Существование токов утечки позволяет также объяснить зависимость величины МЭЭ от частоты переменного магнитного поля. Поскольку время релаксации зарядов в композиционной системе определяется как [5] $\tau = \rho\varepsilon\varepsilon_0$ (где ρ, ε — удельное сопротивление и диэлектрическая проницаемость композита), то при относительно невысоком сопротивлении шпинельной фазы МЭЭ должен возрастать при увеличении частоты переменного магнитного поля. На рис. 2 приведена зависимость МЭЭ от частоты переменного магнитного поля для композиционной керамики состава 0.8 $BaTiO_3 \cdot 0.2$ ($NiO \cdot 0.98$ Fe_2O_3). Возрастание величины МЭЭ при увеличении частоты можно объяснить уменьшением релаксационных явлений.

Таким образом, композиционная керамика титанат бария—феррит никеля без добавок, повышающих электросопротивление системы, обладает достаточно большим МЭЭ, максимальное значение которого наблюдается для состава, содержащего 20 мол.% феррита никеля. Величина МЭЭ значительно возрастает с увеличением частоты переменного магнитного поля.

Литература

[1] *Веневцев Ю. Н., Гагулин В. В., Любимов В. Н.* Сегнетомагнетики. М.: Наука, 1982. 224 с.
[2] *Бичурин М. И., Петров В. М., Фомич Н. Н., Яковлев Ю. М.* Обзоры по электронной технике. Сер. 6. Материалы, 1985, № 2 (1113), с. 3—9.
[3] *Boomgaard van den J., Run van A. M. J. G., Suchtelen van J.* Ferroelectrics, 1976, v. 14, N 1—2, p. 727—728.
[4] *Kramer W. E., Hopkins R. H., Daniel M. R.* J. Mat. Sci. Lett., 1977, v. 12. N 4, p. 409—414.
[5] *Boomgaard van den J., Born R. A. J.* J. Mat. Sci., 1978, v. 13, N 7, p. 1538—1548.
[6] *Смит Я., Вейн Х.* Ферриты. М.: ИЛ, 1962. 504 с.
[7] *Bertaut E. F., Mercier M.* Mat. Res. Bull., 1971, v. 6, N 4, p. 907—922.

Витебское отделение института физики твердого тела и полупроводников АН БССР

Поступило в Редакцию 6 ноября 1987 г.
В окончательной редакции 15 марта 1988 г.

УДК 53 . 51

Журнал технической физики, т. 58, в. 11, 1988

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НАКАЧКОЙ

Ф. В. Бункин, Ю. А. Вощинский, Ю. А. Кравцов, А. С. Магаршак, М. Мамадалиев, А. Ю. Синкевич, Б. А. Станковский, А. Л. Суровегин, Д. М. Штейнградт

Изучение динамики нелинейного осциллятора лежит в основе большинства задач современной физики. Его поведение в предположении неавтономности системы и при наличии линейного вязкого трения описывается после перехода к безразмерным координатам уравнением

$$\ddot{q} + \beta\dot{q} + \Phi(q) = F(q, t), \tag{1}$$

где q — обобщенная безразмерная координата; t — безразмерная переменная, соответствующая времени; $\beta\dot{q}$ — член, описывающий диссипацию энергии; $\Phi(q)$ — функция отклика осциллятора; $F(q, t)$ — функция, описывающая его неавтономность.

Выражение (1) описывает столь общий процесс, что для получения конкретного результата естественно ограничиться рассмотрением какого-нибудь предельного случая. В настоящей работе рассмотрен случай локализованного внешнего воздействия на осциллятор синусоидальной накачкой, а также функция отклика была выбрана в виде синуса от безразмерной координаты. Такой осциллятор может быть реализован с помощью маятника с обычным шарнирным подвесом, который раскачивается индуктором, питаемым переменным током и расположенным вблизи нижнего положения чечевицы маятника. Полагая в (1)

$$\Phi(q) = \sin q,$$

$$F(q, t) = Q(q)\sin(\omega t + \psi)\, U(q_0^2 - q^2),$$

где

$$U(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(воздействие на осциллятор отлично от нуля при $-q_0 < q < q_0$), получим

