

УДК 537.521

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТРАГИРОВАННОГО ПРОТЕКАНИЯ ТОКА НА ЭЛЕКТРОД С ТЕПЛОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

*М. С. Бенилов, Н. В. Писанная*

Применение теории бифуркаций к нелинейной неодномерной задаче о контрагированном протекании тока в приэлектродной области дает полезную информацию качественного характера и позволяет получить начальное приближение для численных расчетов. Такой подход использован для анализа тепловой контракции. С помощью численных расчетов найдены двумерные решения, соответствующие первым трем модам контрагированного протекания тока. Анализ распределений плотности тока и температуры по поверхности электрода, описываемых решением, соответствующим первой моде, показывает, что этот режим можно классифицировать как режим с нормальным пятном.

О контрагированном протекании тока на электрод обычно говорят в тех случаях, когда распределение тока по поверхности электрода существенно неоднородно, причем эта неоднородность не связана с видом граничных условий, например с неоднородностью структуры электрода, т. е. в тех случаях, когда граничные условия допускают существование режима распределенного протекания тока (режима с однородным распределением тока по поверхности электрода), но этот режим неустойчив и не реализуется в опыте. Если при распределенном режиме распределения всех параметров в приэлектродной области являются функциями только одной координаты — расстояния от поверхности электрода, то при контрагированном режиме эти распределения являются функциями также продольных координат. Таким образом, стационарная задача о расчете контрагированного протекания тока в приэлектродной области имеет не единственное решение: во-первых, существует одномерное решение, соответствующее распределенному протеканию, во-вторых, существует одно или несколько неодномерных решений, соответствующих различным модам контрагированного протекания.

Как известно, неединственность решения характерна для многих задач, описывающих нелинейные диссипативные системы [1-3]. Часто такие задачи рассматриваются для одномерной или квазиодномерной ситуаций, когда одно из решений описывает пространственно однородное распределение, а другие — неоднородные одномерные структуры. Данная задача, однако, является существенно неодномерной.

Для получения точного численного решения нелинейных неодномерных краевых задач используются итерационные методы. При применении этих методов к вышеуказанной задаче возникает весьма существенный вопрос о начальном приближении, так как именно выбор начального приближения определяет, к какому из имеющихся в данной задаче решений будут сходиться итерации. Очевидный ответ состоит в использовании теории бифуркаций, как это делается, например, в теории гравитационных волн на глубокой воде [4]. В рамках такого подхода в данной задаче сначала определяется одномерное решение. Затем с помощью теории бифуркаций определяются точки ветвления, т. е. точки, в которых от этого решения ответвляются неодномерные решения, и вычисляются асимптотики этих решений в окрестности указанных точек. С использо-

ваниям полученных асимптотик в качестве начальных приближений эти решения могут быть продолжены численно. Подчеркнем, что такой подход преследует цель определить все стационарные решения, ответвляющиеся от одномерного, вне зависимости от их устойчивости при тех или иных конкретных условиях (например, параметрах внешней электрической цепи), тогда как в рамках часто применяемого в аналогичных задачах нестационарного подхода, включающего рассмотрение динамики процесса, обычно определяются лишь те стационарные решения, которые устойчивы при данных конкретных условиях и не обязательно ответвляются от одномерного решения.

В данной работе рассмотренный выше подход применяется для расчета протекания тока на электрод, распределение температуры в котором формируется тепловым потоком, обусловленным джоулевым тепловыделением в тонком приэлектродном слое плазмы, причем проводимость этого слоя определяется локальной температурой поверхности электрода. Эта задача представляет интерес, в частности, в связи с применением в технических устройствах электродов из материалов с низкой теплопроводностью, таких как высокотемпературная керамика [5].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим распределение температуры в теле, имеющем вид прямого цилиндра  $D$  (рис. 1). Один из торцов  $G$  цилиндра поддерживается при постоянной температуре  $T_c$ , другой торец  $\Gamma_1$  обогревается тепловым потоком, плотность которого является заданной функцией локального значения температуры и некоторого параметра  $U$ , одинакового для всех точек  $\Gamma_1$ . Боковая поверхность цилиндра  $\Gamma_2$  теплоизолирована. Источников тепла в теле цилиндра нет. Для распределения температуры в рассматриваемом цилиндре имеем нелинейную краевую задачу

$$D: \Delta T = 0, \quad (1)$$

$$G: T = T_c, \quad \Gamma_1: \frac{\partial T}{\partial y} = Q(T, U), \quad \Gamma_2: \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

