

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬСОТРОНА

Г. А. Шнеерсон

Для расчета электромагнитного ускорения или торможения тела заданной массы в приближении теории цепей предложен обратный метод решения задачи: расчет зависимости индуктивности от координаты $L(x)$ по заданной зависимости от времени тока i либо потока Li либо по известной функции $x(t)$.

Решение обратной задачи сводится к квадратурам. Для простых функций $i(t)$ (степенная, экспоненциальная и некоторые другие) найдены законы изменения индуктивности $L(x)$ и получены соотношения, позволяющие связать начальные и конечные значения параметров. Расчеты выполнены для рельсотрона, присоединенного к емкостному или индуктивному накопителю.

На примере показано, что при питании рельсотрона от емкостного накопителя одна и та же зависимость $x(t)$ может иметь место при различных $L(x)$.

Начиная с работы Л. А. Арцимовича и др. [1] электротехническая модель рельсотрона широко используется при описании процессов в устройствах для ускорения плазменных сгустков и твердых проводников электромагнитными силами [2-8]. Эта же модель описывает и обратный процесс торможения тела, сопровождающийся переходом кинетической энергии в энергию магнитного поля [9].

В электротехнической модели принимается, что движущийся проводник массы m замыкает два неподвижных проводника. В случае ускорения проводники присоединены к источнику энергии — емкостному или индуктивному накопителю. При торможении проводники замкнуты на некоторую нагрузку, и в начальный момент в цепи создается ток, который далее растет при уменьшении индуктивности (рис. 1).

В настоящее время опубликовано много работ, посвященных теории рельсотрона (например, [1, 3-5]), в которых при соответствующих начальных условиях решается система уравнений

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(Li) = u_n, \quad (2)$$

где $L(x)$ — индуктивность, мгновенное значение которой определяется положением тела; i — ток; x — координата тела; u_n — напряжение на зажимах источника или нагрузки, однозначно связанное с током. Путем решения дифференциальных уравнений (1), (2) определяются неизвестные функции $x(t)$ и $i(t)$.¹

Целью данной работы является решение обратной задачи — найти такое распределение индуктивности на единицу длины, при котором ток в цепи или поток Li будут изменяться заданным образом.

При решении обратной задачи расчеты сводятся к квадратурам и отпадает необходимость в численном решении дифференциальных уравнений. Возможна

¹ Обычно $L(x) = L_0 + L'x$, где $L' = \text{const}$.

и другая постановка обратной задачи: найти $L(t)$ и $i(t)$ при заданной зависимости $x(t)$. В такой постановке задача, вообще говоря, не сводится к квадратурам. В последнем разделе статьи рассмотрен пример, когда и в этом случае удается получить простое решение.

Как и в работе [8], индуктивность представляется в виде зависимости от времени $L[x(t)] = L(t)$.

Умножая (1) на dx/dt , находим после двукратного интегрирования

$$x(t) = x_0 + v_0 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{mv_0^2} \int_0^t i^2 \frac{dL}{dt_1}(t_1) dt_1} dt \quad (3)$$

или, используя соотношения работы [10], имеем

$$x(t) = x_0 + v_0 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{2}{mv_0^2} \int_0^t \left[i \frac{d(Li)}{dt_1} - \frac{d}{dt_1} \left(\frac{Li^2}{2} \right) dt_1 \right] dt_1} dt. \quad (4)$$

Здесь x_0 и v_0 — значения координаты и скорости в момент $t=0$.

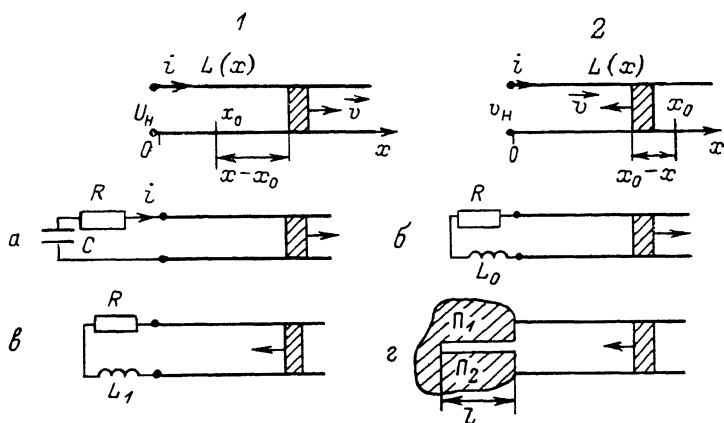


Рис. 1. Электротехническая модель рельсотрона.