$$\ddot{q}+\beta\dot{q}+\sin q=Q(q)\sin(\omega t+\psi)\,U(q_0^2-q^2). \tag{2}$$

В зависимости от четности функции $Q(q)$ такие осцилляторы разумно разбить на два класса. Действительно, при различной четности $Q(q)$ во втором сомножителе

$$\sin(\omega t+\psi)=\sin\omega t\cos\psi+\cos\omega t\sin\psi$$

основной вклад даст либо первое ($Q(q)$ — нечетная), либо второе ($Q(q)$ — четная) слагаемое. В первом слагаемом при малых ψ зависимость от нее фазы тока накачки несущественна, во втором же слагаемом зависимость от ψ максимальна.

Случай четной функции $Q(q)$ был исследован сначала экспериментально [1], а затем теоретически [2]. Важным результатом этих работ явилось доказательство наличия у осцилляторов с четной функцией $Q(q)$ дискретного ряда амплитуд стационарных колебаний. В работе [2] была рассмотрена устойчивость этих стационарных колебаний и доказано, что величина их амплитуд практически не зависит от трения и величины внешнего воздействия. Случай нечетной функции $Q(q)$ приводит к уравнению осциллятора с параметрической накачкой

$$\ddot{q}+\beta\dot{q}+\sin q=2w\sin\frac{q}{2}\sin(\omega t+\psi)\,U(q_0^2-q^2). \tag{3}$$

Выбор $Q(q)=2w\sin q/2$ обусловлен только соображениями простоты изложения, которое практически без изменений может быть перенесено на любую другую нечетную гладкую функцию $Q(q)$.

В настоящей работе получено выражение для стационарных амплитуд осциллятора, описываемого уравнением (3), а также условие устойчивости этих амплитуд. В работе предполагается малость коэффициента трения β и величины q_0, кроме того, предполагается высокочастотность внешнего воздействия (накачки) $\omega \gg 1$.

Уравнение (3) содержит два члена

$$\beta\dot{q} \quad \text{и} \quad 2w\sin\frac{q}{2}\sin(\omega t+\psi)\,U(q_0^2-q^2),$$

определяющих зависимость амплитуды осциллятора от времени. В качестве нулевого приближения к (3) примем уравнение без этих членов

$$\ddot{q}+\sin q=0. \tag{4}$$

Решение этого уравнения содержит энергию колебания (E) и связанную с ней амплитуду (k) в качестве параметра [3]

$$\sin\frac{q}{2}=k\,\mathrm{sn}(t,k);\quad \dot{q}=2k\,\mathrm{cn}(t,k);\quad E=2k^2;\quad 1\geqslant k\geqslant 0.$$

Величина q_0 эквивалентна двум другим s_0, t_0, удобным при такой подстановке

$$\sin\frac{q_0}{2}=s_0=k\,\mathrm{sn}(t_0,k).$$

Запишем уравнение, определяющее изменение энергии осциллятора $E(t)$ с течением времени. Для этого умножим уравнение (3) на производную по времени от обобщенной координаты. Первый и третий члены в левой части будут в сумме равны производной от энергии осциллятора по времени, остальные два члена, как уже отмечалось выше, будут определять динамику осциллятора и изменение его энергии на большем временном масштабе, чем период колебания идеального автономного осциллятора

$$\dot{E}(t)=-\beta\dot{q}^2+2w\dot{q}\sin(\omega t+\psi)\,U(q_0^2-q^2). \tag{5}$$

При выводе уравнения (5) не использовалось предположение о малости вклада членов с β и w, т. е. малость изменения энергии осциллятора за время одного периода. Используя это предположение, подставим в (5) решение уравнения (4) в качестве первого приближения

$$\dot{E}(t)=-4\beta k^2(\mathrm{cn}(t,k))^2+4wk^2\sin(\omega t+\psi)\,\mathrm{sn}(t,k)\,\mathrm{cn}(t,k)\,U(s_0^2-k^2(\mathrm{sn}(t,k))^2).$$

