравнению с неэкономичным методом с перевычислением  $S_{\alpha\beta, k}$ ) лишь немногим меньше  $c_{\text{eff}}$  (и составлял 10.7, 15.5, 25.6 для  $k_0=33, 45, 70$  соответственно). При  $k_0=33$  время одной итерации экономичного метода составляло 5.8 с (внутренние циклы реализованы на автокоде); для сходимости  $g_{ij}^n$  с абсолютной точностью 0.001 достаточно  $\leq 30$  итераций независимо от  $k_0 \rightarrow \infty$ . Эффективность метода подтверждалась исследованием большого числа других случайных реализаций с  $c=0.65$ ,  $N=33, 60$ , когда среднее значение  $\langle c_{\text{eff}} \rangle \approx 12-13$  при  $N=33, k_0=30$  увеличивается до 18 при  $N=60, k_0=30$ . Систематическая зависимость численных коэффициентов в (19), (20) от  $c$  приводит (если пренебречь различием этих коэффициентов) лишь к несущественному множителю в (23) и (26), по этой причине экономичный метод успешен в широком диапазоне концентраций. Ниже даны результаты исследования одной высококонцентрированной конфигурации с  $N=64, c=0.78$ , полученной стохастически [1] из квадратной решетки.

$k_0$	3	15	20	25	30	40	56	80
$f'_{11}$	12.58	21.73	22.60	23.02	23.26	23.48	23.60	23.66
$f''_{11}$	—	21.42	22.28	22.76	23.01	23.31	23.51	23.62
$c_{\text{eff}}$	—	8.46	10.78	12.69	14.38	17.33	21.36	26.70

Здесь число итераций достигало 40 при  $\delta_1 \sim 0.1$  и 70 при  $\delta_1 \sim 0.01$ . Для данного  $c=0.78$  приближение Максвелла (11), а также модели гексагональной и квадратной решеток дают существенно иные значения  $\epsilon^*/\epsilon_c$ , соответственно 8.09, 8.72, 35.9.

Отметим важность использования информации (19), (20) в экономичном методе. Проверялось, что если в (23), (26) искусственно положить  $|p_\alpha|=1$ , то это приводит к резкому снижению эффективности алгоритма. Простейшая же идея

отбора существенных элементов в (9а) лишь по величине  $C_{m,n} |S_{\alpha\beta, n+m}|$  дает метод еще более низкого качества. В обоих случаях не достигается подходящий баланс между ближними и дальними взаимодействиями.

Развитый метод позволяет весьма точно рассчитать  $\varepsilon^*/\varepsilon_c$  для локально-однородной неупорядоченной концентрированной системы, если предположить (как и в [3-6]) равновероятность всех геометрически возможных состояний. В этом случае метод [1] позволяет генерировать большое число почти некоррелированных конфигураций с нужным статистическим весом. Анализ результатов осреднения по R выходит за рамки работы. Отметим лишь, что для определения  $\varepsilon^*/\varepsilon_c$  с точностью до долей процента вплоть до  $c=0.65$  достаточно  $N=30-60$  (столь быстрой оказывается сходимость к «Т» пределу) и осреднения  $f_{11}$  по нескольким сотням независимых R. Вычисление  $\varepsilon^*/\varepsilon_c$  для  $\varepsilon'/\varepsilon_c=0$  также охватывается этой схемой в силу двойственности [15]; случай же  $\varepsilon'/\varepsilon_c \sim 1$  менее интересен.

## Приложение 1

### Свойства системы (9)

Для  $X = \{A_m^\alpha, B_m^\alpha\}$  запишем (9а) в операторном виде  $X = \kappa \Phi X + F$ . Оценка ( $N \geq 2$ )

$$|C_{m,n} S_{\alpha\beta, n+m}| < \text{const} \cdot q^{n+m}, \quad q = \max_{\alpha \neq \beta} (2/\zeta_{\alpha\beta}) < 1 \quad (28)$$

дает компактность оператора  $\Phi$  как в  $l_2$ , так и в пространстве  $m^*$  ограниченных последовательностей с нормой (21). Для доказательства регулярности значения  $\kappa=1$  для системы (9а) допустим противное. Тогда существует ненулевое решение  $A_m^\alpha, B_m^\alpha$  однородной системы, сопряженной с (9а). Для гармонического 1-периодического псевдопотенциала  $\Psi(x)$  с ядром  $G(x-y)$ , плотностью  $f(y)$  на  $S_\alpha$  (где  $f(y)$  — функция с КФ  $A_m^\alpha, B_m^\alpha$ ) и нулевым средним на  $S_\alpha$ , имеем краевые условия

$$[\Psi] = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} = 2\pi f(x), \quad x \in S_\alpha,$$

