

01; 12

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ АТТРАКТОРА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА

П. С. Ланда, М. Г. Розенблюм

На примере уравнений Ресслера рассмотрена эффективность метода оценки размерности вложения аттрактора, основанного на вычислении собственных значений ковариационной матрицы экспериментально наблюдаемого процесса. Показано, что многократное применение этого метода позволяет существенно отфильтровать внешний шум и определить количественные характеристики аттрактора.

Важной характеристикой диссипативных динамических систем является эффективное число степеней свободы. Известно [1], что в таких системах фазовые траектории могут притягиваться к некоторому множеству (аттрактору), размерность которого меньше размерности фазового пространства системы. Это значит, что число независимых координат, определяющих состояние системы, может быть меньше размерности исходного фазового пространства. Определение числа этих координат по экспериментальной реализации процесса на выходе исследуемой системы представляется важным для построения феноменологической модели этой системы, так как оно определяет необходимый порядок уравнений модели. Если процесс на выходе изучаемой системы является сложным непериодическим, то определение размерности соответствующего ему аттрактора может дать возможность отличить маломерный хаос динамического происхождения (т. е. порожденный автоколебательной системой) от шума, который является результатом взаимодействия большого числа степеней свободы (как в генераторе шума с газовой трубкой). Так как размерность аттрактора может меняться при изменении параметров динамической системы, то она может служить характеристикой состояния системы.

Известно, что размерность аттрактора в фазовом пространстве системы можно определить по экспериментальной реализации v_i , $i=1, \dots, N_T$. Для этого необходимо сконструировать новую динамическую систему размерности n , например по алгоритму Такенса [1]. При этом вектор фазового пространства сконструированной системы в момент времени $t=i\tau$ равен

$$x_i = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+n-1}).$$

Для этой системы можно вычислить корреляционную размерность аттрактора

$$v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lg C(\epsilon, N)}{\lg \epsilon},$$

где

$$C(\epsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} \delta(\epsilon - |x_i - x_j|)$$

— корреляционный интеграл, ϵ — расстояние между точками x_i и x_j в n -мерном фазовом пространстве, $N = N_T - n + 1$ — число n -мерных точек, δ — функ-

ция Хевисайда. Это процедура повторять, увеличивая размерность пространства n до тех пор, пока зависимость $\nu(n)$ не достигнет насыщения. Значение ν при насыщении определяет размерность аттрактора. Технические подробности, связанные с вычислением ν , рассмотрены в [2]. Алгоритм Такенса позволяет также нарисовать проекции фазовой траектории сконструированной системы на разные плоскости фазового пространства.

В работе [3] был предложен другой метод конструирования динамической системы по экспериментальной реализации, позволяющий оценить минимальную размерность пространства m , в которое можно вложить аттрактор. Преимуществом этого метода является уменьшение влияния внешнего шума в изучаемом процессе и значительно меньшие по сравнению с определением корреляционной размерности ν затраты машинного времени. Согласно этому методу, необходимо по алгоритму Такенса сконструировать последовательность из $N = N_T - n + 1$ точек x_i в пространстве некоторой размерности n и построить матрицу траектории

$$\Sigma = N^{-1/2} \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{pmatrix}, \quad x_i = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+n-1}),$$

где символ T означает транспонирование. Столбцы этой матрицы есть проекции фазовой траектории на оси n -мерного фазового пространства. Число линейно независимых проекций, т. е. ранг матрицы Σ , определяет число координат, необходимых для однозначного задания состояния системы. Следовательно, для определения эффективного числа степеней свободы необходимо определить ранг матрицы траектории Σ . Так как Σ имеет порядок $N \times n$, где N велико, то удобнее определять ранг матрицы $\Theta = \Sigma^T \Sigma$, равный рангу Σ . Матрица Θ — квадратная симметричная действительная матрица порядка n , элементы которой равны

$$\Theta_{ij} = N^{-1} \sum_{k=1}^N v_{i+k-1} v_{j+k-1}, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

т. е. матрицу Θ можно трактовать как ковариационную матрицу исходной реализации, если процесс считать эргодическим. Такую матрицу всегда можно привести к диагональному виду переходом к новому базису, образованному ее собственными векторами. При этом проекции n -мерной траектории на разные оси этого базиса будут некоррелированы, а диагональные элементы (собственные значения) матрицы будут равны дисперсиям этих проекций. Число m ненулевых диагональных элементов, равное рангу матрицы Θ , определяет размерность пространства, в которое может быть вложен аттрактор исходной системы (размерность вложения).

