УДК 53 : 51

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ ПРЕОБЛАДАНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

Л. А. Бакалейников, М. Г. Васильев

Рассмотрена задача радиационно-кондуктивного теплообмена в условиях преобладания переноса тепла излучением, что обусловливает наличие малого параметра ε^2 при старшей производной в уравнении теплового баланса. В работе построена асимптотика решения линеаризованной задачи в плоском слое по параметру ε. Показано, что наличие логарифмической особенности в ядре интегрального оператора задачи приводит к появлению в разложении членов порядка $0(\varepsilon^m(\ln\varepsilon)^k)$ и логарифмически растущих погранслойных функций. Найдены первые члены разложения температурного поля и температурного градиента на границе слоя по параметру ε.

В связи с широким использованием полупрозрачных материалов в различных областях техники важное значение имеет исследование процесса радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ). Однако эффективные аналитические методы решения задач РКТ разработаны лишь для двух случаев. В первом случае (оптически тонкого слоя) тепловое излучение слоя дает значительно меньший вклад в суммарный баланс энергии, чем излучение границ, и задача РКТ сводится к задаче кондуктивного теплообмена. Такой же вид принимает задача РКТ и в случае оптически толстого слоя при использовании диффузионного приближения для радиационного потока.

Вместе с тем исследование многих процессов переноса тепла теплопроводностью и излучением приводит к необходимости решения задачи РКТ в условиях, когда оптическая толщина слоя τ является величиной порядка единицы и вклад теплового излучения в суммарный баланс энергии значителен. Такая ситуация характерна, например, для процессов теплообмена в тугоплавких оптических кристаллах при температурах, близких к температуре плавления. В частности, для сапфира значение кондуктивно-радиационного параметра N_S, определяющего отношение кондуктивного потока к радиационному [1], имеет величину порядка 0.01. Преобладающая роль переноса тепла излучением в процессах теплообмена приводит к тому, что уравнение РКТ в безразмерном виде содержит член с малым параметром при старшей производной. Решение подобного рода уравнений с помощью численных методов требует больших вычислительных затрат при определении неизвестной функции и ее производной. Трудности в использовании численного подхода в ряде задач, для которых необходима точная информация о температуре и тепловых потоках (что имеет место, например, для моделирования процессов теплообмена при выращивании кристаллов из расплава), и наличие в них малого параметра делают целесообразным применение асимптотического метода. В настоящей работе построена асимптотика решения линеаризованной задачи РКТ в плоском слое оптической толщины порядка единицы в условиях преобладания переноса тепла излучением.

1 Постановка задачи

Процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в плоском слое в безразмерном виде описывается уравнением

$$\mathscr{L}_\varepsilon t \equiv L_\varepsilon t + Kt \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 t}{dz^2} - t + Kt = F(z) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$t(0)=1, \ t(1)=0. \tag{1.2}$$

Здесь $t=(T-T_1)/(T_0-T_1)$; T — температура в слое; T_0, T_1 — температуры границ; $\varepsilon^2=N_S/4\tau^2 \ll 1$; N_S — кондуктивно-радиационный параметр; τ — оптическая толщина слоя.

Интегральный оператор K описывает вклад теплового излучения объема области в баланс энергии

$$Kt = 0.5\tau \int_0^1 dz' E_1(\tau\,|z'-z|)\,t(z'). \tag{1.3}$$

Вклад излучения с границ задается величиной

$$F(z) = -0.5\,\{t_0^* E_2(\tau z) + t_1^* E_2(\tau(1-z))\}. \tag{1.4}$$

В выражениях (1.3), (1.4) функции $E_n(x) = \int_1^\infty (e^{-xu}/u^n)\,du$ — интегральные экспоненты n-го порядка. Величины t_0^*, t_1^* — безразмерные эффективные температуры свечения границ $z_0=0$ и $z_1=1$, которые предполагаются не зависящими от распределения температуры внутри слоя.