где  $Q$ , деленная на величину  $\kappa^*/h$  — плотность теплового потока ( $\kappa^*$  — теплопроводность материала электрода,  $h$  — его высота); ось  $y$  направлена вдоль оси цилиндра. Все размеры здесь и далее нормированы на высоту цилиндра.

Рис. 1. Геометрия задачи.

Будем приписывать сформулированной тепловой задаче следующий физический смысл. Пусть рассматриваемый цилиндр представляет собой электрод, обогреваемый тепловым потоком из прилегающей плазмы. Джоулево тепловыделение в теле электрода мало. Тепловой поток на электрод складывается из конвективного теплового потока  $q_*$ , плотность которого не зависит от плотности тока на электрод и температуры его поверхности, и джоулева тепловыделения в плазме, которое локализовано в тонком приэлектродном слое. Падение напряжения на этом слое постоянно вдоль поверхности электрода. В предположении, что толщина указанного слоя существенно меньше размеров электрода, этот слой можно считать локально одномерным и рассматривать локальную плотность тока на электрод как заданную однозначную функцию падения напряжения  $U$  и локальной температуры поверхности  $T_w$ :  $j = F(T_w, U)$ . Функция  $Q$  тогда дается выражением

$$Q = [q_* + UF(T_w, U)]h/\kappa^*.$$

## 2. Одномерное решение и применение теории бифуркаций

Задача (1), (2) имеет одномерное решение

$$T = (T_w - T_c)y + T_c,$$

где  $T_w = T_w(U)$  — корень алгебраического уравнения

$$T_w - T_c = Q(T_w, U). \quad (3)$$

Наряду с этим решением данная задача имеет отвечающиеся от него неоднородные решения. Для определения точек ветвления и асимптотики неоднородных решений в окрестности этих точек применим теорию бифуркаций. Отметим, что эта теория применялась к нелинейной задаче теплопроводности в [6]. Однако в задаче [6] в отличие от (1), (2) основное решение было не одномерно, а пространственно однородно.

Пусть  $U = U_0$  — значение падения напряжения, соответствующее одной из точек ветвления. Представим решение в окрестности этой точки в виде ряда

$$T(x, y, z; U) = T_0(y) + \varepsilon T_1(x, y, z) + \frac{\varepsilon^2}{2} T_2(x, y, z) + \frac{\varepsilon^3}{6} T_3(x, y, z) + \dots, \quad T_0 = (T_{w0} - T_c)y + T_c, \quad T_{w0} = T_w(U_0). \quad (4)$$

Введенный здесь малый параметр  $\varepsilon$  связан с величиной  $U - U_0$

$$U - U_0 = \varepsilon U_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} U_2 + \frac{\varepsilon^3}{6} U_3 + \dots$$

За исключением граничных условий на  $\Gamma_1$ , вид задач для функций  $T_1, T_2, T_3$  аналогичен ( $\varphi$  — любая из функций  $T_1, T_2, T_3$ )

$$D: \Delta\varphi = 0, \quad (5)$$

$$G: \varphi = 0, \quad \Gamma_2: \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