Матрица траектории Σ' в новом фазовом пространстве определяется преобразованием

$$\Sigma' = \Sigma |c_1 c_2 \dots c_n| = \begin{pmatrix} x_1 c_1 & \dots & x_1 c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N c_1 & \dots & x_N c_n \end{pmatrix},$$

где c_i — собственные векторы ковариационной матрицы, соответствующие собственным значениям λ_i , которые предполагаются расположенными в порядке убывания. Из выражения для матрицы Σ' видно, что проекция i -й точки на j -ю ось (совпадающую по направлению с вектором c_j) равна $x_i c_j = \sum_{k=1}^n v_{i+k-1} c_{jk}$, где c_{jk} — координаты вектора c_j в n -мерном пространстве. Таким образом, каждая точка фазовой траектории в новом пространстве представляет собой результат усреднения n точек исходной реализации с некоторым весом c_{jk} .

Отметим, что описанный переход к новому базису означает такой поворот осей n -мерного фазового пространства сконструированной по Такенсу динами-

ческой системы, при котором фазовая траектория будет иметь отличные от нуля проекции лишь на $m < n$ осей.

Отметим также, что подобное разложение многомерного процесса на некоррелированные компоненты известно в теории распознавания образов как разложение Карунена—Лоэва [4].

Так как в экспериментально наблюдаемом процессе всегда есть шум, то все собственные значения матрицы Θ будут ненулевыми. Действительно, шум, т. е. процесс, порожденный системой с очень большим числом степеней свободы, дает проекции на все оси базиса. Следовательно, задача определения размерности вложения системы состоит в определении числа собственных значений ковариационной матрицы, больших некоторого шумового уровня.

Следует также отметить, что при применении метода [3] для оценки эффективного числа степеней свободы системы требуются значительно меньшие длины реализации, чем для вычисления таких характеристик как размерность аттрактора или показателя Ляпунова. Для вычисления последних обычно рекомендуют использовать 30—40 тыс. точек и более [2]. Длина реализации, требуемая для определения ковариационной матрицы порядка n , определяется из условия достоверного определения n первых значений автокорреляционной функции исходного процесса $N \geq 50n$ [5].

Рассмотрим преимущества описанного метода конструирования фазового портрета исследуемой автоколебательной системы по сравнению с алгоритмом Такенса на примере решения системы уравнения Ресслера [1]