Задача (1. 1), (1. 2) является сингулярно возмущенной краевой задачей, однозначно разрешимой в C^2 [0, 1] [2]. При попытке найти асимптотику решения в виде ряда по степеням малого параметра ε оказывается, что первый член внешнего разложения $t_0(z)$ в окрестности границы ведет себя как

$$t_0(z) \sim b_{00}^\beta + b_{11}^\beta (z-z_\beta) \ln|z-z_\beta|, \ \beta=0, \ 1, \tag{1.5}$$

и, следовательно, правая часть уравнения для следующего приближения содержит особенность порядка $1/(z-z_\beta)$. Такое поведение решения обусловлено наличием логарифмической особенности ядра интегрального оператора K [3]. С ростом номера приближения особенность на границах слоя будет нарастать. Такая ситуация сходна с положением, возникающим при построении асимптотики решения интегрального уравнения с сингулярным ядром, убывающим на бесконечности степенным образом [4]. Устранение особенностей старших приближений достигается введением функций типа пограничного слоя с логарифмическим ростом на бесконечности. Это в свою очередь приводит к появлению в разложении решения членов порядка O $(\varepsilon^n \ln^l \varepsilon)$.

2. Построение первых членов асимптотики решения

Пользуясь соображениями, изложенными в разделе 1, найдем первые члены асимптотики решения Предполагая, что решение имеет вид

$$t(z, \varepsilon) = t_{00}(z) + u_{00}^0\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) + u_{00}^1\left(\frac{1-z}{\varepsilon}\right) + 0(1), \tag{2.1}$$

где $u_{00}^\beta(\xi^\beta) \xrightarrow[\xi^\beta\to\infty]{} 0$, $t_{00}(z) \in C^\gamma[0, 1]$.

Подставим (2. 1) в (1. 1) и перейдем к внешнему пределу при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном z. Это дает уравнение для определения первого члена внешнего разложения

$$\tilde{K} t_{00} \equiv -t_{00}(z) + (Kt_{00})(z) = F(z). \tag{2.2}$$

Используя представление решения $t_{00}(z)$ через резольвенту, можно показать, что

$$t_{00}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\left[b_{km}^{0}z^{k}\ln^{m}z+b_{km}^{1}(1-z)^{k}\ln^{m}(1-z)\right]+\psi(z), \tag{2.3}$$

где $\psi(z)\in C^{\infty}[0,\ 1]$.

Для построения погранслойных поправок $u_{00}^{\beta}(|z-z_{\beta}|/\varepsilon)$ необходимо подставить (2. 1) в (1. 1) и перейти к внутреннему пределу при $\varepsilon\to 0$ и фиксированном $\xi^{\beta}=|z-z_{\beta}|/\varepsilon$. Поскольку $F(z)-\mathscr{L}_{\varepsilon}t_{00}\to 0$, $Ku_{00}^{\beta}\to 0$ во внутреннем пределе, то уравнения для u_{00}^{β} будут

$$u_{00}^{\beta''}(\xi^{\beta})-u_{00}^{\beta}(\xi^{\beta})=0. \tag{2. 4}$$

Краевые условия для (2. 4), согласно (1. 2), (2. 1), имеют вид

$$u_{00}^{0}|_{\xi^{0}=0}=1-t_{00}(0),\ \ u_{00}^{1}|_{\xi^{1}=0}=-t_{00}(1). \tag{2. 5}$$

Решение задачи в (2. 4), (2. 5) совместно с условиями затухания $u_{00}^{\beta}(\xi^{\beta})\xrightarrow[\xi^{\beta}\to\infty]{}0$ $(\beta=0,\ 1)$ дает

$$u_{00}^{0}(\xi^{0})=(1-t_{00}(0))\,e^{-\xi^{0}},\ \ u_{00}^{1}(\xi^{1})=-t_{00}(1)\,e^{-\xi^{1}}. \tag{2. 6}$$

