

УДК 538.566.5

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СИММЕТРИЧНОМ ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ

*Н. Н. Ахмедиев, Н. В. Островская*

Рассмотрен вопрос об устойчивости нелинейной  $TE_0$ -моды симметричного планарного волновода относительно двумерных и трехмерных возмущений. Показано, что для двумерных возмущений, если ограничиться классом четных функций,  $TE_0$ -мода неустойчива в области, где кривая зависимости интеграла энергии от эффективного показателя преломления имеет отрицательный наклон. Если не накладывать ограничений на вид функции начального возмущения, то  $TE_0$ -мода оказывается неустойчивой во всей области существования несимметричной моды  $A$ . Обсуждается вопрос об эволюции неустойчивых мод за пределами линейной теории возмущений. Решена задача об устойчивости  $TE_0$ -моды относительно трехмерных возмущений, периодических в поперечном направлении.

### Введение

Планарные волноводы в настоящее время находят широкое применение в устройствах интегральной оптики. Использование нелинейных свойств материалов волновода значительно расширяют функциональные возможности оптоэлектронных приборов. В работах [1, 2] было показано, что в симметричном планарном волноводе, в котором подложка и покрывающая среда обладают нелинейной диэлектрической проницаемостью, существуют моды с новыми необычными свойствами. В частности, для  $TE_0$ -моды такого волновода имеет место  $N$ -образная зависимость потока энергии от эффективного показателя преломления, что может привести к бистабильным состояниям нелинейных волн.

Важным в вопросах практического использования нелинейных волн, например в вопросе о возбуждении этих волн внешней накачкой [3], является свойство их устойчивости. До сих пор устойчивость волноводных мод в двумерной задаче исследовалась только методом численного моделирования решений параболического уравнения [4-7], возможности которого ограничены исследованием эволюции поля при конечном числе начальных условий. Если собственные функции возмущения остаются неизвестными, то этот метод не дает возможности выяснить полную картину устойчивости волноводных мод. Отметим также, что до сих пор не исследовалась устойчивость мод нелинейного планарного волновода в трехмерной задаче. В случае нелинейных поверхностных волн на одной границе раздела такие исследования недавно были проведены в работе [8].

В данной работе мы рассмотрели три вопроса, касающиеся устойчивости волн в нелинейном симметричном планарном волноводе. Во-первых, методом, развитым в работе [8] применительно к нелинейным поверхностным волнам, мы исследовали устойчивость  $TE_0$ -моды нелинейного симметричного волновода в двумерной задаче. Во-вторых, показали, что знание линейных функций возмущения двумерной задачи дает возможность предсказать дальнейшую эволюцию волноводных мод за рамками линейного приближения, что важно для интерпретации результатов, полученных при численном моделировании решений параболического уравнения [4-7]. В третьих, мы рассмотрели вопрос об устойчивости  $TE_0$ -моды нелинейного планарного волновода в трехмерной задаче.

# 1. Линейная теория устойчивости

Рассмотрим симметричный планарный волновод, несущий слой которого толщиной  $2d$  обладает линейной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_L$ , а обкладки — нелинейной проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha |E|^2$  [1]. В нижеследующих выкладках будем исходить из параболического уравнения для медленно меняющейся амплитуды поля [3] ( $E_y \sim Ae^{i\mu x}$ )

$$2inA_x + A_{zz} - q^2(z)A + g(z)|A|^2A = 0, \quad (1)$$

где  $n$  — эффективный показатель преломления, функции  $q^2(z)$  и  $g(z)$  определяются соотношениями ( $q_L^2 = n^2 - \varepsilon_L$ ,  $q_{NL}^2 = n^2 - \varepsilon_0$ )

$$q^2(z) = \begin{cases} q_L^2 & \text{при } |z| < d, \\ q_{NL}^2 & \text{при } |z| > d, \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| < d, \\ 1 & \text{при } |z| > d. \end{cases} \quad (2)$$

Сохраняющейся величиной для любых решений уравнения (1) является интеграл

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dz. \quad (3)$$

Стационарное ( $A_x = 0$ ) решение уравнения (1) для рассматриваемой структуры можно записать в виде

$$A_0(z) = \begin{cases} 2^{1/2} q_{NL} \operatorname{ch}^{-1}(q_{NL}(z - z_1)) & \text{при } z < -d, \\ C \operatorname{ch}(q_L(z - d_0)) & \text{при } |z| < d, \\ 2^{1/2} q_{NL} \operatorname{ch}^{-1}(q_{NL}(z - z_2)) & \text{при } z > d, \end{cases} \quad (4)$$

где  $z_1$ ,  $z_2$  и  $d_0$  — параметры, связь между которыми приведена в работе [1].