$$\Gamma_1: \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial T} T_1 = \frac{\partial Q}{\partial U} U_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial T} T_2 = \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} T_1^2 + 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial T \partial U} T_1 U_1 + \frac{\partial^2 Q}{\partial U^2} U_1^2 + \frac{\partial Q}{\partial U} U_2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial T} T_3 = & \frac{\partial^3 Q}{\partial T^3} T_1^3 + 3 \frac{\partial^3 Q}{\partial T^2 \partial U} T_1^2 U_1 + 3 \frac{\partial^3 Q}{\partial T \partial U^2} T_1 U_1^2 + \frac{\partial^3 Q}{\partial U^3} U_1^3 + \\ & + 3 \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} T_2 T_1 + 3 \frac{\partial^2 Q}{\partial T \partial U} (T_2 U_1 + T_1 U_2) + 3 \frac{\partial^2 Q}{\partial U^2} U_1 U_2 + \frac{\partial Q}{\partial U} U_3 \end{aligned} \quad (8)$$

(здесь и далее все производные функции  $Q$  берутся при  $T = T_{w0}, U = U_0$ ).

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задачам (5), (6); (5), (7); (5), (8) и всем последующим. Эта задача включает (5) и граничное условие

$$\Gamma_1: \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial T} \varphi = 0. \quad (9)$$

Точка  $U = U_0$  может быть точкой ветвления только в том случае, когда соответствующая ей величина  $\partial Q / \partial T$  совпадает с каким-либо собственным значением задачи (5), (9). Собственные значения и соответствующие собственные функции этой задачи могут быть выражены по формулам

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = k \operatorname{cth} k, \quad (10)$$

$$\varphi = \operatorname{sh} ky \Phi(x, z) \quad (11)$$

через собственные значения  $k$  и собственные функции  $\Phi$  задачи Неймана для двумерного уравнения Гельмгольца

$$G: \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0, \quad (12)$$

$$g: \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

где  $g$  — граница области  $G$ .

Далее будем обозначать через  $k_i$   $i$ -тое собственное значение задачи (12), через  $N_i$  — его кратность, через  $\Phi_i^{(m)}$  ( $m=1, \dots, N_i$ ) — принадлежащий этому значению ортонормированный набор собственных функций. Для простых собственных значений верхний индекс у соответствующих собственных функций будем опускать.

Вернемся к рассмотрению неоднородных задач. Пусть величина  $\partial Q/\partial T$  при данном  $U_0$  совпадает с  $i$ -тым собственным значением задачи (5), (9), которому в свою очередь соответствует  $i$ -тое собственное значение задачи (12)

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = k_i \operatorname{cth} k_i. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда это собственное значение простое  $N_i=1$ .

Очевидно, условием разрешимости каждой из неоднородных задач (5), (6); (5), (7); (5), (8) является ортогональность на  $G$  соответствующей собственной функции и неоднородных членов, стоящих в правой части (6), (7), (8). Для задачи (5), (6) это условие имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial U} U_1 \langle \Phi_i \rangle = 0, \quad (14)$$

где угловые скобки означают интеграл по области  $G$ .

Будем полагать, что величина  $\partial Q/\partial U$  отлична от нуля. При  $i=1$  имеем, очевидно,  $k_1=0$ ,  $\Phi_1 \equiv \text{const}$ ,  $\partial Q/\partial T=1$ . Находим

$$U_1 = 0, \quad T_1 = Ay,$$

где  $A$  — постоянная, значение которой определяется из условия разрешимости задачи (5), (7)

$$A = \pm \left[ -U_2 \frac{\partial Q}{\partial U} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \right)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

При  $i > 1$   $\langle \Phi_i \rangle = 0$  и условие (14) удовлетворяется при любом  $U_1$ . Решение задачи (5), (6) существует при любом  $U_1$  и дается формулой

$$T_1 = U_1 r \frac{\partial Q}{\partial U} y + A \operatorname{sh} k_i y \Phi_i(x, z), \quad r = (1 - k_i \operatorname{cth} k_i)^{-1}.$$

Условие разрешимости задачи (5), (7) приводит к квадратному уравнению относительно постоянной  $A$

$$A \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \langle \Phi_i^3 \rangle A + \frac{2U_1}{\operatorname{sh} k_i} R \right] = 0, \\ R = r \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \frac{\partial Q}{\partial U} + \frac{\partial^2 Q}{\partial T \partial U}.$$