Для продолжения процедуры построения асимптотики решения найдем невязку уравнения (1. 1) на решении $t_{00}(z)+u_{00}^{0}(\xi^{0})+u_{00}^{1}(\xi^{1})$

$$Q_{1}=\mathscr{L}_{\varepsilon}(t-t_{00}(z)-u_{00}^{0}(\xi^{0})-u_{00}^{1}(\xi^{1}))=-\varepsilon^{2}t_{00}''(z)-K(u_{00}^{0}+u_{00}^{1}). \tag{2. 7}$$

Используя представление $E_{1}(x)$ в виде ряда, можно показать, что для функций вида $u(\xi^{\beta})=Ae^{-|z-z_{\beta}|/\varepsilon}$, $\beta=0,\ 1$ имеет место оценка

$$Ku=\varepsilon 0.5\tau A\left\{E_{1}(\tau|z-z_{\beta}|)+\sum_{k=1}^{\infty}(\tau\varepsilon)^{k}\varphi_{k}(\tau|z-z_{\beta}|)+\right.$$

$$\left.+e^{-|z-z_{\beta}|/\varepsilon}\left[\gamma+\ln\frac{|z-z_{\beta}|}{\varepsilon}+\ln\left(\frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\right)+\int_{0}^{|z-z_{\beta}|/\varepsilon}\frac{e^{t}-1}{t}dt\right]\right\}+O(e^{-1/\varepsilon}), \tag{2. 8}$$

где $\gamma=0.577216\ldots$ — постоянная Эйлера, $\varphi_{k}(x)=-x^{k}\int_{0}^{x}t^{k-1}e^{-t}dt$.

Переходя в (2. 7) к внешнему пределу, найдем

$$Q_{1}=-\varepsilon 0.5\tau\,\{u_{00}^{0}(0)\,E_{1}(\tau z)+u_{00}^{1}(0)\,E_{1}(\tau(1-z))\}+O(\varepsilon^{2}). \tag{2. 9}$$

Следующий член внешнего разложения определяется решением уравнения вида (2. 2), правая часть которого равна внешнему пределу выражения Q_{1}/ε и, следовательно, будет иметь логарифмическую особенность при $z=0$ и $z=1$. Соответственно решение, записанное в погранслойных переменных, должно иметь аналогичную особенность при $\xi^{\beta}\to\infty$. Для устранения особенностей во внешнем разложении целесообразно отнести указанные логарифмические члены во внутреннее разложение, разбив его на сумму функции $S(\xi^{\beta})$, «забирающей» в себя растущую часть асимптотики, и погранслойной поправки $u(\xi^{\beta})$, затухающей на бесконечности. Поскольку разбиение внутреннего разложения на растущую и затухающую части достаточно произвольно, то в качестве $S(\xi^{\beta})$ можно выбрать

$$S(\xi^{\beta})=\alpha(\xi^{\beta})\,a^{\beta}\ln\xi^{\beta}=\alpha(\xi^{\beta})\,a^{\beta}(\ln|z-z_{\beta}|-\ln\varepsilon), \tag{2. 10}$$

где $\alpha(\xi^{\beta})\in C^{\infty}(0,\ \infty)$ — нейтрализатор, т. е. функция, обращающаяся в нуль при $\xi^{\beta}<0.5$ и в единицу при $\xi^{\beta}\geqslant 1$.