1 — ускорение тела, 2 — торможение тела. а — рельсотрон, подключенный к емкостному накопителю; б — ускорение тела в цепи индуктивного накопителя; в — торможение тела в цепи индуктивного накопителя; г — торможение тела в рельсотроне, замкнутом на бифиляр.

Зависимость индуктивности от времени $L(t)$ можно найти, поскольку в общем случае при заданном $i(t)$ известно $u_H(t)$, и из уравнения (2) получаем

$$L(t) = \frac{1}{i} \left[\int_0^t u_H dt + (Li)_0 \right]. \quad (5)$$

Уравнения (3), (4), (5) дают в параметрическом виде зависимость $L(x)$, при которой ток в цепи равен $i(t)$.

Найденное таким путем решение имеет физический смысл лишь в том случае, когда неотрицательно подкоренное выражение в формулах (3), (4), пропорциональное кинетической энергии тела, и $dL/dx \geq 0$. В противном случае заданная зависимость $i(t)$ не может быть реализована в рассматриваемой цепи с переменной индуктивностью.

При расчетах режимов ускорения естественно задавать ток (или поток Li), однозначно связанный с током уравнением (5) в виде удобных для вычисления простых функций времени (в основном степенных и экспоненциальных), зависящих от параметров. Меняя как вид этих функций, так и параметры, можно найти выражения для профиля рельсотрона $L(x)$, пригодные для аппроксимации заданных функций $L(x)$, отличных от простейшей зависимости $L = L_0 + L'x$

Что касается режима торможения, то обратная задача возникает при анализе работы рельсотрона как источника тока, работающего на заданную нагрузку.

Ниже даны примеры решения обратной задачи как для режима ускорения, так и для режима торможения.

1. Рельсотрон, питаемый от конденсаторной батареи

При питании рельсотрона от емкостного накопителя энергии u_n выражается известным образом

$$u_n(t) = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt, \quad (6)$$

где U_0 — начальное напряжение батареи, C — ее емкость (рис. 1, а при $R=0$).

Ограничимся лишь режимами с нулевыми начальными условиями ($x_0=0$, $v_0=0$). Вначале рассмотрим наиболее простой случай $C=\infty$ (источник бесконечной мощности). Из уравнений (4), (5), (6) находим

$$L(t) = \frac{U_0 t}{i}, \quad (7)$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{U_0}{m}} \int_0^t \sqrt{2 \int_0^{t_1} i(t_1) dt_1 - i(t)t} dt. \quad (8)$$

Пусть

$$i(t) = At^\alpha, \quad (9)$$

тогда

$$x(t) = \frac{2}{3+\alpha} \left[\frac{AU_0(1-\alpha)}{m(1+\alpha)} \right]^{1/2} t^{\frac{3+\alpha}{2}}, \quad (10)$$

и поскольку

$$L(t) = (U_0/A)t^{1-\alpha},$$

получаем

$$L(x) = \frac{U_0}{A} \left[\frac{m(1+\alpha)}{U_0 A (1-\alpha)} \right]^{\frac{1-\alpha}{3+\alpha}} \left(\frac{3+\alpha}{2} x \right)^{\frac{2(1-\alpha)}{3+\alpha}} \quad (11)$$

Иначе говоря, если $L(x) = Bx^\beta$, то для параметров A и α имеем

$$\alpha = \frac{2-3\beta}{2+\beta}, \quad (12)$$

$$A = U_0^{\frac{2-\beta}{2+\beta}} B^{\frac{-2}{2+\beta}} \left(m \frac{2-\beta}{23} \right)^{\frac{\beta}{2+\beta}} \left(\frac{4}{2+\beta} \right)^{\frac{2\beta}{2+\beta}}. \quad (13)$$

Решение, при котором $dL/dx > 0$ и конечен заряд, перенесенный в цепи за конечное время, имеет место, когда $-1 < \alpha < 1$ или $2 > \beta > 0$. В частности, если $\alpha=0$ (постоянный ток), то $\beta=2/3$.

Рассмотрим далее условия, при которых ток в цепи рельсотрона будет изменяться по степенному закону (9) при конечной величине емкости C . Используя (5), (6), находим

$$L = \frac{U_0}{A} t^{1-\alpha} - \frac{t^2}{C(1+\alpha)(2+\alpha)}, \quad (14)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{(1-\alpha)U_0 t}{A} - \frac{2t}{C(1+\alpha)(2+\alpha)}, \quad (15)$$

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{A}{m} \left[\frac{U_0(1-\alpha)}{1+\alpha} - \frac{At^{1+\alpha}}{C(1+\alpha)^2(2+\alpha)} \right]} t^{\frac{1+\alpha}{2}} dt. \quad (16)$$