Переходя от энергии к амплитуде, получаем

$$\frac{d\ln k}{dt} = -\beta(\mathrm{cn}(t,\ k))^2 + w\,\mathrm{sn}(t,\ k)\,\mathrm{cn}(t,\ k)\sin(\omega t+\psi)\,U\,(s_0^2 - k^2(\mathrm{sn}(t,\ k))^2). \qquad (6)$$

Для стационарных амплитуд

$$\left\langle\frac{d\ln k}{dt}\right\rangle_{t\to\infty} = 0.$$

Это условие позволяет вычислить возможные стационарные амплитуды, усредняя (6) по большому числу периодов колебаний осциллятора

$$T_0 = 4\int_0^{\pi/2} d\alpha\,[1-k^2(\sin\alpha)^2]^{-1/2} = 4K(k). \qquad (7)$$

Усредняя за время NT_0 уравнение (6) ($N\to\infty$), получаем [4]

$$O = -\beta(K(k))^{-1}k^{-2}[E(k)-(1-k^2)K(k)] + w(4NK(k))^{-1}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{2N-1}\int_{-t_0}^{t_0} dt\,\mathrm{sn}(t,\ k)\,\mathrm{cn}(t,\ k)\sin[\omega(t+2nK(k))+\psi].$$

Разность двух членов в правой части может обращаться в нуль при $N\to\infty$, если сумма во втором слагаемом пропорциональна N, что выполняется при [5] $2\omega K(k_m)=2\pi m$, m — натуральное. Это условие определяет амплитуды стационарных колебаний k_m и, следовательно, отношение периодов осциллятора и накачки

$$T_0/T_\text{п} = T_0\omega/2\pi = 2m.$$

Учитывая, что $s_0 \ll k$, вычислим интеграл во втором члене в правой части. Полученное уравнение определяет необходимую для реализации стационарных колебаний фазу тока накачки в моменты времени, соответствующие $q=0$. Необходимая фаза (тока накачки) ψ_m из-за кратности периодов осциллятора и накачки будет постоянной

$$\cos\psi_m = \frac{\beta\omega^2[E(k_m)-(1-k_m^2)K(k_m)]}{wk_m^2\left(\sin\frac{\omega s_0}{k_m} - \frac{\omega s_0}{k_m}\cos\frac{\omega s_0}{k_m}\right)}.$$

Поскольку $|\cos\psi_m| < 1$, а w стоит в знаменателе, то зоны стационарных амплитуд появляются при $w \geqslant w_{\min}$. При $w=w_{\min}$ ($\psi=0$) соответствующая амплитуда не является устойчивой. Для случая $w > w_{\min}$ (6) принимает вид ($\Delta t=2K(k)$, т. е. рассматривается изменение амплитуды за полпериода)

$$\frac{\Delta k}{2k} = -\frac{\beta}{k^2}[E(k)-(1-k^2)K(k)] + \frac{w\cos\psi}{\omega^2}\left(\sin\frac{\omega s_0}{k} - \frac{\omega s_0}{k}\cos\frac{\omega s_0}{k}\right). \qquad (8)$$

В (8) выделим уровень полной компенсации потерь на трение, т. е. учтем, что при $k=k_m$, $\psi=\psi_m$ левая часть в (8) обращается в нуль

$$\Delta(k-k_m) = -(k-k_m)\frac{2\beta}{k_m^2}[E(k_m)-(1-k_m^2)K(k_m)]\left[\left(\frac{\omega s_0}{k_m}\right)^2\left(1-\frac{\omega s_0}{k_m}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega s_0}{k_m}\right)^{-1} +\right.$$
$$\left.+\frac{(2-k_m^2)K(k_m)-2E(k_m)}{E(k_m)-(1-k_m^2)K(k_m)}\right] - (\psi-\psi_m)\frac{2\beta}{k_m}\,\mathrm{tg}\,\psi_m[E(k_m)-(1-k_m^2)K(k_m)]. \qquad (9)$$