Подстановка (2. 10) в (1. 1) и переход к внешнему пределу дает

$$\lim \mathscr{L}_\varepsilon S(\xi^\beta) = -a^\beta (\ln|z - z_\beta| - \ln\varepsilon) + 0.5\tau a^\beta \int_0^1 E_1(\tau|z' - z|) \times$$

$$\times [\ln|z' - z_\beta| - \ln\varepsilon]\, dz' + O(\varepsilon), \tag{2.11}$$

т. е. результат действия $\mathscr{L}_\varepsilon$ на $S(\xi^\beta)$ во внешнем пределе содержит члены порядка $\ln\varepsilon$. Для их компенсации асимптотика решения должна содержать члены порядка $\varepsilon\ln\varepsilon$. Таким образом, для отыскания дальнейших членов асимптотического разложения положим

$$t(z, \varepsilon) - t_{00}(z) - u_{00}^0(\xi^0) - u_{00}^1(\xi^1) = \varepsilon\ln\varepsilon\,(t_{11}(z) + u_{11}^0(\xi^0) + u_{11}^1(\xi^1)) +$$
$$+ \varepsilon\,(t_{10}(z) + S_{10}^0(\xi^0) + S_{10}^1(\xi^1) + u_{10}^0(\xi^0) + u_{10}^1(\xi^1)) + O(\varepsilon). \tag{2.12}$$

Подставляя (2. 12) в уравнение (1. 1), переходя к внешнему пределу и приравнивая члены порядка $\varepsilon\ln\varepsilon$ и ε с учетом (2. 9), (2. 11), найдем

$$\tilde{K}t_{11} = \tilde{K}(a_{10}^0 + a_{10}^1), \tag{2.13}$$

$$\tilde{K}t_{10} = -\tilde{K}(a_{10}^0 \ln z + a_{10}^1 \ln(1 - z)) -$$
$$- 0.5\tau\{u_{00}^0(0)\,E_1(\tau z) + u_{00}^1(0)\,E_1(\tau(1 - z))\}. \tag{2.14}$$

Уравнение (2. 14) может быть разрешено в классе непрерывных функций лишь в том случае, когда правые части не содержат логарифмических особенностей. Это условие позволяет отыскать константы a_{10}^0, a_{10}^1

$$a_{10}^\beta = -0.5\tau u_{00}^\beta(0). \tag{2.15}$$

Подстановка a_{10}^0, a_{10}^1 в (2. 14) позволяет определить правую часть уравнения (2. 14) и найти t_{10}. Вследствие однозначной разрешимости интегрального уравнения из (2. 13) имеем

$$t_{11} \equiv a_{10}^0 + a_{10}^1. \tag{2.16}$$

Для отыскания погранслойных поправок необходимо вычислить навязку $\tilde{O}_1$ на решении $t_{00}(z) + u_{00}^0(\xi^0) + u_{00}^1(\xi^1) + \varepsilon\ln\varepsilon t_{11}(z) + \varepsilon(t_{10}(z) + S_{10}^0(\xi^0) + S_{10}^1(\xi^1))$, перейти к внутреннему пределу и приравнять члены порядка ε и $\varepsilon\ln\varepsilon$. Вычисления дают

$$(u_{11}^\beta)'' - u_{11}^\beta = 0,\ \beta = 0,\ 1, \tag{2.17}$$

$$(u_{10}^\beta)'' - u_{10}^\beta = (-S_{10}^\beta)'' - \frac{b_{11}^\beta}{\xi^\beta} - 0.5\tau u_{00}^\beta(0) \times$$

$$\times \left\{e^{-\xi^\beta}\left(\gamma + \ln\xi^\beta + \int_0^{\xi^\beta} \frac{e^\eta - 1}{\eta}\, d\eta\right) - (1 - \alpha(\xi^\beta))\ln\xi^\beta\right\}. \tag{2.18}$$

Краевые условия для u_{11}^β, u_{10}^β, согласно (1. 2) и (2. 12), имеют вид

$$u_{11}^\beta(0) = -t_{11}(z_\beta) + a_{10}^{1-\beta},\quad u_{10}^\beta(0) = -t_{10}(z_\beta). \tag{2.19}$$