Как и в предыдущем случае, решение имеет смысл, если $-1 < \alpha < 1$. В момент

$$t_m = t = [CU_0(1 - \alpha^2)(2 + \alpha)/2A]^{1/(1+\alpha)}$$

индуктивность достигает максимума и ускорение тела прекращается. Для задачи ускорения проводника представляет интерес лишь интервал $0 \leq t \leq t_m$. Простые вычисления дают следующие значения кинетической энергии тела, а также энергии электрического и магнитного полей в момент прекращения ускорения:

$$W_k(t_m) = \frac{mv^2(t_m)}{2} = \frac{CU_0^2(1 - \alpha)^2(2 + \alpha)}{8}, \quad W_e(t_m) = \frac{CU_0^2}{8}(1 + \alpha)^2(1 - \alpha)(2 + \alpha),$$

$$W_c(t_m) = \frac{CU_0^2\alpha^2(1 + \alpha)^2}{8}. \quad (17)$$

Коэффициент преобразования энергии $\eta = mv_m^2/CU_0^2$ монотонно убывает от значений, близких к единице, при $\alpha = -1$ до нуля при $\alpha = 1$. Первое из этих значений соответствует ускорению на пути бесконечной длины, второе — предельному случаю, когда путь ускорения стремится к нулю.

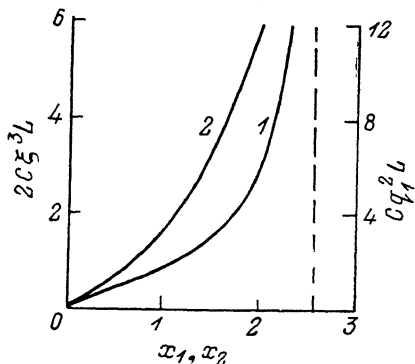
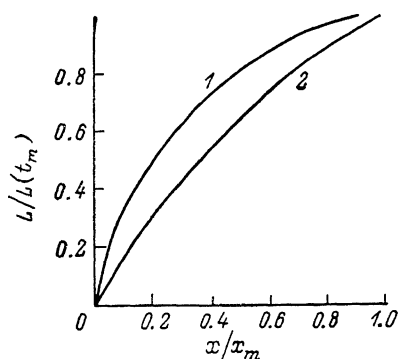


Рис. 2. Зависимости индуктивности от координаты в рельсотроне, в котором ток не меняется во времени (1) или меняется пропорционально $t^{-2/3}$ (2).

Рис. 3. Зависимости индуктивности от координаты при изменении потока по закону $Li = (U_0/\xi) \exp(-\xi t) \sin(\xi t)$ (1) и при затухании тока по экспоненте (2) для рельсотрона, подключенного к емкостному накопителю, $x_1 = 2\xi (m/CU_0^2)^{1/2}x$; $x_2 = q_1 (m/CU_0^2)^{1/2}x$.

В частном случае $\alpha = 0$ (постоянный ток $i = i_0 = A$) получаем следующие выражения для $L(t)$, η и $x(t)$:

$$L = \frac{U_0 t}{i_0} - \frac{t^2}{2C}, \quad \eta(t_m) = \frac{1}{2},$$

$$x(t) = \frac{U_0^2 C^{3/2}}{2i_0} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} [z(2z^2 - 1)\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z], \quad (18)$$

где

$$z = \sqrt{i_0 t / 2CU_0}.$$

Величина dL/dx обращается в нуль при $x = x_m = \pi U_0^2 C^{3/2} (2m)^{-1/2} / 4i_0$, когда $L(t_m) = CU_0^2 / 2i_0^2$.

В другом частном случае $\alpha = -1/3$,

$$L(t) = \frac{U_0 t^{1/3}}{A} - \frac{9t^2}{10C}, \quad \eta(t_m) = \frac{20}{27},$$

$$x(t) = \frac{640}{\sqrt{729}} U_0^{1/2} C_0^2 A^{-3/2} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{27At^{2/3}}{40CU_0}\right) \left(1 - \frac{27At^{2/3}}{40CU_0}\right)^{3/2}\right]. \quad (19)$$

Зависимости $L(x)$ для частных случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = -1/3$ представлены на рис. 2.

В отличие от рассмотренных в следующем примере индуктивность возрастает до бесконечности на конечном пути ускорения, т. е. в конце пути имеет место разрыв цепи.