При  $\langle \Phi_i^3 \rangle \neq 0$  это уравнение имеет два корня: нулевой, соответствующий основному (одномерному) решению, и пропорциональный  $U_1$ , соответствующий отвечающему от основного неоднородному решению

$$A = - \frac{2U_1 R}{\operatorname{sh} k_i \langle \Phi_i^3 \rangle} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \right)^{-1}.$$

При  $\langle \Phi_i^3 \rangle = 0$ , для того чтобы это уравнение допускало ненулевые значения  $A$ , следует положить  $U_1 = 0$ . Решение задачи (5), (7) можно найти с помощью разложения неоднородных членов по собственным функциям и представить в виде суммы слагаемого, пропорционального  $A^2$ , и слагаемого, пропорционального  $U_2$  (очевидно, без ограничения общности пропорциональные  $\varphi$  слагаемые в выражениях для функций  $T_2, T_3, \dots$  можно считать отсутствующими, так как в противном случае их можно, переопределяя соответствующим образом параметр  $\varepsilon$ , включить во второй член разложения (4))

$$T_2 = A^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \operatorname{sh}^2 k_i \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} \sum_{m=1}^{N_n} \frac{\langle \Phi_n^{(m)} \Phi_i^2 \rangle \operatorname{sh} k_n y \Phi_n^{(m)}}{k_n \operatorname{ch} k_n - k_i \operatorname{cth} k_i \operatorname{sh} k_n} + U_2 r \frac{\partial Q}{\partial U} y. \quad (16)$$

Из условия разрешимости задачи (5), (8) находим

$$A = \pm \left\{ -\frac{3U_2 R}{\text{sh } k_i} \left[ \frac{\partial^3 Q}{\partial T^3} \langle \Phi_i^3 \rangle + 3 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \right)^2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{\infty} \sum_{m=1}^{N_n} \frac{\langle \Phi_n^{(m)} \Phi_i^3 \rangle^2}{k_n \text{cth } k_n - k_i \text{cth } k_i} \right]^{-1} \right\}^{1/3}. \quad (17)$$

Случай кратного собственного значения  $N_i > 1$  может быть рассмотрен аналогично, соответствующие результаты за недостатком места не приводятся.

Перейдем к обсуждению полученных результатов. В точке, соответствующей наименьшему собственному значению  $\partial Q/\partial T=1$ , соединяются два одномерных решения, которые существуют при  $U < U_0$  или при  $U > U_0$  в зависимости от знака величины  $\partial Q/\partial U (\partial^2 Q/\partial T^2)^{-1}$ . Заметим, что поскольку указанные решения одномерные, к аналогичным выводам можно прийти на основании анализа уравнения (3).

В точках, соответствующих следующим собственным значениям  $\partial Q/\partial T > 1$ , от основного (одномерного) решения ответвляются неодномерные решения. В случае простого собственного значения ответвляется либо одно решение, существующее как при  $U > U_0$ , так и при  $U < U_0$  (при  $\langle \Phi_i^3 \rangle \neq 0$ ), либо два решения, существующие при  $U < U_0$  или при  $U > U_0$  (при  $\langle \Phi_i^3 \rangle = 0$ ). В случае кратного собственного значения число ответвляющихся решений может быть большим.

Продемонстрируем применение развитой выше теории на примере, когда область  $G$  имеет вид прямоугольника ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq z \leq b$ ). Решение задачи (12) имеет вид

$$\Phi = \frac{C_1}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi M x}{a} \cos \frac{\pi N z}{b}, \quad k = \pi \sqrt{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}}, \quad (18)$$

$$M, N = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $C_1$  равно 1,  $\sqrt{2}$  или 2 в зависимости от того, равны константы  $M$  и  $N$  одновременно нулю, равна ли нулю одна из них или обе константы больше нуля.

