

УДК 537.525

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ КАТОДНОГО СЛОЯ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

М. С. Бенилов

Рассматривается вопрос о точках ветвления, находящихся на одномерном решении задачи о прикатодной области тлеющего разряда, т. е. точках, в которых от одномерного решения ответвляются или к нему присоединяются неоднородные решения. С помощью численных расчетов показано, что такие точки существуют и найдено их расположение. Характер этого расположения позволяет сделать предположение о том, что ответвляющиеся или присоединяющиеся в указанных точках неоднородные решения описывают режимы с нормальным пятном.

Проблема теоретического описания эффекта нормальной плотности тока в тлеющем разряде по-прежнему вызывает значительный интерес [1-4]. Возможный подход к этой проблеме состоит [1] в исследовании неоднородных решений стационарной задачи о катодном слое. В полном объеме такое исследование можно провести только с помощью двух- или трехмерных численных расчетов. Однако полезную информацию качественного характера можно получить более простым способом — с помощью анализа точек ветвления. Такому анализу и посвящена данная работа.

Рассмотрим прикатодную область стационарного тлеющего разряда. Разрядная трубка имеет форму прямого цилиндра, не обязательно кругового. Введем декартову систему координат x, y, z так, что ось y направлена по нормали от поверхности катода в плазму, и обозначим через G область в плоскости x, z , занимаемую катодом. Систему уравнений, описывающих распределения концентраций ионов и электронов n_i, n_e и электрического потенциала φ , запишем в виде

$$\nabla \cdot (n_e \nabla \varphi) = \alpha E n_e - \nu_r n_e / \mu_e, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot [(n_e + \beta n_i) \nabla \varphi] = 0,$$

$$\Delta \varphi = 4\pi e (n_e - n_i),$$

где μ_i, μ_e — подвижности ионов и электронов; α — ионизационный коэффициент; $E = |\nabla \varphi|$; $\beta = \mu_i / \mu_e$; второй член правой части первого уравнения (1) моделирует диффузионные или рекомбинационные потери [1], ν_r — характерная частота этих потерь. Параметры μ_i, μ_e, ν_r предполагаются постоянными и заданными, α — заданная функция E : $\alpha = \alpha(E)$.

Поскольку на поверхности катода плотности дрейфовых потоков ионов и электронов связаны через коэффициент вторичной эмиссии γ , а потенциал равен некоторой постоянной, которую можно без ограничения общности принять равной нулю, то имеем при $y=0$ граничные условия

$$n_e = \beta \gamma n_i, \quad (2)$$

$$\varphi = 0. \quad (3)$$

На боковой поверхности разрядной трубки нормальная компонента плотности тока равна нулю

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

В однородном положительном столбе электрическое поле постоянно и направлено вдоль оси трубки, поэтому граничное условие при $y \rightarrow \infty$ запишем в виде

$$\varphi = E_{\infty} y + U, \quad (5)$$

где E_{∞} — абсолютная величина поля в столбе, определяемая из условия [2] $\alpha(E_{\infty}) E_{\infty} = v_r / \mu_e$; U — заданный параметр, имеющий смысл падения напряжения в катодном слое, определенное как разность между значением экстраполированного до поверхности катода распределения потенциала в положительном столбе и значением потенциала катода.

Отметим, что сформулированная таким образом задача (1)—(5) не описывает структуру переходной области между катодным слоем и положительным столбом [1], однако для целей данной работы это не имеет существенного значения.

Разделим второе уравнение (1) на $1 + \beta$ и вычтем из первого. Используя полученное соотношение и третье уравнение, выразим n_e , n_i через φ . Подставляя эти выражения во второе уравнение (1) и условие (2), получаем ($K = \alpha E - v_r / \mu_e$)

$$\nabla \left\{ \left[\frac{1}{K} \nabla \cdot (\Delta \varphi \nabla \varphi) - \Delta \varphi \right] \nabla \varphi \right\} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1 - \beta \gamma}{2 \gamma (1 + \beta) K} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Таким образом, задача (1)—(5) преобразована к задаче (6), (7), (3)—(5) для одной неизвестной функции φ .