$$\dot{X} = -Z - Y, \quad \dot{Y} = X + aY, \quad \dot{Z} = b + Z(X - c)$$

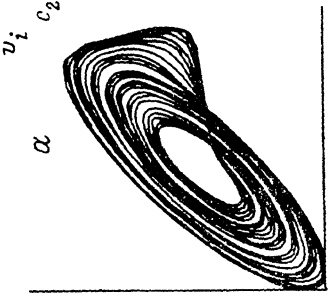
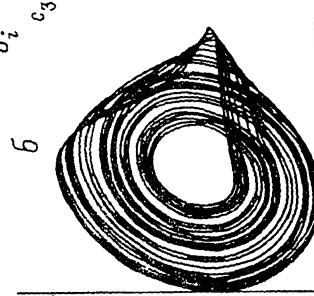
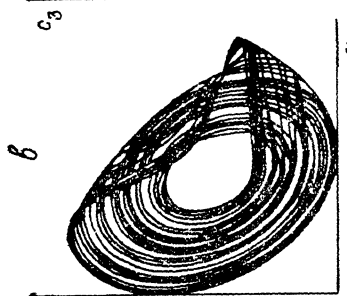
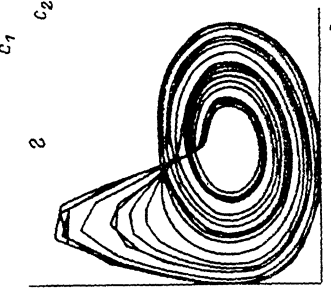
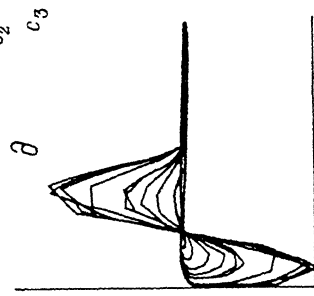
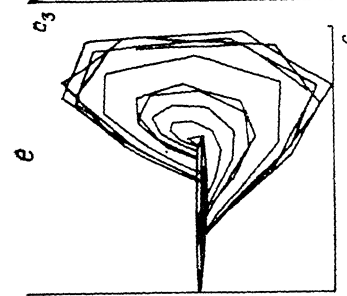
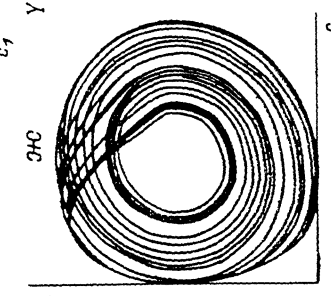
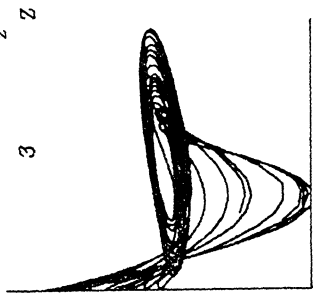
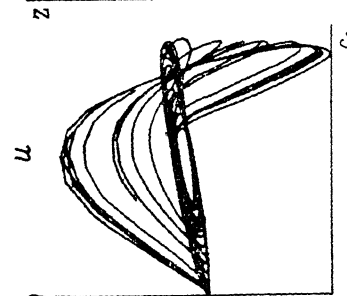
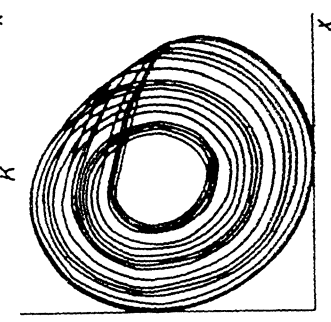
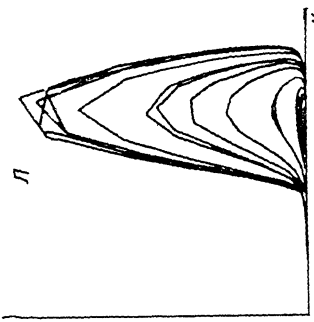
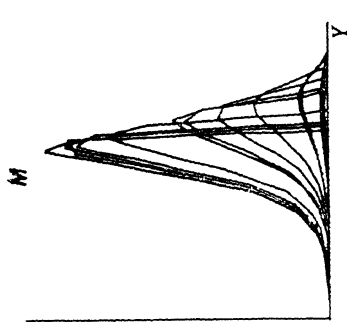
при $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10$ и начальных условиях $(10, 0, 0)$. Для конструирования фазового пространства будем использовать координату X .

Параметры уравнений выбраны такими же, как в работе [6], где определен оптимальный сдвиг по времени для конструирования фазового пространства по алгоритму Такенса. При интервале дискретизации $\tau=2\pi/50$ он соответствует 11τ . На рис. 1 приведены фазовые портреты, полученные с помощью алгоритма Такенса при различных значениях сдвига по времени, а также по три проекции фазовой траектории на плоскости, образуемые тремя собственными векторами ковариационной матрицы при размерностях сконструированного фазового пространства $n=3$ (истинная размерность) и $n=20$. Для сравнения приведены также три проекции фазовой траектории исходной системы. Видно, что фазовый портрет, полученный методом [3], позволяет лучше представить пространственную структуру аттрактора.

Для оценки размерности вложения аттрактора интервал дискретизации τ и размерность пространства n в соответствии с рекомендациями [3] выбираем из соотношения $n\tau = f_{\max}^{-1}$, где f_{\max} — предельная частота в спектре изучаемого процесса. Такой выбор произведения $n\tau$ (длины окна) основан на следующих соображениях. Согласно сказанному выше, каждая точка сконструированного фазового пространства является результатом усреднения за время $n\tau$. Если это время больше, чем f_{\max}^{-1} , то спектр усредненного процесса окажется существенно заваленным в области высоких частот. Если же $n\tau$ мало, то не произойдет необходимого усреднения шума. Поэтому соотношение $n\tau \sim f_{\max}^{-1}$, по-видимому, является оптимальным. Для рассматриваемого примера при $n=20$ выбираем $\tau=2\pi/800$.