В точках, соответствующих простым собственным значениям  $\partial Q/\partial T > 1$ , ответвляется по два решения (поскольку  $\langle \Phi_i^3 \rangle = 0$ ) и справедлива формула (17).

В качестве примера кратного собственного значения рассмотрим второе собственное значение для квадрата  $k_2 = \pi/a$ . Можно показать, что в соответствующей точке ответвляется восемь решений, из которых четыре двумерные и четыре трехмерные

$$T_1 = \frac{\sqrt{2}}{a} \text{sh } \frac{\pi y}{a} \left( A_1 \cos \frac{\pi x}{a} + A_2 \cos \frac{\pi z}{a} \right),$$

$$(A_1, A_2) = (\pm f_1, 0), (0, \pm f_1), (\pm f_2, \pm f_2),$$

где  $f_1, f_2$  — функции, пропорциональные  $\sqrt{U-U_0}$ , выражения для которых для краткости не приводятся.

Физический смысл условия (13) вполне ясен. Очевидно, точки ветвления можно рассматривать как точки нейтральной устойчивости относительно возмущений вида (11), т. е. точки, в которых эти возмущения не затухают и не нарастают. Для того чтобы возмущение не затухало, необходимо наличие достаточно эффективной обратной связи (обратной связью в данном случае является возрастание теплового потока с увеличением температуры поверхности; подчеркнем, что в бестоковых задачах обычно наблюдается обратная ситуация: рост температуры поверхности вызывает убывание теплового потока). Именно это условие и выражает уравнение (13).

С ростом  $k_i$  правая часть (13) монотонно возрастает. Это опять-таки вполне ясно физически. Величина  $k_i$  характеризует обратную длину волны рассматриваемого возмущения. Чем эта длина волны меньше, тем эффективнее перенос тепла в направлениях  $x, z$ , а поскольку этот механизм демпфирует возмущения, то для их нейтральности необходима более эффективная обратная связь.

Как указано выше, ответвление неодномерных решений может происходить только при  $\partial Q/\partial T > 1$ . Выясним, каким точкам на вольт-амперной характери-

стике вышеуказанного пристеночного слоя это условие соответствует (имеется в виду ВАХ одномерного разряда, рассчитанная с учетом теплового баланса электрода). Введем производную вдоль вольт-амперной характеристики

$$\frac{Dj}{DU} = \frac{\partial F}{\partial U} + \frac{\partial F}{\partial T_w} \frac{\partial T_w}{\partial U}.$$

Разделив обе части этого равенства на  $\partial F/\partial U (\partial F/\partial T_w)^{-1} + DT_w/DU$  и вычисляя  $DT_w/DU$  из условия теплового баланса, получаем после преобразований

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = \left\{ 1 + \frac{D \ln U}{D \ln j} \left[ 1 + \frac{x^e}{kF} \frac{\partial F}{\partial U} \left( \frac{\partial F}{\partial T_w} \right)^{-1} \right] \right\}^{-1}.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках равно  $-(\partial Q/\partial T)_j^{-1}$  (индекс  $j$  означает, что производная берется при постоянном  $j$ ). Ранее аналогичный результат был получен несколько иначе в [7]. В обычных условиях  $(\partial Q/\partial T)_j < 0$ , и выражение в квадратных скобках заведомо положительно. Следовательно, ответвление неодномерных решений может происходить только на падающем участке вольт-амперной характеристики, так же как это обычно бывает в задачах о джоулевом нагреве слабоионизованной плазмы [8, 9].

Интересно рассмотреть случай, когда вольт-амперная характеристика  $U(j)$  имеет N-образный вид, т. е. содержит два участка роста, разделенные участком убывания. Функция  $\partial Q/\partial T$  на участке убывания ВАХ сначала возрастает от единицы до некоторого максимального значения, а затем убывает обратно до единицы, поэтому каждому собственному значению  $k_i$  соответствует две точки ветвления. Естественно предположить, что одна из этих точек является точкой ответвления, а другая — точкой присоединения одного и того же неодномерного решения. Справедливость этого предположения может быть проверена только численным расчетом.