Рассматриваемая задача имеет хорошо известное одномерное решение $\varphi = \varphi(y)$, описывающее аномальный режим разряда и (нерезализующийся) режим, соответствующий падающему участку ВАХ. Существование режимов с нормальным пятном заставляет предполагать, что при определенных условиях эта задача имеет также неоднмерные решения $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Поскольку при увеличении тока режимы с нормальным пятном непрерывно, т. е. квазистационарным образом, переходят в аномальный режим, следует предполагать также, что каждое из этих неоднмерных решений по крайней мере в одной точке соединяется с одномерным решением. Таким образом, можно ожидать, что на одномерном решении существуют точки ветвления, т. е. точки, в которых отщепляются или присоединяются неоднмерные решения.

Перейдем к нахождению указанных точек ветвления. Пусть U_0 — значение падения напряжения, соответствующее одной из этих точек, $\varphi_0 = \varphi_0(y)$ — соответствующее решение. Решение, соответствующее близким значениям падения напряжения $U = U_0 + U_1$, $|U_1| \ll U_0$, ищем в виде $\varphi = \varphi_0(y) + \varphi_1(x, y, z)$, $|\varphi_1| \ll \varphi_0$. Подставляя эти выражения в задачу (6), (7), (3)—(5) и удерживая члены сначала нулевого, затем первого порядков, для функции $E_0 = \varphi_0'$ и функции φ_1 получаем соответственно задачи

$$E_0 \left[\frac{1}{K_0} (E_0 E_0')' - E_0' \right] = \frac{4 \pi j_0}{\mu_i}, \quad j_0' = 0, \quad (8)$$

$$y = 0 : E_0 E_0' = - \frac{1 - \beta \gamma}{1 + \gamma} \frac{4 \pi j_0}{\mu_i},$$

$$y \rightarrow \infty : E_0 \rightarrow E_{\infty},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial y} (E_0^2 \Delta \varphi_1) - E_0 \Delta \varphi_1 + \frac{1}{K_0} [E_0 E_0'' - \alpha (E_0 E_0')'] \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right\} + \\ + \frac{4 \pi j_0}{\mu_i E_0} \Delta \varphi_1 - \frac{4 \pi j_0 E_0'}{\mu_i E_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$y = 0 : \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1 - \beta \gamma}{\gamma (1 + \beta)} \frac{\partial}{\partial y} \left(E_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + K_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right] = 0,$$

$$y \rightarrow \infty : \varphi_1 \rightarrow U_1,$$

на боковой поверхности $\partial\varphi_1/\partial n=0$, где $K_0=K(E_0)$, $a=(d \ln K/d \ln E)_{E_0}$, j_0 — значение плотности тока, соответствующее рассматриваемой точке ветвления, штрих означает полную производную по y .

Поскольку рассматриваемая точка $U=U_0$ является точкой ветвления, линейная неоднородная задача (9) имеет не единственное решение. Следовательно, соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение. Будем искать это решение в виде

$$\varphi_1 = f(y) \Phi(x, z).$$

Подставляя это выражение в (9), после разделения переменных получаем задачи на собственные значения, которым удовлетворяют функции Φ , f

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0, \quad (10)$$

на границе области G $\partial\Phi/\partial n=0$.

$$\left\{ \frac{1}{K_0} [E_0''(f'' - k^2 f)]' - E_0(f'' - k^2 f) + \left[\frac{E_0 E_0''}{K_0} - \frac{a(E_0 E_0)'}{K_0} + \frac{4\pi j_0}{\mu_i E_0} \right] f' \right\}' = \frac{4\pi j_0 k^2}{\mu_i E_0} f, \quad (11)$$

$$y=0 : f=0, \quad \left[\frac{1-\beta\gamma}{\gamma(1+\beta)} (E_0 f')' + K_0 f' \right]' = 0,$$

$$y \rightarrow \infty : f \rightarrow 0,$$

где k^2 — собственный параметр.