В этом случае примем $Li = De^{-\xi t} \sin \xi t$, тогда

$$\frac{d}{dt}(Li) = De^{-\xi t}(\cos \xi t - \sin \xi t) = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t idt,$$

откуда

$$U_0 = [(d/dt)(Li)]_{t=0} = D\xi. \quad (20)$$

Далее,

$$i = -C \frac{d^2(Li)}{dt^2} = 2C\xi U_0 \exp(-\xi t) \cos \xi t, \quad (21)$$

$$L = \frac{\text{tg}(\xi t)}{2C\xi^2}, \quad v = \sqrt{\frac{CU_0^2}{m}(1 - e^{-2\xi t})}, \quad x(t) = \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{CU_0^2}{m}} \Psi(2\xi t), \quad (22)$$

где

$$\Psi(z) = 2[\text{Arch} e^{-z/2} - \sqrt{1 - e^{-z}}]. \quad (23)$$

В точке $x = x_1 = (1/2\xi)(CU_0^2/m)^{1/2} \Psi(\pi)$ индуктивность терпит разрыв. Это имеет место в момент $t_1 = \pi/2\xi$ (рис. 3). Следует отметить, что в момент t_1 $(d/dt)(Li) = U_0 \exp(-\pi/2)$, т. е. несмотря на разрыв цепи, напряжение на нагрузке остается конечным. Коэффициент преобразования энергии в момент t_1 есть $\eta(t_1) = 1 - \exp(-\pi)$.

Рассмотрим также систему, в которой ток экспоненциально затухает: $i = U_0 q_1 C \exp(-q_1 t)$. В этом случае

$$Li = \frac{U_0}{q_1} [1 - \exp(-q_1 t)], \quad L = \frac{\exp(q_1 t) - 1}{Cq_1^2}, \quad (24)$$

$$v = \frac{U_0 \sqrt{C}}{\sqrt{m}} \sqrt{1 - \exp(-q_1 t)}, \quad x(t) = \sqrt{\frac{CU_0^2}{m}} \frac{\Psi(q_1 t)}{q_1}. \quad (25)$$

Этот режим имеет место в рельсотроне неограниченной длины, в которой индуктивность экспоненциально растет при $x \rightarrow \infty$

$$L(x) \rightarrow (1/4Cq_1^2) \exp[2 + xq_1(m/2W_0)^{1/2}],$$

где $W_0 = CU_0^2/2$ — начальная энергия накопителя.

Как видно из сравнения формул (22) и (25), несмотря на различный характер зависимости $L(x)$ в двух последних примерах,² функции $x(t)$ совпадают при $q_1 = 2\xi$. Отсюда следует, что выбор зависимости $L(x)$ для получения заданного закона движения тела в рельсотроне, вообще говоря, неоднозначен.

В рассмотренных примерах начальная индуктивность контура была равна нулю. Такое приближение допустимо, если полное изменение индуктивности на участие ускорения много больше начальной.

2. Разгон и торможение тела при условии постоянства потока

Этот случай является наиболее простым для расчета. При условии $Li = \Phi_0 = \text{const}$ формула (4) переходит в следующее выражение для $x(t)$:

$$x(t) = x_0 \pm \int_0^t \sqrt{v_0^2 + \frac{\Phi_0}{m}(i_0 - i)} dt, \quad (26)$$

где i_0 — начальное значение тока.

Режиму ускорения соответствует схема рис. 1, б при $R=0$. При нулевых начальных условиях ($x_0=0$, $v_0=0$) и изменении тока по закону $i=i_0[1 - (t/t_m)^n]$ получаем

² Кривые $L(x)$ представлены на рис. 3.

$$x(t) = \sqrt{\frac{i_0 \Phi_0}{m} \frac{2t_m}{2+\gamma} \left(\frac{t}{t_m}\right)^{\frac{2+\gamma}{2}}}. \quad (27)$$

Исключая время в выражении для индуктивности

$$L(t) = \frac{\Phi_0}{i_0} \left[1 - \left(\frac{t}{t_m}\right)^\gamma\right]^{-1} \quad (28)$$

находим явную зависимость $L(x)$

$$L(x) = \frac{L_0}{1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^{\frac{2\gamma}{2+\gamma}}}, \quad (29)$$

где

$$x_m = \frac{2t_m i_0}{2+\gamma}, \quad L_0 = \frac{\Phi_0}{i_0}.$$

В случае экспоненциального затухания тока, когда $i = i_0 \exp(-q_2 t)$, $L(t) = L_0 \exp(q_2 t)$, при $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ имеем

$$x(t) = \sqrt{\frac{\Phi_0 i_0}{m}} \int_0^t \sqrt{1 - \exp(-q_2 t)} dt = i_0 \sqrt{\frac{L_0}{m}} \frac{\Psi(q_2 t)}{q_2}, \quad (30)$$