Уравнения (2. 17), (2. 18) совместно с (2. 19) и условиями затухания погранслойных поправок однозначно определяют функции u_{11}^β, u_{10}^β. Таким образом, проведенные выкладки позволяют записать асимптотику решения задачи РКТ с точностью до членов порядка ε в виде

$$t(z, \varepsilon) = t_{00}(z) + [1 - t_{00}(0)]\,e^{-z/\varepsilon} + [-t_{00}(1)]\,e^{-(1-z)/\varepsilon} + 0.5\tau\varepsilon\ln\varepsilon \times$$
$$\times \{[t_{00}(0) + t_{00}(1) - 1] + [1 - t_{00}(0)]\,e^{-z/\varepsilon} + [-t_{00}(1)]\,e^{-(1-)/\varepsilon}\} +$$
$$+ 0.5\tau\varepsilon\left\{\alpha\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)[t_{00}(0) - 1]\ln\frac{z}{\varepsilon} + \alpha\left(\frac{1 - z}{\varepsilon}\right)t_{00}(1)\ln\left(\frac{1 - z}{\varepsilon}\right)\right\} + O(\varepsilon). \tag{2.20}$$

3. Общий алгоритм построения асимптотики решения

Изложенный в разделе 2 способ устранения особенностей внешнего разложения может быть использован и при построении высших членов асимптотического разложения. Логарифмические особенности в правых частях уравнений для внешнего приближения $N+1$ будут возникать при вычислении невязки от N-го внешнего приближения. Для их устранения вводятся функции погранслойной переменной $S_{N+1,\, m}(\xi^\beta)$, имеющие вид

$$S^\beta_{N+1,\, m}(\xi^\beta)=\alpha(\xi^\beta)\sum_{j=1}^{J_{N+1,\, m}} a^\beta_{N+1,\, m,\, j}\ln^j(\xi^\beta). \qquad (3.1)$$

Результат действия оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ на функции $S^\beta_{N+1,m}$ во внешнем пределе будет

$$\mathscr{L}_\varepsilon S^\beta_{N+1,\, m}=-\sum_{j=1}^{J_{N+1,\, m}}(-1)^j(\ln\varepsilon)^j a^\beta_{N+1,\, m,\, j}-\sum_{j=0}^{J_{N+1,\, m}}(\ln\varepsilon)^j\sum_{i=j+1}^{J_{N+1,\, m}}(-1)^i C^j_i\times$$
$$\times(\ln|z-z_\beta|)^{i-j}a^\beta_{N+1,\, m,\, i}+\sum_{i=0}^{J_{N+1,\, m}}(\ln\varepsilon)^i\,\theta^\beta_{N+1,\, m,\, i}(z)+O(\varepsilon). \qquad (3.2)$$

Здесь функции $\theta^\beta_{N+1,\, m,\, i}(z)$ непрерывны в промежутке $[0,\ 1]$ и линейно зависят от коэффициентов $a^\beta_{N+1,\, m,\, i}$, а $C^j_i=i\,!/(j\,!\,(i-j)\,!)$ — биномиальные коэффициенты.

Поскольку (3.2) содержит члены порядка $O(\ln^j\varepsilon)$, $j=1,\ \ldots,\ J_{N+1,\, m}$, то асимптотику решения необходимо искать в виде

$$t(z,\ \varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{M_n}\varepsilon^n(\ln\varepsilon)^m[t_{nm}(z)+S^0_{nm}(\xi^0)+S^1_{nm}(\xi^1)+u^0_{nm}(\xi^0)+u^1_{nm}(\xi^1)]. \qquad (3.3)$$

Здесь $t_{nm}(z)\in C[0,\ 1]$, а погранслойные поправки $u^\beta_{nm}(\xi^\beta)$ имеют асимптотику

$$u^\beta_{nm}(\xi^\beta)\underset{\xi^\beta\to\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\xi^\beta)^k}\sum_{j=0}^{r}d^\beta_{nm;\, kj}(\ln\xi^\beta)^j+O(e^{-\xi^\beta}). \qquad (3.4)$$