Полученные спектры собственных значений ковариационной матрицы (рис. 2) позволяют получить правильную оценку размерности системы, равную трем. Вид спектра не меняется при изменении длины реализации от 1000 до 15000 точек. Уменьшение длины временного окна до $0.75f_{\max}^{-1}$ приводит к уменьшению оценки до двух, увеличение до $1.5f_{\max}^{-1}$ только улучшает вид спектра. Значительное увеличение длины окна, полученное за счет увеличения интервала дискретизации, дает неинформативный спектр без четко выраженного шумового уровня. Это связано с тем, что при большом интервале дискретизации теряется информация о «детерминированной»¹ компоненте и все собственные значения ковариационной матрицы определяются шумом.

¹ Под «детерминированным» мы понимаем процесс, порожденный динамической системой.



$v_1 z + 75$

$v_1 z + 11$

$v_1 z + 5$

v₂

c₁

c₁

Большим достоинством изложенного выше метода является уменьшение влияния внешнего шума. Для подтверждения этого к реализациям переменных X и Y , полученным решением системы Ресслера, были добавлены реализации нормального «белого» шума от радиотехнического генератора ξ и η

$$X'_i = X_i + \xi_i, \quad Y'_i = Y_i + \eta_i.$$

Отношение дисперсий шумовых и «детерминированных» компонент составляло $\sigma_x^2/\sigma_b^2 = 0.01$. На рис. 3 показаны проекции фазовой траектории на плоскость, а также полученная изображением зависимости Y' (X') и построенная по реализации одной переменной X' проекция фазовой траектории на плоскость, образованную первым и вторым собственными векторами ковариационной матрицы. Видно, что во втором случае произошло сглаживание шума.

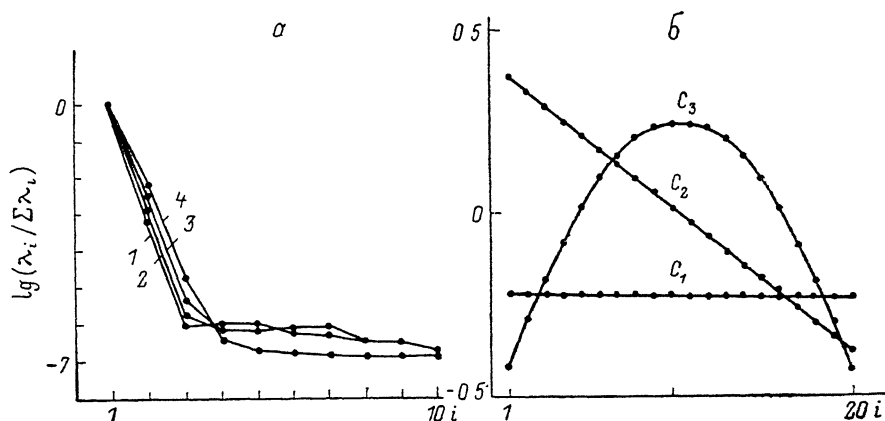


Рис. 2.

a — спектры собственных значений, полученные для решения системы Ресслера при порядке матрицы 15 (1), 20 (2), 25 (3) и 30 (4); показаны первые десять значений; b — три первых собственных вектора ковариационной матрицы порядка 20.

Если уровень шума велик и фазовые траектории будут сглажены недостаточно, то процедуру разложения по собственным векторам можно повторить. Действительно, возьмем проекцию фазовой траектории исходного процесса на первый собственный вектор ковариационной матрицы. Эта проекция имеет наибольшую дисперсию. По этой проекции сконструируем новое n -мерное фазовое пространство, вычислим новую ковариационную матрицу и перейдем к ее собственному базису. Понятно, что эту процедуру можно повторить многократно. При этом отношение дисперсий «детерминированной» и шумовой компонент σ_b^2/σ_x^2 будет увеличиваться, так как при последующем разложении шум проецируется на все оси базиса и его вклад в проекцию на первую ось уменьшается.