допускающие лишь нулевое решение в противоречии с предположением

Для  $k_0$ -аппроксимации равномерная сходимость решения (9), (12) к точному решению при  $k_0 \rightarrow \infty$  следует из общей теории [16] с учетом (28). Для  $\delta$ -аппроксимации (22), (23) методом от противного получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \min_{1 \leq m < \infty} [N_{\max}(\alpha, \beta, m) + m] = \infty. \quad (29)$$

Соотношения (28), (29) дают  $\|\Phi - \Phi(\delta)\|_{m^*} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , где  $\Phi(\delta)$  — модификация (22) оператора  $\Phi$ . Отсюда на основании однозначной разрешимости (9а) (при  $\kappa \in [-1, 1]$ ) и известных теорем [17] следует, что  $\|Z_m^\alpha(\delta) - Z_m^\alpha\|_{m^*} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Сходимость модифицированной  $k_0$ -аппроксимации к точному решению доказывается аналогично.

Из самосопряженности системы (9а)  $\frac{1}{2}$  переменных  $\text{Re}(Z_m^\alpha)'$ ,  $\text{Im}(Z_m^\alpha)'$  (где  $(Z_m^\alpha)' = \sqrt{m} Z_m^\alpha$ ), регулярности значений  $\kappa \in [-1, 1]$  и компактности  $\Phi$  следует [17] принадлежность его спектра отрезку  $[-\rho, \rho]$  ( $\rho < 1$ ), что аналогично известному свойству [18] регуляризованной (при  $\kappa=1$ ) системы ГИУ для конечного числа диэлектриков произвольной формы. Это гарантирует сходимость методов простой итерации и Зейделя для любой из рассмотренных аппроксимаций (по крайней мере в пределе  $k_0 \rightarrow \infty$  или  $\delta \rightarrow 0$ ) и независимость числа итераций для стабилизации (5) от  $k_0 \geq 1$  и  $\delta \leq 1$ .

## Приложение 2

### Доказательство леммы

1. Доказательство раздела 1 проводится по индукции. Для  $P \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$  утверждение раздела 1 следует из определения  $\mathcal{A}_0$  и неравенства  $\zeta^{-1} < q(\zeta)$ . Предположим, что все  $P \in \mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k$  лежат внутри окружностей (16), и рассмотрим  $P_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ . Пусть  $P_{k+1} = f_\alpha(P_k)$ ,  $P_k = f_\beta(P_{k-1})$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $P_k \in \mathcal{A}_k$ ,  $P_{k-1} \in$

$\in \mathcal{A}_{k-1}$ . В случае  $|\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{x}^\alpha| < a$  справедливо неравенство  $|\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{x}^\alpha| < aq(\zeta_\alpha)$  следует из определения (16)  $q(\zeta)$ , из неравенств

$$|\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{P}_{k+1}| \leq \frac{a^2}{a^2_{\zeta_\alpha} - |\mathbf{x}^\beta - \mathbf{P}_k|}, \quad |\mathbf{x}^\beta - \mathbf{P}_k| \leq \frac{a^2}{a^2_{\zeta_\beta} - |\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{P}_{k-1}|}$$

и предположения индукции относительно  $\mathbf{P}_{k-1}$ .

В случае  $|\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{x}^\nu| < a$ ,  $\nu \neq \alpha$ ,  $\nu \neq \beta$  введем  $\mathbf{P}'_k = \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{P}_{k-1}) \in \mathcal{A}_k$ . Из определения инверсии и геометрических соображений (см. рис. 2) можно получить

$$\frac{|\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{P}_k|^2}{a^2} = (\zeta_{\alpha\beta}^2 - 1) \left[ 1 - \frac{|\mathbf{P}_k - \mathbf{x}^\beta|^2}{a^2} \right] + \frac{|\mathbf{P}_k - \mathbf{x}^\beta|^2}{|\mathbf{P}'_k - \mathbf{x}^\alpha|^2}.$$

По предположению индукции  $|\mathbf{P}'_k - \mathbf{x}^\alpha| < aq(\zeta_\alpha)$ . Используя также неравенство  $\zeta^2 - 1 > [q(\zeta)]^2$ , получаем  $|\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{P}_k|/a = a/|\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{P}_{k+1}| > [q(\zeta_\alpha)]^{-1}$ , что завершает доказательство раздела 1.