Для  $TE_0$ -моды имеем  $d_0 = 0$ ,  $z_2 = -z_1 = z_0$ ,  $C = 2^{1/2} q_{NL} \operatorname{ch}^{-1}(q_L d) \operatorname{ch}^{-1}(q_{NL}(d - z_0))$ . В случае  $\varepsilon_0 < n^2 < \varepsilon_L$  величина  $q_L = (n^2 - \varepsilon_L)^{1/2} = iQ_L$ , и функция  $\operatorname{ch}(q_L z)$  в (4) переходит в  $\cos(Q_L z)$ , так что всю дисперсионную кривую можно описать едиными формулами, если считать  $q_L$  комплексным. Дисперсионное соотношение для решения (4) имеет вид

$$\operatorname{th} q_{NL}(z_0 - d) = (q_L / q_{NL}) \operatorname{th}(q_L d). \quad (5)$$

Соответствующие дисперсионные кривые, рассчитанные для случая  $\varepsilon_0 = 2.25$ ,  $\varepsilon_L = 4.0$ ,  $2d/\lambda = 0.4$  и  $0.6$ , приведены на рис. 1.

Для исследования устойчивости представим решение уравнения (1) в виде

$$A(x, z) = A_0(z) + \mu f(x, z), \quad (6)$$

где  $f(x, z)$  — возмущение стационарного решения  $A_0(z)$ ,  $\mu$  — малый параметр.

Подставляя (6) в уравнение (1) и выделяя слагаемые первого порядка по  $\mu$ , получим для функции возмущения следующее уравнение:

$$2i\mu f_x + f_{zz} - q^2(z)f + g(z)A_0^2(z)(2f + f^*) = 0. \quad (7)$$

Выделим экспоненциальную зависимость от  $x$  и представим функцию  $f(x, z)$  в виде

$$f(x, z) = \frac{1}{2} ((u + v) \exp(\delta x) + (u^* - v^*) \exp(\delta^* x)), \quad (8)$$

где функции  $u$  и  $v$  зависят только от  $z$ . Подставляя (8) в (7), получим, что эти функции должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{zz} - q^2(z)u + 3g(z)A_0^2(z)u &= -i\xi'r, \\ v_{zz} - q^2(z)v + g(z)A_0^2(z)v &= -i\xi'u, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\xi' = 2n\delta$ .

Отметим некоторые свойства функций  $u$ ,  $v$  и собственного значения  $\delta$ , которые полезно иметь в виду при дальнейшем анализе. Собственное значение  $\pm\delta$  системы (9) является либо действительным, либо чисто мнимым. В случае действительного  $\pm\delta$  выбором фазового множителя можно сделать функцию  $u = u_0$  действительной, а функцию  $v = iv_0$  чисто мнимой. Тогда при  $x=0$  функция возмущения представляется в виде  $f(x, z) = f_0(z) = u_0(z) + iv_0(z)$ . При этом функция  $u_0(z)$  ортогональна к  $A_0(z)$ . Существенно, что двум собственным значениям  $\pm\delta$  и  $-\delta$  соответствуют две комплексно сопряженные собственные функции  $f_0$  и  $f_0^*$ , так что, если существует некоторое нарастающее возмущение  $f(x, z)$ , очевидно, имеется и обратное  $f^*(x, y)$ , сходящееся к нулю решение. Этот факт имеет важное значение в теории возбуждения нелинейных волн [3]. Если положить  $\delta^2 = 0$ , то второе из уравнений системы (9) при любых  $n$  имеет решение  $v_0 = A_0$ , а первому уравнению удовлетворяет функция  $u_0 = dA_0/dz$ , но только при дискретных  $n$ , поскольку в общем случае производная  $d^2A_0/dz^2$  терпит разрыв на границах раздела. Знание решений (9) при  $\delta^2 = 0$  позволяет найти в ряде случаев (но далеко не во всех) границы устойчивости мод.