Заметим, что дисперсия проекции на первый собственный вектор увеличивается с каждым разложением. Действительно, так как значения компонент первого собственного вектора можно считать постоянными (рис. 2, б) $c_{1j} \approx c$, то значения проекции i -й точки на вектор c_1

$$X_{ci} \approx c \sum_{j=1}^n v_{i+j-1} \sim cnv_i.$$

Так как собственный вектор нормирован, то $c^2 n = 1$ и $c = 1/\sqrt{n}$, поэтому $cn = \sqrt{n} > 1$. При многократном разложении по собственным векторам ковариационной матрицы

Рис. 1. Фазовые портреты для системы Ресслера.

a — e — восстановленные по алгоритму Такенса для разных значений сдвига по времени; z — e — проекции на плоскость, образованные тремя собственными векторами ковариационной матрицы порядка 3; $ж$ — $и$ — то же, матрица порядка 20; $к$ — $м$ — полученные по решению системы Ресслера.

ционной матрицы значения проекций на первый вектор растут по показательному закону; это может привести к переполнению при вычислениях. Чтобы избежать этого, значения получаемой проекции следует умножать на коэффициент $n^{-1/2}$.

Рассмотрим несколько примеров, показывающих эффективность многократного разложения по собственным векторам ковариационной матрицы. На рис. 4

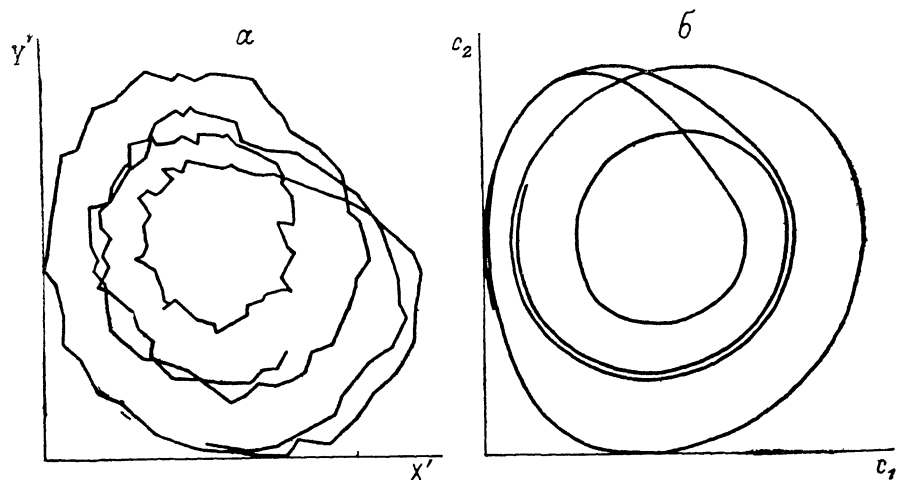


Рис. 3 К решению системы Ресслера добавлен шум.

a — фазовый портрет получен непосредственно изображением зависимости Y' (X'); *b* — проекция на плоскость, определяемую векторами c_1 и c_2 ковариационной матрицы.

приведены спектры собственных значений для процесса X' , полученного добавлением «белого» шума к координате X решения системы уравнений Ресслера. Параметры уравнений такие же, как указано выше, $\tau = 2\pi/800$, отношение дисперсий $\sigma_N^2/\sigma_D^2 = 0.09$. Для сравнения приведен также спектр собственных зна-