т. е. координата изменяется по такому же закону, как и в рассмотренном выше случае цепи $L-C$ с экспоненциально затухающими током, и $x(t)$ можно найти по формуле (25), заменив в ней CU_0^2 и q_1 на $i_0 \Phi_0$ и q_2 . Зависимость $L(x)$ в этом случае при больших x близка к рассчитанной по формулам (24), (25). В частности, при $t \rightarrow \infty$ $L(x)$ экспоненциально растет

$$L(x) \rightarrow L_0 \exp\left(q_2 x \sqrt{\frac{m}{2W_0}}\right), \quad (31)$$

где $W_0 = (i_0 \Phi_0)/2$ — начальная энергия системы. Близость процессов в цепи $L-C$ и в рассматриваемом примере объясняется тем, что при экспоненциальном росте индуктивности поток в случае цепи $L-C$ стремится к постоянному значению, как показывает формула (24).

В режиме торможения при постоянном потоке $L|_{i=0} = L(x_0) = L_0$. Здесь мы будем рассматривать лишь движение до остановки, пока кинетическая энергия переходит в энергию магнитного поля при монотонно возрастающем токе. Простые расчеты [11], основанные на сохранении полной энергии системы при $\Phi = \text{const}$, позволяют найти ток и индуктивность L_1 в момент остановки t_1 , когда $v = 0$

$$i_1 = \frac{mv_0^2 + \Phi_0 i_0}{\Phi_0}, \quad L_1 = \frac{L_0}{1 + \frac{mv_0^2}{\Phi_0 i_0}}. \quad (32)$$

В качестве примера рассчитаем рельсотрон, в котором ток и индуктивность меняются от начальных значений i_0 , L_0 до конечных i_1 , L_1 по законам

$$i(t) = i_0 + \frac{mv_0^2}{\Phi_0} \left(\frac{t}{t_1}\right)^\nu, \quad L(t) = \frac{L_0}{1 + \frac{mv_0^2}{\Phi_0 i_0} \left(\frac{t}{t_1}\right)^\nu}. \quad (33)$$

Тогда, согласно (26),

$$x(t) = x_0 - v_0 \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t_1}\right)^\nu} dt \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (34)$$

Легко найти полное изменение координаты x

$$\Delta x = x_0 - x(t_1) = \frac{v_0 t_1 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \frac{3}{2}\right)}. \quad (35)$$

В частных случаях $\nu=1$ и $\nu=2$ находим в явном виде $x(t)$

$$x(t) = x_0 - \frac{2\nu_0 t_1}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_1} \right)^{3/2} \right] \text{ при } \nu=1, \quad (36)$$

$$x(t) = x_0 - \frac{\nu_0 t_1}{2} \left[\left(\frac{t}{t_1} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t_1} \right)^2} + \arcsin \frac{t}{t_1} \right] \text{ при } \nu=2. \quad (37)$$

На рис. 4 представлены кривые $L(x)$ для этих двух частных случаев. При экспоненциальном нарастании тока

$$i(t) = \left(i_0 + \frac{mv_0^2}{\Phi_0 i_0} \right) \exp[g(t-t_1)] = i_1 \exp[g(t-t_1)], \quad (38)$$

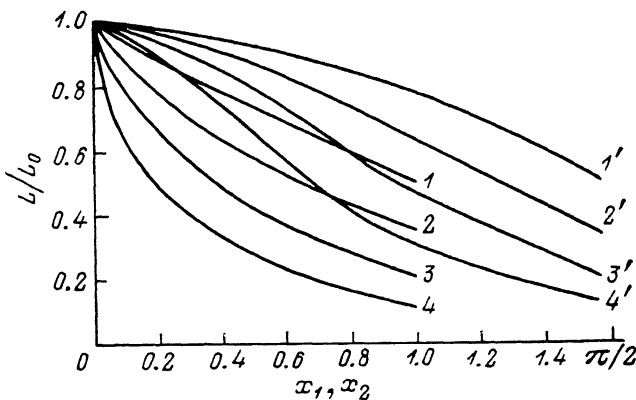


Рис. 4. Зависимости $L/L_0=f(x_1)$ (1-4) и $L/L_0=f(x_2)$ (1'-4') для режима торможения тела, когда ток растет по законам $i/i_0=1+At/t_1$ и $i/i_0=1+A(t/t)^2$. Кривые соответствуют различным значениям параметра A .

1, 1' - 1; 2, 2' - 2; 3, 3' - 4; 4, 4' - 8. $x_1=(3/2)(x_0-x)/v_0 t_1$; $x_2=2(x_0-x)/v_0 t_1$.

$$L(t) = \frac{L_0}{1 + \frac{mv_0^2}{\Phi_0 i_0}} \exp[-g(t-t_1)], \quad (39)$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0}{g} \sqrt{1 + \frac{\Phi_0 i_0}{mv_0^2}} \{ \Psi(gt_1) - \Psi[g(t_1-t)] \}. \quad (40)$$

Соответствующая зависимость $L(x)$ представлена на рис. 5 (кривая 1).