Найдем асимптотику решений уравнения (11) при $y \rightarrow \infty$. Учитывая, что при $E \rightarrow E_\infty$ $K \approx (dK/dE)_{E_\infty} (E - E_\infty)$, и линеаризуя уравнение (8), получаем, что при $y \rightarrow \infty$

$$E_0 \approx E_\infty + C_1 e^{-wy}, \quad w = \left[\frac{4\pi j_0}{\mu_i E_\infty^2} \frac{dK}{dE} (E_\infty) \right]^{1/2}.$$

Здесь и ниже C_1, C_2, \dots, C_5 — произвольные постоянные. Уравнение (11) при $y \rightarrow \infty$ принимает в первом приближении вид

$$\{e^{wy} [f'' - (k^2 + w^2) f']\}' = 0.$$

Решение этого уравнения и дает искомую асимптотику

$$f = C_2 e^{-wy} + C_3 \exp(-\sqrt{k^2 + w^2} y) + C_4 \exp(\sqrt{k^2 + w^2} y) + C_5.$$

Эта асимптотика совместима с последним граничным условием (11), если $C_4 = C_5 = 0$. Таким образом, это граничное условие позволяет определить значения сразу двух постоянных интегрирования и задача (11) замкнута.

Интересно отметить, что, хотя зависящая от x, z составляющая потенциала экспоненциально затухает в положительном столбе, аналогичная составляющая осевой компоненты плотности тока выходит на постоянное значение

$$j_y = -\frac{k^2 C_2}{w C_1} j_0 \Phi(x, z).$$

Иными словами, в рамках рассматриваемой модели неоднородность распределения параметров в катодном слое приводит к неоднородности распределения осевого тока и, следовательно, концентрации заряженных частиц по сечению положительного столба. Это обстоятельство связано с приближенным характером учета потерь в рассматриваемой модели.

Процедура нахождения точек ветвления заключается в следующем. Сначала нужно найти спектр, т. е. набор собственных значений k_1, k_2, k_3, \dots задачи (10). Заметим, что этот спектр полностью определяется видом области G , т. е. поперечным сечением разрядной трубки. Первое собственное значение $k=k_1$ подставляется в (11). Очевидно, для каждого заданного значения j_0 все коэффи-

пленты задачи (11) могут быть определены (функция E_0 определяется из решения задачи (8)), поэтому (11) можно рассматривать как задачу на собственные значения для нахождения параметра j_0 . Найденные таким образом значения j_0 и определяют положение точек ветвления, соответствующих первому собственному значению задачи (10). В этих точках соединяются с одномерным решением неоднородные решения, зависимость которых от x, z описывается в окрестности этих точек первым собственным решением задачи (10) $\Phi_1(x, z)$. Затем в (11) подставляется собственное значение $k=k_2$ и определяется положение точек ветвления, соответствующих этому значению; в этих точках соединяются с одномерным решением решения, описываемые вторым собственным решением (10) $\Phi_2(x, z)$. Затем в (11) подставляются значения k_3, k_4 и т. д.

При выполнении описанной процедуры необходимо решать задачи (10), (8), (11). Решение задачи (10) для областей простой формы известно. Например, для разрядной трубки в виде кругового цилиндра (G — круг) радиуса R первые три (не считая нулевого) собственные значения и принадлежащие им собственные функции будут

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.84/R, \quad \Phi_1^{(1)} = J_1(k_1 r) \sin \theta, \quad \Phi_1^{(2)} = J_1(k_1 r) \cos \theta, \\ k_2 &= 3.05/R, \quad \Phi_2^{(1)} = J_2(k_2 r) \sin 2\theta, \quad \Phi_2^{(2)} = J_2(k_2 r) \cos 2\theta, \\ k_3 &= 3.83/R, \quad \Phi_3 = J_0(k_3 r), \end{aligned}$$

где r — расстояние от оси трубки, θ — полярный угол, J_0, J_1, J_2 — функции Бесселя.