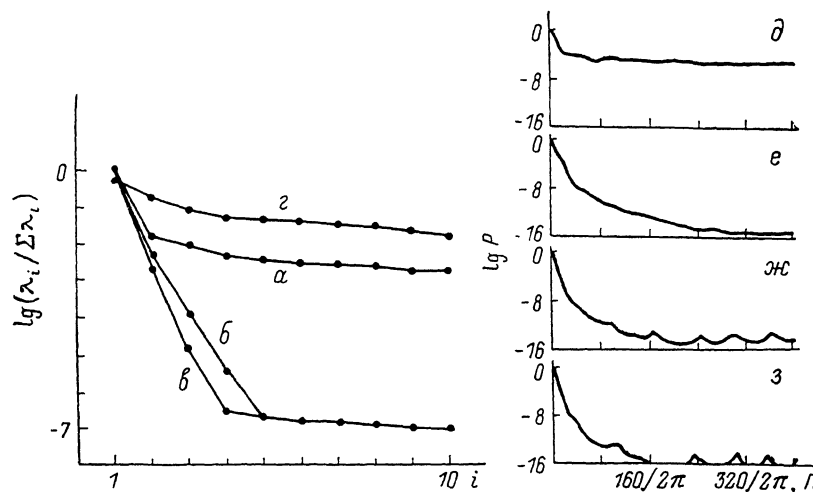


Рис. 4. Спектры собственных значений для решения системы Ресслера с добавленным шумом при одно- (*a*), четырех- (*б*) и десятикратном разложении (*в*) и для белого шума (*г*) и спектральные плотности, соответствующие случаям *a*—*в* (*д*—*ж*) и решению системы Ресслера (*з*).

чений для «белого» шума. Видно, что однократное применение метода [3] дает неинформативный спектр. Семикратное применение разложения позволяет получить правильную оценку размерности системы, при последующих разложениях вид спектра не меняется. Приведены также спектральные плотности этих процессов. Видно, что при последующих разложениях спектральная плотность полученных процессов стремится к спектральной плотности «детерминированной» компоненты процесса X' . На рис. 5 показаны зависимости от времени

$X'(t)$ и $Y'(t)$ при $\sigma_a^2/\sigma_b^2=0.25$ и проекции на первые два собственных вектора ковариационной матрицы после трехкратного и шестикратного разложения соответственно.

Эти примеры позволяют сделать вывод, что многократное применение метода [3] дает возможность отфильтровать динамическую составляющую процесса от шума и оценить размерность вложения динамической системы.

Сконструированная методом [3] динамическая система может быть также использована для вычисления корреляционной размерности аттрактора ν . При этом корреляционный интеграл достаточно вычислять один раз, используя для вычисления расстояний в n -мерном фазовом пространстве только проекции на $m < n$ осей, где m — размерность вложения аттрактора. Это позволяет уменьшить затраты машинного времени по сравнению с применением традиционного метода с использованием алгоритма Такенса, однако требует хранения в памяти всех заранее вычисленных проекций, в то время как при исполь-

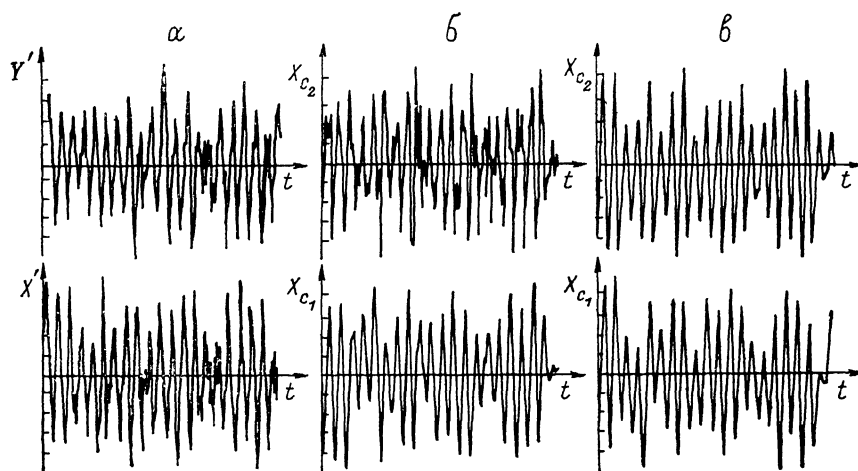


Рис. 5. Решение системы Ресслера с добавленным шумом (а) и проекции на вектора c_1 и c_2 после трех- (б) и шестикратного разложения (в).

зовании традиционного способа достаточно хранить только исходную реализацию, конструируя фазовое пространство в процессе вычислений. Для аттрактора Ресслера корреляционная размерность, вычисленная с использованием алгоритма Такенса при размерности пространства $n=8$ и длине реализации 8000 точек, $\nu=2.00 \pm 0.02$. Размерность, вычисленная по решению системы уравнений, $\nu=1.88 \pm 0.03$. Вычисление с использованием метода [3] дает близкое значение $\nu=1.92 \pm 0.04$.