3. Режим ускорения и торможения при наличии потерь в цепи рельсотрона, подключенного к индуктивному накопителю

В данном разделе рассматриваются режимы, при которых имеет место уменьшение потока из-за активного сопротивления цепи. Вначале рассмотрим схему, в которой последовательно с индуктивностью включено сосредоточенное сопротивление R (рис. 1, ϵ). Эта схема представляет интерес, в частности, при изучении работы рельсотрона как источника энергии, питающего активную нагрузку.

Напряжение и ток в начале цепи (в точке $x=0$) связаны в рассматриваемом случае соотношением

$$u_n(t) = \frac{d}{dt}(Li) = -Ri. \quad (41)$$

С учетом этого равенства формула (4) дает

$$x(t) = x_0 + v_0 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{mv_0^2} \left(L_0 i_0^2 - Li^2 - 2R \int_0^t i^2 dt_1 \right)} dt. \quad (42)$$

Последнее соотношение следует непосредственно из баланса энергии.

В первом примере найдем профиль рельсотрона, в котором при ускорении тела ток падает по экспоненте. Как и в первом примере раздела 2, $i = i_0 \exp(-q_2 t)$. Из уравнения (41) следует

$$L(t) = (L_0 - R/q_2) \exp(-q_2 t) + R/q_2$$

и далее после простых вычислений находим

$$x = x_0 + v_0 \sqrt{1 + \frac{L_0 i_0^2}{m v_0^2} \left(1 - \frac{R}{L_0 q_2}\right)} \frac{1}{q_2} [\Psi(q_2 t + \tau_1) - \Psi(\tau_1)], \quad (43)$$

где

$$\tau_1 = \ln \left[1 - \frac{q_2 m v_0^2}{R i_0^2 (R - L_0 q_2)} \right].$$

Решение имеет смысл лишь при условии $L_0 > R/q_2$. При $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$ имеем ($\tau_1 = 0$)

$$x(t) = i_0 \sqrt{\frac{L_0}{m}} \frac{1}{q_2} \Psi(q_2 t) \sqrt{1 - \frac{R}{L_0 q_2}}, \quad (44)$$

т. е. зависимость $x(t)$ совпадает с (30), если в этой формуле заменить L_0 на $L_0 - R/q_2$.

В качестве другого примера найдем условия, при которых ток в цепи при торможении тела остается постоянным, несмотря на уменьшение индуктивности. Из условия (41) при $i = i_0 = \text{const}$ следует $L = L_0 - Rt$, где L_0 — начальное значение индуктивности. Равенство (42) дает

$$x = x_0 - \frac{2m v_0^3}{3i_0^2 R} \left[1 - \left(1 - \frac{R i_0^2 t}{m v_0^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (45)$$

Скорость обращается в нуль в момент $t_1 = m v_0^2 / i_0^2 R$, когда

$$x = x_1 = x_0 - \frac{2m v_0^3}{3i_0^2 R}, \quad L = L_1 = L_0 - \frac{m v_0^2}{i_0^2}. \quad (46)$$

Профиль рельсотрона определяется следующей зависимостью:

$$L(x) = L_0 - \frac{m v_0^2}{i_0^2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{3i_0^2 R}{2m v_0^2} (x - x_0) \right]^{2/3} \right\}. \quad (47)$$

Если ток нарастает по экспоненте ($i = i_0 \exp(gt)$), имеем

$$L(t) = \left(L_0 + \frac{R}{g} \right) \exp(-gt) - \frac{R}{g},$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 - v_0 \int_0^t \sqrt{1 + \frac{L_0 i_0^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{R}{L_0 g} \right) (1 - e^{gt})} dt = \\ &= x_0 - v_0 \sqrt{1 + \frac{L_0 i_0^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{R}{L_0 g} \right)} \frac{1}{g} [\Psi(\tau_2) - \Psi(\tau_2 - gt)], \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\tau_2 = \ln [1 + m v_0^2 g / i_0^2 (L_0 g + R)].$$

При

$$t = t_{m1} = (1/g) \ln (1 + L_0 g / R)$$

индуктивность обращается в нуль, и начиная с этого момента решение теряет физический смысл. Если выполнено условие

$$\frac{i_0^2 L_0}{m v_0^2} \left(1 + \frac{L_0 g}{R} \right) > 1, \quad (49)$$

то раньше наступает момент t_{m2} , когда скорость обращается в нуль, т. е. происходит полное торможение тела, после чего оно движется в обратную сторону,