Задачи (8), (11) необходимо решать численно, предварительно их удобно преобразовать: задачу (8) — к новой независимой переменной E_0 и искомой функции $q = \mu_i E_0 E_0' / (4\pi j_0)$, задачу (11) — к независимой переменной E_0 и искомым функциям $f, \psi = E_0^2 (f'' - k^2 f)$

$$\frac{dq}{dE_0} = \frac{\mu_i K_0}{4\pi j_0} \left(1 + \frac{1}{q}\right), \quad (12)$$

$$E_0 = E_\infty : q = 0, \quad E_0 = E_w : q = -\frac{1 - \beta\gamma}{1 + \gamma}.$$

$$\frac{d}{dE_0} \left(\frac{q_1^2}{K_0} \frac{d\psi}{dE_0} + b q_1^2 \frac{df}{dE_0} \right) = \left(\frac{q_2}{K_0} + \frac{q_1}{E_0} \right) \frac{d\psi}{dE_0} + b q_2 \frac{df}{dE_0} - \frac{q_1}{E_0^2} \psi + \frac{4\pi j_0 k^2}{\mu_i E_0} f, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dE_0} \left(q_1^2 \frac{df}{dE_0} \right) = q_2 \frac{df}{dE_0} + \frac{1}{E_0^2} \psi + k^2 f,$$

$$E_0 = E_\infty : \psi = 0, \quad f = 0,$$

$$E_0 = E_w : \frac{d\psi}{dE_0} + \left[E_0 (q_2 + k^2 E_0) + \frac{K_0 a q_1 \gamma (1 + \beta)}{1 - \beta\gamma} \right] \frac{df}{dE_0} + \frac{K_0 \gamma (1 + \beta)}{E_0 q_1 (1 - \beta\gamma)} \psi = 0, \quad f = 0,$$

где

$$q_1 = \frac{4\pi j_0 q}{\mu_i E_0}, \quad q_2 = \frac{K_0}{E_0} \left(\frac{4\pi j_0}{\mu_i E_0} + q_1 \right) - \frac{q_1^2}{E_0},$$

$$b = \frac{E_0 q_2}{K_0} - a \left(\frac{4\pi j_0}{\mu_i E_0} + q_1 \right) + \frac{4\pi j_0}{\mu_i E_0}, \quad E_w = E_0|_{y=0}.$$

Заметим, что перед переходом к новым переменным уравнение (11) преобразовано с таким расчетом, чтобы коэффициенты системы уравнений (13) были регулярны в точке $E_0 = E_\infty$.

Использовавшаяся методика численного решения состоит в следующем. Задается некоторое значение поля на поверхности катода E_w . Численным интегрированием (использовалась формула Симпсона) определяется соответствующее значение j_0

$$j_0 = \frac{\mu_i}{4\pi} \left[\ln \frac{1 + \gamma}{\gamma (1 + \beta)} - \frac{1 - \beta\gamma}{1 + \gamma} \right]^{-1} \int_{E_\infty}^{E_w} K_0 dE_0.$$

Уравнение (12) с первым граничным условием решалось методом Рунге—Кутты (заметим, что, после того как эта задача решена, можно определить соответствующее данному E_w значение падения напряжения)

$$U_0 = \frac{\mu_i}{4\pi j_0} \int_{E_\infty}^{E_w} \frac{(E_0 - E_\infty) E_0}{(-q)} dE_0.$$

Для решения задачи (13) (краевой задачи для системы двух линейных уравнений второго порядка) использовался метод векторной прогонки, основанный на разностной схеме четвертого порядка точности и являющийся обобщением метода [5] на случай системы уравнений.