Процесс построения членов разложения осуществляется следующим образом. Пусть построена частичная сумма $\hat{t}_N$ ряда (3.3), содержащая члены с $n=0,\ 1,\ \ldots,\ N$. Порожденную этой суммой невязку $Q_N(z,\ \varepsilon)$ можно представить в виде

$$Q_N(z,\varepsilon)\equiv F(z)-\mathscr{L}_\varepsilon\hat{t}_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{M_n}\varepsilon^n(\ln\varepsilon)^m[\Phi_{nm}(z)+$$
$$+\Psi^0_{nm}(\xi^0)+\Psi^1_{nm}(\xi^1)+W^0_{nm}(\xi^0)+W^1_{nm}(\xi^1)]. \qquad (3.5)$$

Здесь функции $\Phi_{nm}(z)$ непрерывны в $[0,\ 1]$, $\Psi^\beta_{nm}(\xi^\beta)=\alpha(\xi^\beta)\sum_{j=1}^{H_{n,\, m}}g^\beta_{nm,\, j}(\ln\xi^\beta)^j$, а погранслойные поправки $W^\beta_{nm}(\xi^\beta)$ имеют на бесконечности асимптотику вида (3.4).

Подставляя (3.3) в (1.1), переходя к внешнему пределу и приравнивая члены порядка $\varepsilon^{N+1}(\ln\varepsilon)^m$, получим цепочку уравнений относительно $t_{N+1,\, m}$

$$\tilde{K}t_{N+1,\, 0}-\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{i=1}^{J_{N+1,\, 0}}(\ln|z-z_\beta|)^i a^\beta_{N+1,\, 0,\, i}+\sum_{\beta=0}^{1}\Theta^\beta_{N+1,\, 0;\, 0}(z)=$$
$$=\Phi_{N+1,\, 0}(z)+\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{i=0}^{H_{N+1,\, 0}}g^\beta_{N+1,\, 0,\, i}(\ln|z-z_\beta|)^i,$$

$$\tilde{K}t_{N+1,\, m}-\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{i=1}^{J_{N+1,\, m}}(\ln|z-z_\beta|)^i a^\beta_{N+1,\, m,\, i}-\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=m-j+1}^{J_{N+1,\, j}}C^{m-j}_i(-1)^{m-j}\times$$

$$(\ln|z-z_\beta|)^{i-m+j}a^\beta_{N+1,\,j,\,i}+\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{i=0}^{m}\theta^\beta_{N+1,\,i;\,m-i}(z)=$$
$$=\Phi_{N+1,\,m}(z)+\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{j=0}^{m-1}g^\beta_{N+1,\,j,\,m-j}(-1)^{m-j}+$$
$$+\sum_{\beta=0}^{1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=m-j+1}^{H_{N+1,\,j}}C_i^{m-j}(-1)^{m-j}g^\beta_{N+1,\,j,\,i}(\ln|z-z_\beta|)^{i-m+j},\quad m=1,\,2,\,\ldots,\,M_{N+1}. \tag{3.6}$$

Как и раньше, требование непрерывности функций $t_{N+1,\,m}$ приводит к требованию непрерывности свободных членов уравнений (3.6) в $[0,\ 1]$, что позволяет определить величины $J_{N+1,\,m}$ и $a^\beta_{N+1,\,m,\,i}$, $i=1,\,\ldots,\,J_{N+1,\,m}$, $\beta=0,\ 1$ последовательно для $m=0,\ 1,\ \ldots,\ M_{N+1}$. Как показывают вычисления, $M_{N+1}=N+1$, $J_{N+1,\,m}=N+1-m$. Полученные значения коэффициентов $a^\beta_{N+1,\,m,\,i}$ дают возможность найти функции $\theta^\beta_{N+1,\,m,\,i}(z)$ и тем самым получить свободные члены в уравнениях для $t_{N+1,\,m}$.