Для нелинейной среды систему уравнений (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u'' - u + \frac{6}{\text{ch}^2 \hat{z}} u &= -i\xi'r, \\ v'' - v + \frac{2}{\text{ch}^2 \hat{z}} v &= -i\xi'u, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\hat{z} = q_{NL}(z - z_0)$ ,  $\xi = \xi'/q_{NL}^2$ , штрихи означают производную по  $\hat{z}$ .

Решение системы (10), убывающее при  $\hat{z} \rightarrow \infty$ , было найдено в работе [3]

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{-p\hat{z}} (-i\xi + 2p \text{th} \hat{z} + 2 \text{th}^2 \hat{z}) + C_2 e^{-p^* \hat{z}} (i\xi + 2p^* \text{th} \hat{z} + 2 \text{th}^2 \hat{z}), \\ v &= C_1 e^{-p\hat{z}} (2 - i\xi + 2p \text{th} \hat{z}) - C_2 e^{-p^* \hat{z}} (2 + i\xi + 2p^* \text{th} \hat{z}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $p = (1 - i\xi)^{1/2}$ ;  $C_1$  и  $C_2$  — константы, которые должны определяться из граничных условий. Решение в области  $z < -d$  отличается от (11) знаком перед аргументом  $\hat{z}$ .

В линейной среде система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} u'' - (q_L/q_{NL})^2 u &= -i\xi'r, \\ v'' - (q_L/q_{NL})^2 v &= -i\xi'u, \end{aligned} \quad (12)$$

где аргументом функций служит переменная  $\bar{z} = q_{NL}z$ . Поскольку  $A_0(z)$  — функция четная, то можно несколько упростить задачу и отдельно искать четные и нечетные функции возмущения, что дает возможность ограничиться анализом уравнения с определителем 4-го порядка (для несимметричных решений дисперсионное уравнение задается равенством нулю определителя 8-го порядка). В соответствии с этим в области  $|z| < d$  для четных решений системы (12) имеем

$$\begin{aligned} u &= A_1 \text{ch}(s\bar{z}) + A_2 \text{ch}(s^*\bar{z}), \\ v &= A_1 \text{ch}(s\bar{z}) - A_2 \text{ch}(s^*\bar{z}), \end{aligned} \quad (13)$$

а для нечетных

$$\begin{aligned} u &= B_1 \text{sh}(s\bar{z}) + B_2 \text{sh}(s^*\bar{z}), \\ v &= B_1 \text{sh}(s\bar{z}) - B_2 \text{sh}(s^*\bar{z}). \end{aligned} \quad (14)$$

Приравнявая функции и их производные в плоскости  $z=d$ , получим дисперсионное соотношение для определения  $\xi$  четных мод

$$|2sF_2 - (F_3^* - F_1) \operatorname{cth}(q_{NL}sd)|^2 - |(F_3 + F_1^*) \operatorname{cth}(q_{NL}sd) - 2s(b^2 - 1)|^2 = 0, \quad (15)$$

где

$$s = (q_L^2/q_{NL}^2 - i\xi)^{1/2}, \quad b = \operatorname{th}(q_{NL}(z_0 - d)),$$