Изменение фазы тока накачки за время одного полупериода, т. е. между двумя последовательными моментами времени, соответствующими $q=0$, будет определяться тем добавочным временем, которое необходимо для завершения одного полупериода колебания осциллятора с амплитудой $k\neq k_m$

$$\Delta(\psi-\psi_m) = 2\omega[K(k)-K(k_m)] \approx (k-k_m)\frac{\Delta\omega}{k_m(1-k_m^2)}[E(k_m)-(1-k_m^2)K(k_m)]. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что колебания осциллятора будут устойчивыми как по амплитуде, так и по фазе при

$$1 > \frac{\omega s_0}{k_m}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega s_0}{k_m}. \qquad (11)$$

Сделанное в самом начале предположение о малости коэффициента трения существенно упростило вывод этого соотношения, так как можно было не следить за выполнением условия затухания флуктуаций

$$|\Delta(k-k_m)+(k-k_m)|<|k-k_m|.$$

Необходимо подчеркнуть, что в ряду стационарных амплитуд условие (11) может не выполняться для некоторых из них, что и объясняет пропуски в ряду устойчивых амплитуд, наблюдаемые экспериментально.

Условие устойчивости колебаний осциллятора (11) не изменится, если мы искусственно положим $\psi\equiv\psi_m$. Это наблюдение позволяет нам утверждать, что колебания осциллятора для случая нечетной функции $Q(q)$ включают в себя ряд стационарных амплитуд k_m, появление которых связано не с аргументными колебаниями, как это имело место в работе [1] для случая четной функции $Q(q)$, поскольку фазовые соотношения в рассмотренном случае не являются определяющими.

Устойчивость колебаний осциллятора в пределах одной зоны позволяет через изучение динамики амплитуды каждого единичного колебания рассмотреть стохастизацию движения под действием шумового сигнала.

Авторы приносят свою благодарность В. В. Добросельскому и Л. П. Хохрину за полезные обсуждения.

Литература

[1] Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний, вып. 2. Владимир, 1874. 134 с.
[2] *Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 320 с.
[3] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
[4] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
[5] *Ефимов А. В.* Математический анализ (специальные разделы), т. 1, М.: Высшая школа, 1980. 280 с.

Отраслевая научно-исследовательская лаборатория дистанционной диагностики ИОФ—ГЕОХИ АН СССР при НГПИ
Наманган

Поступило в Редакцию
3 ноября 1987 г.
В окончательной редакции
15 марта 1988 г.

УДК 537.311.33 *Журнал технической физики, т. 58, в. 11, 1988*

ЭФФЕКТ БЫСТРОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОБРАТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА СИММЕТРИЧНОЙ p^+pnn^+-СТРУКТУРЕ

В. И. Брылевский, И. В. Грехов, В. М. Ефанов, А. Ф. Кардо-Сысоев, И. Г. Чашников, Д. И. Шеметило

В [1] был обнаружен эффект быстрого восстановления обратного напряжения на высоковольтных p^+nn^+-структурах при переключении короткого импульса прямого тока (порядка нескольких сот наносекунд) на обратный. Исследования нестационарных полевых процессов инжекции и рассасывания плазмы в несимметричных p^+p-переходах с коэффициентом инжекции $\gamma\simeq1$ [2] показали следующее: при малой длительности (τ^+) прямого тока размер «диффузионной», сильно обогащенной подвижными носителями заряда области у p^+n-перехода мал и имеет характерный размер $L_p\simeq\sqrt{D_p\tau^+}$, где D_p — коэффициент диффузии дырок. При протекании обратного тока неравновесные носители заряда выносятся из n-базы практически полностью за время, в течение которого падение напряжения на области объемного заряда (ООЗ) у p^+—n-перехода мало по сравнению с падением напряжения на всей структуре.

После удаления неравновесных электронов и дырок напряжение на p^+n-переходе восстанавливается в процессе выноса из n-базы равновесных электронов, а скорость роста напряжения на ней определяется скоростью расширения ООЗ, т. е. скоростью движения электронов в поле, созданном обратным током, и может достигать величины более 10^{12} В/с. В этом и состоит эффект быстрого восстановления обратного напряжения на несимметричной p^+n-струк-