изменение тока уже не описывается экспонентой. Существование этих двух режимов связано с наличием активного сопротивления в цепи: при достаточно большом сопротивлении $R > L_0 g (mv_0^2/L_0 i_0^2 - 1)^{-1}$ энергия идет в основном на потери в нем, поэтому магнитное поле оказывается недостаточно сильным, чтобы затормозить проводник раньше, чем индуктивность станет равной нулю. При условии

$$R = R_0 = \frac{L_0 g}{\frac{mv_0^2}{L_0 i_0^2} - 1} \quad (50)$$

вся энергия выделяется в активном сопротивлении к моменту остановки (в этом случае $t_{m1} = t_{m2} = t_m$), поскольку в этот момент кинетическая энергия и энергия электромагнитного поля равны нулю ($v=0$ и $L=0$). В этом случае $i(t_m) = mv_0^2/L_0 i_0$. На рис. 5 даны кривые $L(x)$ для трех режимов: $R < R_0$, $R > R_0$, $R = R_0$.

В заключение рассмотрим сжатие потока движущимся проводником в рель-

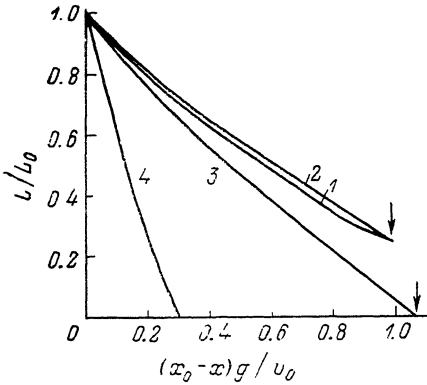


Рис. 5. Примеры зависимости индуктивности от координаты для рельсотрона, в котором ток при торможении тела нарастает по экспоненте ($i = i_0 \exp(gt)$), $mv_0^2/L_0 i_0^2 = 4$.

1 — $R=0$; 2 — $R/R_0=0.12$, $L_0 g/R=25$; 3 — $R/R_0=1$, $L_0 g/R=3$; 4 — $R/R_0=9$, $L_0 g/R=0.33$. Стрелкой отмечена точка, в которой скорость тела обращается в нуль.

сотроне, замкнутом на идеальный бифиляр, индуктивность которого равна нулю при идеальной проводимости проводников Π_1 , Π_2 (рис. 1, з). Представляет интерес реальный случай конечной проводимости, когда, как нетрудно показать [11], напряжение и ток на входе бифиляра связаны следующим соотношением:

$$u_{\text{вх}}(t) = -\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (51)$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводников Π_1 , Π_2 .

Отсюда, согласно (5),

$$L(t) = \frac{1}{i(t)} \left(L_0 i_0 - \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0 \rho}{\pi}} \int_0^t \frac{i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right). \quad (52)$$

Если $i = i_0 \exp(pt)$, то

$$L(t) = L_0 \exp(-pt) - \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \Phi(\sqrt{2pt}), \quad (53)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, $\lambda = (b/a)(\mu_0 \rho/\pi)^{1/2}$,

$$x(t) = x_0 - v_0 \int_0^t \sqrt{1 - \frac{L_0 i_0^2}{mv_0^2} (e^{pt} - 1) - \frac{i_0^2 \lambda^2}{mv_0^2} \int_0^t \frac{e^{p\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}}} dt. \quad (54)$$

Рассмотрим отдельно соотношения, которые выполняются при «полном сжатии», т. е. в момент t_{m1} , когда $L=0$. Подобные режимы имеют место, если момент t_{m1} предшествует моменту остановки проводника t_{m2} . Величину t_{m1} находим из уравнения

$$L_0 = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \exp(pt_{m1}) \Phi(\sqrt{2pt_{m1}}). \quad (55)$$

Пусть

$$i(t_{m1})/i_0 = i_1/i_0 = \exp(pt_{m1}) \gg 1, \quad pt_{m1} \gg 1,$$

тогда

$$\Phi(\sqrt{2pt_{m1}}) \approx 1, \quad \int_0^t [\exp(p\tau)/\sqrt{\tau}] d\tau \approx \exp(pt)/p\sqrt{t}.$$

В этом случае $t_{m1} \approx (1/p) \ln(L_0 \sqrt{p}/\lambda \sqrt{\pi})$, и получаем приближенное выражение для кинетической энергии в момент t_{m1}

$$W(t_{m1}) \approx \frac{mv_0^2}{2} - \frac{L_0 i_0 t_1}{2} - \frac{\lambda i_0 t_1}{2 \sqrt{p \ln \frac{L_0 \sqrt{p}}{\lambda \sqrt{\pi}}}}. \quad (56)$$