$$F_1 = -i\xi p - 2p^2b + 2pb^2,$$

$$F_2 = (p - b)^2,$$

$$F_3 = (2 - i\xi)p^* - 2p^2b - 4p^*b^2 + 4b^3.$$

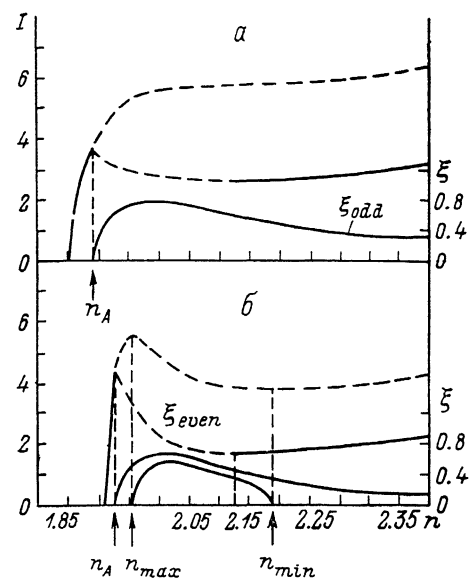


Рис. 1. Зависимость интеграла  $I$  и нормированного инкремента нарастания неустойчивости  $\xi$  от  $n$  для четной и нечетной функций возмущения  $TE_0$ -моды симметричного волновода при  $\varepsilon_0 = 2.25$ ,  $\varepsilon_L = 4.0$ .

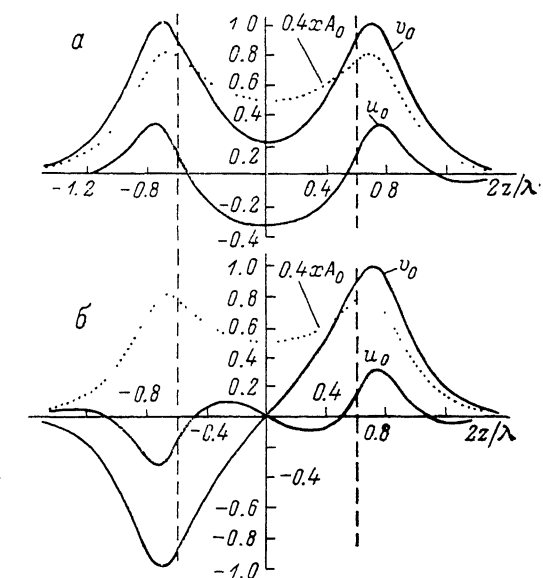


Рис. 2.

Пунктир — (в масштабе 5 : 2) распределение поля  $TE_0$ -моды.

Для нечетных мод дисперсионное соотношение в тех же обозначениях имеет вид

$$|2sF_2 - (F_3^* - F_1) \operatorname{th}(q_{NL}sd)|^2 - |(F_3 + F_1^*) \operatorname{th}(q_{NL}sd) - 2s(b^2 - 1)|^2 = 0. \quad (16)$$

При нахождении собственных функций удобно положить  $A_2 = A_1^*$ ,  $B_2 = B_1^*$ ,  $C_2 = C_1^*$ . Тогда  $u = u_0$ ,  $v = iv_0$ .

Рассмотрим сначала уравнение (15). Оно имеет решение  $\xi_0 = 0$  при любых  $|b| < 1$ , которое соответствует безразличноустойчивой моде возмущения ( $u_0 = 0$ ,  $v_0 = A_0$ ). При малых толщинах  $2d$ , когда зависимость  $I(n)$  монотонна (например,  $2d/\lambda = 0.4$  на рис. 1, а), уравнение (15) не имеет других корней. С увеличением толщины ( $2d/\lambda = 0.6$  на рис. 1, б) функция  $I(n)$  становится N-образной, и в области отрицательного наклона кривой  $I(n)$  уравнение (15) имеет действительный корень  $\xi_{\text{even}}(n)$ , обращающийся в нуль в точках  $n_{\text{max}}$  и  $n_{\text{min}}$ , где  $dI/dn = 0$ . На рис. 1, б наряду с кривой  $I(n)$  изображена зависимость  $\xi_{\text{even}}(n)$ , полученная численными методами из уравнения (15). На рис. 2, а приведена четная функция возмущения, рассчитанная нами при  $n = 2.07$ ,  $2d/\lambda = 0.6$ . Инкремент нарастания неустойчивости для нее  $\xi = 0.5045$ . . . Качественные особенности функции возмущения не меняются при изменении  $n$  в интервале  $n_{\text{max}} < n < n_{\text{min}}$ .