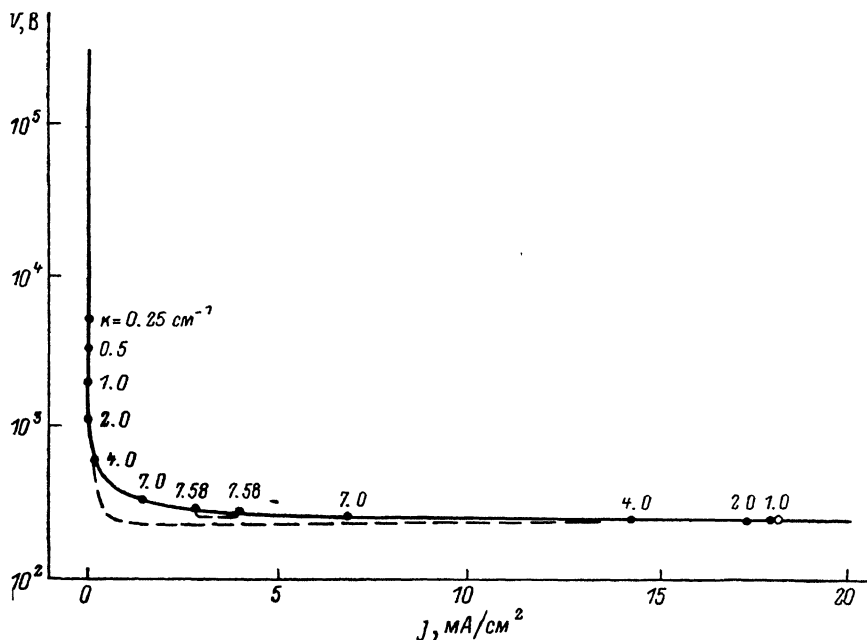


Рис. 1.

Значение E_w варьировалось до тех пор, пока детерминант системы уравнений, возникающей после прямой прогонки для определения значений функций ψ , f и их производных в точке $E_0 = E_w$, не обращался в нуль. Даже при том, что все используемые в данной работе численные методы имеют четвертый порядок точности, ввиду быстрого изменения искомых функций число узлов на отрезке $[E_\infty, E_w]$ приходилось выбирать достаточно большим.

Расчеты проводились для условий, моделирующих разряд в азоте при давлении 10 Тор; использовались значения переносных и кинетических коэффициентов брались из [2] и составляют: $\mu_i = 2 \cdot 10^2 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, $\mu_e = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \times \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, $\alpha = A p e^{-B p / E}$, $A p = 120 \text{ см}^{-1}$, $B p = 3420 \text{ В/см}$, $\nu_r = 10^3 \text{ с}^{-1}$. Коэффициент вторичной эмиссии γ брался равным 0.1 и 0.01.

Результаты расчетов оказались следующими. При k , превышающих некоторое значение $k_{\text{ог}}$ ($k_{\text{ог}} \approx 7.60 \text{ см}^{-1}$ при $\gamma = 0.1$, $k_{\text{ог}} \approx 2.25 \text{ см}^{-1}$ при $\gamma = 0.01$), точки ветвления на одномерной ВАХ отсутствуют. При k , удовлетворяющих условию $0 < k < k_{\text{ог}}$, существуют две точки ветвления. Обе эти точки находятся на падающем участке ВАХ, причем одна из них — на участке крутого падения, другая — на пологом участке. При уменьшении k первая из указанных точек движется в область больших U , вторая — к точке минимума ВАХ; при увеличении k точки ветвления движутся во встречных направлениях и при $k = k_{\text{ог}}$ сливаются. На рис. 1, 2 для $\gamma = 0.1$ и 0.01 соответственно представлены одномерные ВАХ (сплошные линии), точки ветвления для некоторых значений k (темные точки) и точки минимума одномерных ВАХ (светлые точки). На рис. 1 для $k = 0.25 \text{ см}^{-1}$ и $k = 0.5 \text{ см}^{-1}$ показано по одной точке ветвления,

Поскольку вторые точки ветвления в принятом масштабе совпадают с точкой минимума ВАХ. На рис. 2 по той же причине показана только одна точка ветвления для $k=0.25 \text{ см}^{-1}$.

Как видно из рисунков, при $j=0$ падение напряжения в рамках рассматриваемой модели принимает конечное значение. Это значение может быть найдено также аналитически и равно

$$E_{\infty} \left[\frac{dK}{dE} (E_{\infty}) \right]^{-1} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma(1+\beta)}.$$

Заметим, впрочем, что при $j \rightarrow 0$ толщина катодного слоя неограниченно возрастает и рассматриваемая модель становится неприменимой.