Наибольшее значение тока, которое можно получить при экспоненциальном законе его нарастания, будет иметь место при условии $t_{m1} = t_{m2}$. Приравнивая $W(t_{m1})$ к нулю, находим максимальный коэффициент усиления тока

$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{mv_0^2}{L_0 i_0^2 + \frac{\lambda i_0^2}{\sqrt{p \ln \frac{L_0 \sqrt{p}}{\lambda \sqrt{\pi}}}}}. \quad (57)$$

4. Расчет профиля рельсотрона, питаемого от индуктивного накопителя при заданной зависимости $x(t)$

Если задана зависимость $x(t)$, то известно мгновенное значение кинетической энергии $W_k(t)$ и ее зависимость от координаты $W_k(x)$. Тогда непосредственно из условий энергобаланса индуктивного накопителя $(\Phi_0^2/2)(1/L_0 - 1/L) = W_k$ находим

$$L(x) = \frac{L_0}{1 - \frac{2L_0 W_k(x)}{\Phi_0^2}}. \quad (58)$$

Рассмотрим пример, когда накопитель полностью передает энергию телу, которое меняет свою скорость от начального значения v_0 до конечного $v_1 = (V_0^2 + \Phi_0^2/L_0 m)^{1/2}$ при постоянном ускорении a . Тогда

$$x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2, \quad W_k(x) = at(x - x_0),$$

$$L(x) = \frac{L_0}{1 - \frac{2L_0 ma(x - x_0)}{\Phi_0^2}}, \quad i(t) = \frac{\Phi_0}{L_0} \left[1 - \frac{2L_0 ma}{\Phi_0^2} (v_0 t + at^2/2) \right]. \quad (59)$$

Энергия накопителя полностью передается телу за время $(v_1 - v_0)/a$ на пути $l_1 = x_1 - x_0 = \Phi_0^2/2L_0 ma$, в конце которого индуктивность терпит разрыв, а ток обращается в нуль.

Выводы

1. Решение обратной задачи позволяет найти зависимость $L(x)$ у рельсотрона, предназначенного для получения заданной формы тока в нагрузке, а также проанализировать процесс ускорения в случаях, когда зависимость $L(x)$ отлична от линейной.

2. Для ряда простых зависимостей $i(t)$ (степенная, показательная и некоторые другие) удастся получить $L(t)$ и $x(t)$ в аналитическом виде и связать начальные и конечные значения основных параметров. Этот же метод может быть использован и в более сложных случаях. При этом существенно, что решение сводится к квадратурам наиболее простой операции при численном расчете.

3. На примере показано, что в схеме с емкостным накопителем одна и та же зависимость тока от времени может иметь место при различных $L(x)$.

4. Для рельсотрона, питаемого от индуктивного накопителя, рассчитана зависимость $L(x)$ по условию постоянства силы на участке ускорения.

Литература

- [1] Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М. и др. ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 1/7, с. 3—10.
- [2] Васильев В. И., Жетлукин А. М., Соловьева В. Г. и др. ВАНТ. Сер. Физика плазмы и проблемы УТС, 1977, № 1 (16), с. 19—24.
- [3] Новгородцев А. Б., Шнейерсон Г. А. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 2, с. 154—161.
- [4] Бондалетов В. Н., Иванов Е. Н., Калихман С. А., Пичугин Ю. П. В кн.: Сверхсильные магнитные поля (Физика. Техника. Применение). М.: Наука, 1984, с. 234—238.
- [5] Шнейерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981. 199 с.
- [6] Hawke R. S., Brooks A. L., Fowler C. M., Peterson D. R. В кн.: Сверхсильные магнитные поля (Физика. Техника. Применение). М.: Наука, 1984, с. 171—176.
- [7] Шевцов Г. А., Титов В. М., Башкатов Ю. Л. и др. В кн.: Сверхсильные магнитные поля (Физика. Техника. Применение). М.: Наука, 1984, с. 177—182.
- [8] Caird R. S., Ericson D. J., Fowler C. M. et al. В кн.: Сверхсильные магнитные поля (Физика. Техника. Применение). М.: Наука, 1984, с. 246—253.
- [9] Barlett R. H., Takemori H. T., Chase J. B. In: III Intern. Conf. on Megagass Magnetic Field Generation. Novosibirsk, 1983, p. 48.
- [10] Бондалетов В. Н. ЖТФ, 1967, т. 37, № 2, с. 280—287.
- [11] Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 390 с.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило в Редакцию
18 сентября 1987 г.