Четная функция возмущения при дальнейшей эволюции нелинейной волны оставляет исходное решение  $A_0(z)$  четным. Поэтому для  $TE_0$ -моды симметричной волноводной структуры критерий устойчивости  $dI/dn > 0$  действует только

на классе четных функций. Действительно, при численном моделировании решений уравнения (1) с начальным условием  $A(z) = A_0(z) + \mu f'_e(z)$ , где  $f'_e(z)$  — некоторая четная функция, мы обнаружили, что рост возмущения происходит только внутри интервала  $n_{\max} < n < n_{\min}$ . За пределами этого интервала стационарное распределение поля  $A_0(z)$  оставалось устойчивым до тех пор, пока не накапливалась ошибка и возмущение не становилось нечетным.

Однако в рассматриваемой области значений  $n$  существует и нечетная функция возмущения. В самом деле, уравнение (16) имеет действительный корень  $\xi_{\text{odd}}(n)$  при любых  $d$ , который обращается в нуль в точках  $b_1 = \sqrt{q_L^2 + q_{NL}^2} / (\sqrt{2} q_{NL})$  и  $b_2 = q_L / q_{NL}$ , что легко показать, исходя из формулы (16). Значение  $b = b_1$  (или  $n = n_A$ ) соответствует точке отщепления несимметричной моды  $A$  (при этом  $u_0 = dA_0/dz$ ,  $v_0 = 0$ ), а значение  $b = b_2$  достигается только при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. на правом конце области определения  $b$  ( $b \rightarrow 1$ ). Зависимость  $\xi_{\text{odd}}(n)$ , полученная численными методами из (16) для двух значений  $2d/\lambda$ , приведена на рис. 1. На рис. 2, б изображена нечетная функция возмущения при  $n = 2.07$  и  $2d/\lambda = 0.6$ . Для нее инкремент нарастания  $\xi = 0.536$ . . . Качественно вид функции возмущения одинаков везде в области  $n > n_A$ .

Нечетная функция возмущения выводит исходное распределение поля  $A_0(z)$  из класса четных функций. Поэтому, если не ограничиваться при исследовании эволюции поля классом четных функций, симметричная  $TE_0$ -мода оказывается устойчивой лишь до точки отщепления несимметричной моды  $A$ . На рис. 1 устойчивая ветвь дисперсионной кривой  $TE_0$ -моды представлена сплошной линией. Проведенное рассмотрение показывает, что, если одному  $n$  в волноводной структуре соответствует несколько различных мод, критерий устойчивости  $dI/dn > 0$  не действует, и необходим конкретный анализ устойчивости каждой ветви дисперсионной кривой вышеизложенным методом.

Полученный результат для устойчивости  $TE_0$ -моды согласуется с данными работы [4], в которой устойчивость исследовалась численным моделированием решений параболического уравнения (1) с начальным условием  $A(z) = A_0(z)$  при добавке случайного возмущения. Такой подход, однако, не может считаться удовлетворительным, поскольку при этом мы не будем знать исчерпывающей картины дальнейшей эволюции поля в результате развития неустойчивости.

## 2. Об эволюции неустойчивых мод волновода

Линейное приближение в теории устойчивости позволяет рассчитать инкремент нарастания неустойчивости  $\delta$ , что весьма важно для начальных оценок. Однако не менее важным является вопрос о том, что произойдет дальше, когда нельзя ограничиться слагаемыми, линейными по  $\mu$  в формуле (5). Покажем, что некоторые предсказания об эволюции неустойчивых мод можно сделать и на основе линейного приближения, если знать вид функций  $u_0(z)$  и  $v_0(z)$ . Действительно, добавка  $\mu u_0$  к  $A_0(z)$  показывает, каким образом изменится распределение поля волны в начальные моменты эволюции, а величина  $A_0(dv_0/dz)$  пропорциональна  $z$  — компоненте вектора Пойнтинга и указывает на направление последующего перераспределения энергии в поперечном сечении моды. Помимо этих соображений необходимо учесть еще возможность наличия нескольких мод возмущения и задаться определенным знаком  $\mu$  при каждой моде.