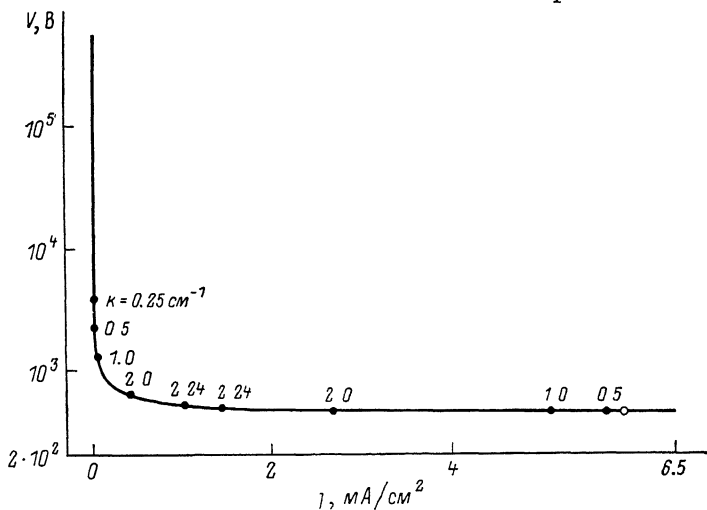


Рис. 2.

Поскольку при каждом k из промежутка $0 < k < k_{\text{сн}}$ на одномерной ВАХ существуют две точки ветвления, то естественно предположить, что одна из этих точек является точкой ответвления, а другая — точкой присоединения одного и того же неоднородного решения. Гипотетический ход ВАХ, соответствующих двум таким неоднородным решениям, показан на рис. 1 (штриховые линии). Учтявая, что расположение точек ветвления в данной задаче аналогично расположению точек ветвления в задаче о тепловой контракции, можно предположить, что вышеупомянутые неоднородные решения, аналогично неоднородным решениям в модели [6], описывают режимы с нормальным пятном.

Если указанные предположения справедливы, это означает, в частности, что диффузионный перенос заряженных частиц не играет определяющей роли в механизме эффекта нормальной плотности тока (см. обсуждение этого вопроса в [1]). Тогда как в модели тепловой контракции причиной возникновения режимов с нормальным пятном является насыщение проводимости плазмы с ростом температуры [6], в данной модели причиной является насыщение ионизационного коэффициента с ростом поля.

Интересно отметить, что возможны ситуации, когда рассматриваемая задача помимо одномерного имеет только трехмерные решения. Например, рассмотрим случай, когда разрядная трубка — круговой цилиндр радиусом 1 см, значения параметров соответствуют условиям рис. 1, 2. Если $\gamma=0.1$, то в точках ветвления, соответствующих первым трем собственным числам $k_1=1.84 \text{ см}^{-1}$, $k_2=3.05 \text{ см}^{-1}$, $k_3=3.84 \text{ см}^{-1}$, ответвляются и присоединяются соответственно трехмерное решение, трехмерное решение, периодическое по θ , с периодом π и осесимметричное решение. Если же $\gamma=0.01$, то на одномерной ВАХ есть только две точки ветвления, соответствующие первому собственному значению k_1 ($k_2, k_3, \dots > k_{\text{сн}}$); в этой ситуации можно ожидать, что данная задача имеет одномерное и трехмерное решения, но не имеет решения осесимметричного.

Литература

- [1] Райзер Ю. П. ТВТ, 1986, т. 24, № 5, с. 984—994.
- [2] Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980. 416 с.
- [3] Мелехин В. Н., Наумов Н. Ю. Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, в. 2, с. 99—103.
- [4] Райзер Ю. П., Суржиков С. Т. Письма в ЖТФ, 1987, т. 13, № 8 с. 452—456.
- [5] Петухов И. В. В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.
- [6] Бенилов М. С., Писанная Н. В. ЖТФ, 1988, т. 58, № 11, с. 2075—2085.

Институт высоких температур
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
12 мая 1987 г.