2. Пусть  $S_\delta$  — ближайшая к  $S_\alpha$  частица. Композиция  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{f}_\delta(\mathbf{P}))$  является сжатием круга  $|\mathbf{P} - \mathbf{x}^\alpha| \leq a$  и имеет неподвижную точку (17) (полюс биполярной системы координат для  $S_\alpha, S_\delta$ ), очевидно, предельную для  $\mathcal{A}$ . Наоборот, если  $\mathbf{P} \in \mathcal{A}'$  — множество предельных точек  $\mathcal{A}$ , причем  $0 < |\mathbf{P} - \mathbf{x}^\alpha| \leq aq(\zeta_\alpha)$ ; то прообразы  $\mathbf{f}_\alpha^{-1}(\mathbf{P}^{(n)})$  точек последовательности  $\mathbf{P}^{(n)} \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{P}^{(n)} \neq \mathbf{P}$ , сходящейся к  $\mathbf{P}$ , начиная с некоторого  $n$ , лежат внутри фиксированной  $S_\beta$  ( $\beta \neq \alpha$ ). Таким образом,  $\mathbf{P} = \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{Q})$  и аналогично  $\mathbf{Q} = \mathbf{f}_\beta(\mathbf{R})$  ( $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathcal{A}'$ ). Из способа доказательства раздела 1 теперь легко видеть, что равенство  $|\mathbf{P} - \mathbf{x}^\alpha| = aq(\zeta_\alpha)$  возможно лишь при условии (17).

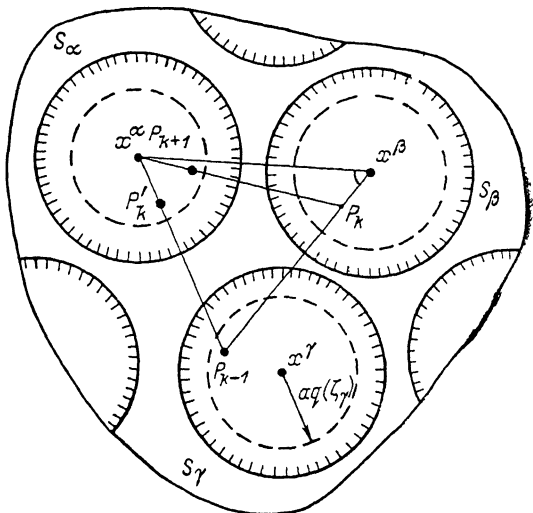


Рис. 2. К доказательству леммы.

#### Литература

- [1] Metropolis N. A., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N. et al. // J. Chem. Phys. 1953. Vol. 21. N 6. P. 1087—1092.
- [2] Духин С. С., Шилов В. Н. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. Киев: Наукова думка, 1972. 206 с.
- [3] Peterson J. M., Hermans J. J. // J. Composite Mater. 1969. Vol. 3. N 2. P. 338—354.
- [4] Jeffrey D. J. // Proc. Roy. Soc. L. 1973. Vol. A335. N 1602. P. 355—367.
- [5] Головин А. М., Чижов В. Е. // ПММ. 1984. Т. 48. № 2. С. 273—281.
- [6] Geigenmüller U., Mazur P. // Physica. 1986. Vol. A136. N 2/3. P. 316—369.
- [7] Крокстон К. Физика жидкого состояния. Статистическое введение. М.: Мир, 1978. 400 с.
- [8] Вахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [9] Григорюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
- [10] Eimersleben O. // Physik Zeitschr. 1925. V. 26. N 17. S. 601—610.
- [11] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 449 с.
- [12] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М., 1963. 516 с.
- [13] Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 416 с.
- [14] Jones T. B. // J. Appl. Phys. 1986. Vol. 60. N 7. P. 2226—2230.
- [15] Дьячнев А. М. // ЖЭТФ, 1970. Т. 59. № 7. С. 110—116.
- [16] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
- [17] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
- [18] Тозони О. В., Маергаой И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев.: Техника, 1974. 352 с.