В случае симметричной  $TE_0$ -моды в интервалах  $n_A < n < n_{\max}$  и  $n_{\min} < n$  (или  $n_A < n < \infty$  при малых  $d$ ) существует лишь одна (нечетная) функция возмущения с ненулевым инкрементом и всего два пути эволюции стационарного решения  $A_0(z)$ , отличающиеся знаком  $\mu$ . Оба пути эволюции выводят исходную функцию  $A_0(z)$  из класса четных функций, и дальнейшая эволюция по этим двум путям из-за симметрии структуры одинакова с точностью до преобразования  $z \rightarrow -z$ .

Рассмотрим нечетную функцию возмущения и распределения поля  $TE_0$ -моды, изображенные на рис. 2, б. Приведенные выше соображения позволяют заключить, что при  $\mu > 0$  максимум  $TE_0$ -моды справа будет расти и сужаться, причем энергия поля будет втекать в эту область из линейного слоя и нелинейной среды справа от максимума. В то же время максимум слева будет убывать,

а энергия поля будет уходить в линейный слой, а также в нелинейную среду слева от максимума. Таким образом,  $TE_0$ -мода в процессе эволюции будет трансформироваться в несимметричную моду  $A$  (при  $\mu > 0$  с максимумом вблизи правой границы раздела) и пучок, уходящий в нелинейную среду с противоположной стороны от слоя. Эти рассуждения подтверждаются численными результатами работы [4]. Приведенные в этой работе графики зависимости поля от  $z$  при различных  $x$  показывают, что в точке дисперсионной кривой, где существует только нечетная функция возмущения,  $TE_0$ -мода с ростом  $x$  действительно становится несимметричной и трансформируется в нечетную моду  $A$ .

Более богатые возможности эволюции  $TE_0$ -моды открываются при больших толщинах, когда кривая  $I(n)$  становится  $N$ -образной. В этом случае в интервале значений  $n_{\max} < n < n_{\min}$ , где существуют одновременно четная и нечетная функции возмущения, решение  $A(x, z)$  на начальном этапе развития возмущений можно представить в виде

$$A(x, z) = A_0(z) + \mu_e f_{\text{even}} \exp(\xi_{\text{even}} x) + \mu_o f_{\text{odd}} \exp(\xi_{\text{odd}} x), \quad (17)$$

где  $\mu_e$  и  $\mu_o$  — малые начальные амплитуды функций возмущения.

Численное моделирование решений уравнения (1) удобно проводить с начальным условием (17) при  $x=0$ , поскольку функции  $f_{\text{even}}(z)$  и  $f_{\text{odd}}(z)$  мы можем найти, решая систему (9). Инкременты нарастания неустойчивости четной и нечетной функций возмущения (рис. 1) на значительном участке изменения  $n$  примерно одинаковы, и рост этих функций будет происходить почти с одинаковой скоростью. При этом эволюция симметричной  $TE_0$ -моды сильно зависит от начального соотношения амплитуд  $\mu_e$  и  $\mu_o$ .

Положим, например,  $\mu_o=0$  и ограничимся рассмотрением класса четных функций. Тогда опять существуют лишь два пути эволюции  $TE_0$ -моды, определяемые знаком  $\mu_e$ , каждый из которых можно описать, основываясь на рис. 2, а. При положительных  $\mu_e$  будет наблюдаться рост максимумов поля в нелинейной среде и трансформация исходного распределения поля в  $TE_0$ -моду с  $n > n_{\min}$ . В случае  $\mu_e < 0$  будет наблюдаться концентрация энергии внутри слоя, соответствующая переходу к устойчивой ветви нелинейных волн с  $n < n_A$ , и симметричное отщепление пучков с малой энергией в нелинейную среду.

В общем случае при  $\mu_e$  и  $\mu_o$ , отличных от нуля, для выяснения всех возможных путей эволюции  $TE_0$ -моды достаточно исследовать эволюцию поля при фиксированной амплитуде нечетной функции возмущения  $\mu_o$  и различных (включая изменение знака), значениях начальной амплитуды четной функции  $\mu_e$ . Задание начальных условий в виде (17) непосредственно с функциями возмущения позволяет избавиться от произвола результатов, получающихся при задании начальных условий со случайной функцией возмущения. Более того, мы будем знать вероятность получения того или иного конечного результата, если в начальных условиях со случайными возмущениями считать известной вероятность каждого значения отношения  $\mu_e/\mu_o$ .