Следующий этап заключается в отыскании погранслойных поправок $u^\beta_{N+1,\,m}(\xi^\beta)$. Для их нахождения необходимо вычислить невязку $\widetilde{Q}_N$ на решении $\tilde{t}_N=\hat{t}_N+\sum\limits_{m=0}^{N+1}\varepsilon^{N+1}(\ln\varepsilon)^m[t_{N+1,\,m}(z)+S^0_{N+1,\,m}(\xi^0)+S^1_{N+1,\,m}(\xi^1)]$ и перейти в уравнении $\mathscr{L}_\varepsilon(t-\tilde{t}_N)=\widetilde{Q}_N$ к внутреннему пределу. Приравнивание членов порядка $\varepsilon^{N+1}(\ln\varepsilon)^m$, $m=0,\ \ldots,\ N+1$ дает

$$\left(u^\beta_{N+1,\,m}\right)''-u^\beta_{N+1,\,m}=W^\beta_{N+1,\,m}-V^\beta_{N+1,\,m}, \tag{3.7}$$

где $V^\beta_{N+1,\,m}$ — внутренний предел выражения $\mathscr{L}_\varepsilon S^\beta_{N+1,\,m}+S^\beta_{N+1,\,m}-\sum\limits_{i}^{N+1-m}(\ln\varepsilon)\times\theta^\beta_{N+1,\,m,\,i}(z)$, обладающий асимптотикой на бесконечности вида (3.4).

Граничные условия для $u^\beta_{N+1,\,m}$

$$u^\beta_{N+1,\,m}(0)+t_{N+1,\,m}(z_\beta)+\sum_{i=0}^{m-1}a^{1-\beta}_{N+1,\,i,\,m-i}(-1)^{m-i}=0, \tag{3.8}$$

следующие из (3.3) и (1.2), и условия затухания позволяют однозначно определить погранслойные поправки, на чем и заканчивается процесс построения $N+1$-го члена асимптотической суммы.

Заключение

Полученные в предыдущих разделах результаты показывают, что в задаче РКТ с преобладанием переноса тепла излучением наблюдается экспоненциальный температурный пристеночный пограничный слой, который может приводить к большим градиентам температуры (а значит, и тепловым потокам) вблизи границ. Для вычисления асимптотики температурного градиента удобно воспользоваться функцией Грина $G(z,\,z')$ для оператора L_ε и вычислить интеграл $\int\limits_0^1 G_z(z,\ z')[F(z')-Kt(z')]\,dz'$, подставив в него асимптотику $t(z)$. Указанные вычисления приводят к следующему выражению для значения градиента на границе области:

$$t'(0)=-\frac{1-t_{00}(0)}{\varepsilon}-\frac{\tau\ln\varepsilon}{2}[1-t_0^*]+O(1). \tag{4.1}$$

Отметим, что наличие члена порядка $O(\ln\varepsilon)$ как в разложении (2.20), так и в (4.1) связано с логарифмической особенностью ядра интегрального оператора, описывающего радиационный теплообмен.

Предложенный в данной работе алгоритм может быть использован для построения асимптотики решения и более сложных задач. Так, например, можно отказаться от предположения о независимости эффективных температур свечения границ от температуры внутри слоя и рассмотреть случай, когда t_0^*, t_1^* определяются как излучением границ с температурой $t(z_\beta)$, так и диффузно отраженным излучением слоя. Способом, аналогичным изложенному, может быть исследована и задача РКТ без линеаризации. Вид асимптотики решения указанных задач будет определяться, как и в данном случае, формулой (3. 3).

В заключение авторы благодарят В. С. Юферева за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

[1] *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 492 с.
[2] *Сергеев О. А., Мень А. А.* Теплофизические свойства полупрозрачных материалов. М., 1977. 50 с.
[3] *Вайникко Г., Педас А., Уба П.* Методы решения слабосингулярных интегральных уравнений. Тарту, 1984. 94 с.
[4] *Новокшенов В. Ю.* Математический сборник, 1978, т. 105 (147), № 4, с. 542—547.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
26 ноября 1987 г.