По-видимому, целесообразным является последовательное применение этих методов: сначала сглаживание шума многократным разложением по собственным векторам ковариационной матрицы, а затем вычисление корреляционных интегралов традиционным способом. Так, например, если к решению системы уравнений Ресслера добавлен «белый» шум, так что $\sigma_a^2/\sigma_b^2=0.25$, то традиционный способ не позволяет определить размерность, поскольку корреляционный интеграл нельзя аппроксимировать прямой (рис. 6, б). На рис. 6, в, г приведены корреляционные интегралы, полученные после трехкратного и восьмикратного применения метода [3] соответственно. Нижний участок графика корреляционного интеграла после восьмикратного разложения можно аппроксимировать прямой, наклон которой дает значение $\nu=2.1 \pm 0.1$.

Описанный выше метод был применен для исследований колебаний центра тяжести человека при спокойном стоянии в вертикальной позе. Известно [7], что эти колебания содержат информацию о состоянии нервно-мышечной системы человека, их изучение является актуальной задачей для диагностики заболеваний этой системы. В работе [8] было предположено, что колебания центра тяжести тела человека при поддержании вертикальной позы представляют собой

хаотические автоколебания. Эти колебания регистрировались в ходе эксперимента с помощью тензометрической платформы (стабилографа). Эксперимент проводился как со здоровыми испытуемыми, так и с больными с различными видами неврологической патологии. Вычисленные спектры собственных зна-

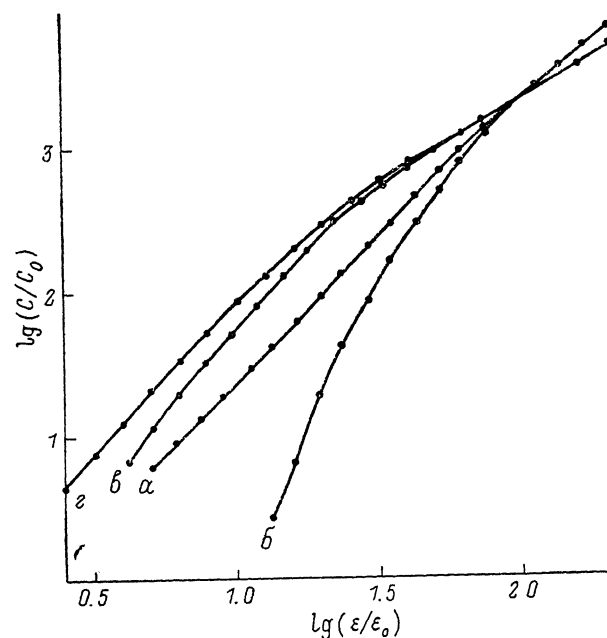


Рис. 6. Корреляционные интегралы, полученные по решению системы Ресслера (а), по решению системы Ресслера с добавленным шумом (б) и с шумом после четырех- (в) и восьми-кратного разложения (г).

чений позволяют сделать вывод, что изучаемые колебания представляют собой хаотические автоколебания низкой размерности (3—4) с добавлением шума. Значения корреляционной размерности аттрактора, соответствующие этим автоколебаниям, по-видимому, могут служить характеристикой состояния нервной мышечной системы и, следовательно, могут быть полезны при постановке диагноза заболеваний этой системы.

Литература

- [1] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
- [2] Caputo J. G., Malraison B., Atten P. // Dimensions and entropies in chaotic systems. Quantification of complex behavior. Heidelberg, 1986. P. 180—190.
- [3] Broomhead D. S., King G. P. // Phys. D. 1986. Vol. 20. P. 217—236.
- [4] Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979. 368 с.
- [5] Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982. 428 с.
- [6] Fraser A. M., Swinney H. L. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. N 2. P. 1134—1140.
- [7] Гурфинкель В. С., Коц Я. М., Шик М. Л. Регуляция позы человека. М.: Наука, 1965. 256 с.
- [8] Розенблом М. Г., Фирсов Г. И. // Тез. докл. Всес. конф. Нелинейные колебания механических систем. Горький, 1987. Ч. 2. С. 30—32.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Поступило в Редакцию
14 января 1988 г.