### 3. Об устойчивости нелинейных мод в трехмерной задаче

Обратимся теперь к вопросу об устойчивости собственных мод нелинейного планарного волновода в трехмерной задаче. Для этого вместо (1) запишем полное волновое уравнение для медленно меняющейся функции  $A(x, y, z)$  с выделенной зависимостью от  $x$  вида  $\exp(ix)$

$$2inA_x + A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} - q^2(z)A + g(z)|A|^2A = 0. \quad (18)$$

Уравнение (1) следует из (18) при пренебрежении производной  $A_{xx}$  вследствие ее малости и пренебрежении зависимостью от координаты  $y$ .

Уравнение (18) может иметь множество стационарных (не зависящих от  $x$ ) решений. Одно из них — это распределение поля (4), являющееся также стационарным решением двумерной задачи. Ясно, однако, что в трехмерном случае решение (4) нефизично. Распределение поля, отвечающее реальной ситуации, представляет собой решение, убывающее до нуля на бесконечности как по оси  $z$ , так и по оси  $y$  (назовем такие решения полосковым и модами). Нахож-

дение таких решений сопряжено с большими трудностями вычислительного характера, поскольку аналитических формул для них не существует. Наши предварительные исследования показывают, что полученные выше результаты по устойчивости симметричного решения в двумерной задаче в трехмерном

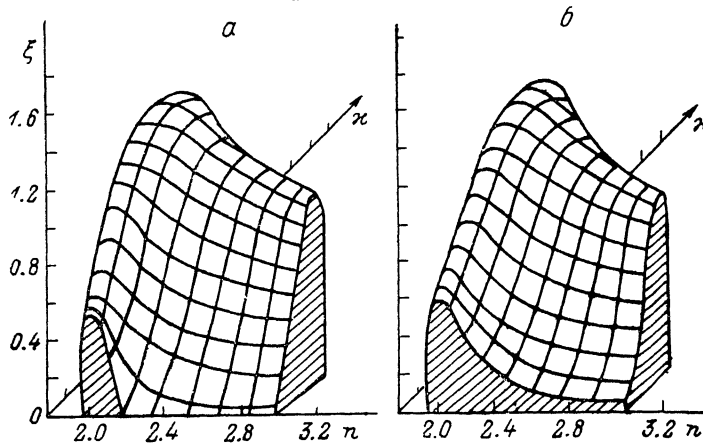


Рис. 3.

случае могут быть перенесены именно на случай полосковых мод. При этом характер дисперсионных кривых в случае полосковых мод качественно повторяет характер кривых на рис. 1, если вместо кубичной нелинейности использовать нелинейность насыщающегося типа.

В рамках данной работы, как и в [8], мы ограничимся исследованием устойчивости решения (4) относительно периодических по  $y$  возмущений. Для этого представим возмущение (8) в виде

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} ((u + v) \exp(\delta x + ixy) + (u^* - v^*) \exp(\delta^* x - ixy)), \quad (19)$$

где  $\kappa$  — пространственная частота возмущения.

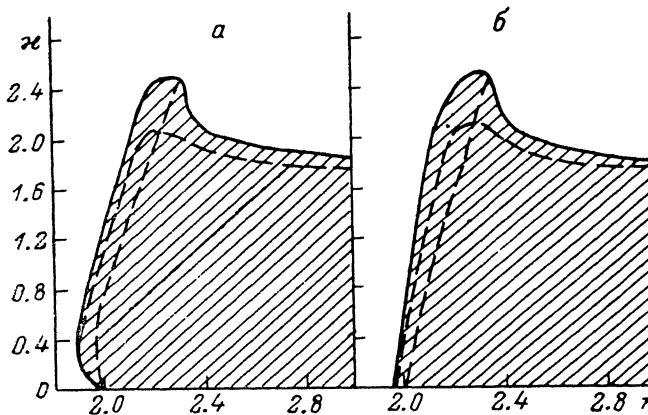


Рис. 4.

Тогда для функций  $u$  и  $v$  получим систему уравнений (9), где вместо  $q^2(z)$  необходимо подставить  $a^2(z) = q^2(z) + \kappa^2 - \delta^2$ .

Решения этой системы мы находили численными методами. На рис. 3 представлена зависимость инкремента нарастания возмущения от переменных  $\kappa$  и  $n$  для четных (а) и нечетных (б) по  $z$  функций возмущения. Параметры, использованные в расчетах, те же, что и для кривых на рис. 1. Из рис. 3 видно, что при  $\kappa=0$  зависимости  $\delta(n)$  для четной и нечетной функций возмущения аналогичны соответствующим кривым на рис. 1. Это свидетельствует о справед-

ливости параболического приближения, использовавшегося нами в разделе 1. Действительно, условия применимости параболического приближения  $A_{xx} \ll 2inA_x$  и  $A_{xx} \ll q^2(z)A$  (или  $\delta \ll 2n$  и  $\delta^2 \ll q^2(z)$ ) при выбранных нами параметрах удовлетворяются.

При ненулевых  $\kappa$  инкремент оказывается действительным и отличным от нуля как для четных, так и для нечетных функций возмущения. Поэтому решение (4) относительно трехмерных возмущений всегда неустойчиво, и в процессе распространения такой волны происходит ее разбиение на отдельные пучки. На рис. 4 изображены области в плоскости  $(n, \kappa)$ , где инкременты нарастания четных (а) и нечетных функций (б) возмущения действительны. Максимальные значения инкремента на этих графиках обозначены штриховыми линиями в двух ортогональных сечениях. Эти значения  $\kappa$  для каждого  $n$  позволяют определить наиболее вероятный размер пучков, на которые разбивается в процессе дальнейшей эволюции решение (4). Ясно, что стационарные решения уравнения (18), ограниченные по  $y$ , должны быть того же порядка величины.

### Заключение

Проведенные нами исследования позволили сделать следующие выводы.

В двумерной задаче  $TE_0$ -мода симметричного планарного волновода устойчива относительно четных возмущений на участках с положительным наклоном кривой зависимости интеграла энергии от эффективного показателя преломления и неустойчива на участке с отрицательным наклоном этой кривой.

При произвольном начальном возмущении в двумерной задаче  $TE_0$ -мода неустойчива в области значений эффективного показателя преломления, где существует несимметричная мода  $A$  (в соответствии с классификацией работы [1]).

В трехмерном случае  $TE_0$ -мода, являющаяся стационарным решением двумерной задачи, всегда неустойчива и разбивается на отдельные пучки, распространяющиеся вдоль поверхности волновода. Этот результат дает возможность предположить, что устойчивыми образованиями в трехмерной задаче будут полосковые моды, у которых поле убывает до нуля на бесконечности по двум координатам.

### Литература

- [1] Ахмедиев Н. Н. ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 2, с. 545—553.
- [2] Ахмедиев Н. Н. Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, № 9, с. 571—574.
- [3] Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Кузьменко Ю. В. ЖЭТФ, 1985, т. 88, № 1, с. 107—115.
- [4] Moloney J. V., Ariyasu J., Seaton C. T., Stegeman G. I. Appl. Phys. Lett., 1986, v. 48, N 10, p. 826—829.
- [5] Leine L., Wachter Ch., Langbein U., Lederer F. Opt. Lett., 1986, v. 11, N 9, p. 590—592.
- [6] Moloney J. V., Seaton C. T., Stegeman G. I. Opt. Lett., 1986, v. 11, N 5, p. 315—317.
- [7] Ariasu J., Seaton C. T., Stegeman G. I. IEEE J. Quant. Electron., 1986, v. QE-22, N 6, p. 984—987.
- [8] Высотина Н. В., Розанов Н. Н., Смирнов В. А. ЖТФ, 1987, т. 57, № 1, с. 173—175.

Московский институт  
электронной техники

Поступило в Редакцию  
2 октября 1987 г.