### 3. Численное решение

В случае, когда электрод является частью стенки, вдоль которой в режиме пограничного слоя течет равновесная слабоионизованная плазма, функцию  $Q$  можно представить в виде [7]

$$Q = \frac{kq_*}{x^e} \left\{ 1 + \frac{2u^2}{4 \exp[-(d \ln \sigma/dT)_*(T_w - T_*)] - u^2} \right\},$$

$$u = U \left[ \frac{2}{x_*} \left( \frac{d\sigma}{dT} \right)_* \right]^{1/2},$$

где  $x(T)$ ,  $\sigma(T)$  — зависимости тепло- и электропроводности плазмы от ее температуры,  $q_*$ ,  $T_*$  — плотность теплового потока на электрод и температура поверхности электрода при  $U=0$ . Индекс «\*» у остальных величин означает, что их значения берутся при  $T=T_*$ .

Вводя нормированную температуру  $\psi = (T - T_*)/(T_* - T_c)$ , задачу (1), (2) запишем в виде

$$\Delta \psi = 0, \quad (19)$$

$$y = 0 : \psi = -1, \quad \Gamma_2 : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (20)$$

$$y = 1 : \frac{\partial \psi}{\partial y} = -1 + \frac{8}{4 - u^2 e^{2\beta\psi}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{d \ln \sigma}{dT} \right)_* \frac{q_* \hbar}{x^e}. \quad (21)$$

Вольт-амперная характеристика, соответствующая одномерному решению этой задачи, имеет один экстремум — максимум [7]. Заметим, что постановка этой задачи не учитывает насыщение проводимости плазмы при высоких температурах за счет кулоновских столкновений. С целью моделирования этого эффекта изменим граничное условие (21) следующим образом:

$$y = 1 : \frac{\partial \psi}{\partial y} = -1 + \frac{8}{4 - u^2 e^{2\beta\psi} (1 + C e^{2\beta\psi})^{-1}}, \quad (22)$$

где  $C$  — некоторая постоянная.

ВАХ, соответствующая одномерному решению задачи (19), (20), (22), имеет уже два экстремума — максимум и минимум, т. е. является N-образной. Так как именно такая ВАХ представляет наибольший интерес, то все дальнейшие рассуждения и результаты расчетов будут касаться главным образом этой задачи, после решения которой можно найти распределение плотности тока по поверхности электрода

$$j = \left[ \frac{q_*^2}{2x_*} \left( \frac{d\tau}{dT} \right)_* \right]^{1/2} v, \quad v = \frac{4u}{4[C + \exp(-2\beta\psi_w)] - u^2}.$$

Вольт-амперная характеристика, соответствующая одномерному решению, описывается следующими параметрическими формулами:

$$v = \left[ \frac{\psi_w(\psi_w + 2)}{C + \exp(-2\beta\psi_w)} \right]^{1/2}, \quad u = \left\{ \frac{4\psi_w[C + \exp(-2\beta\psi_w)]}{\psi_w + 2} \right\}^{1/2},$$

где параметр  $\psi_w$  пробегает значения от нуля до бесконечности.

Значения параметра  $\psi_w$ , соответствующие точкам ветвления, определяются из уравнения

$$k_i \operatorname{cth} k_i = \beta(\psi_{wi} + 2) \psi_{wi} [1 + C \exp(2\beta\psi_{wi})]^{-1}.$$

Численные расчеты проводились для случая, когда область  $G$  — прямоугольник  $\{0 \leq x \leq 2; 0 \leq z \leq b\}$ , где  $b < 2/3$ ,  $\beta = 1$ ,  $C = 0.01$ . В этом случае на падающем участке ВАХ расположены три пары точек ветвления, определяемые вторым, третьим и четвертым собственными значениями

$$k_2 = \frac{\pi}{2}, \quad k_3 = \pi, \quad k_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

В каждой из указанных точек ответвляется по два двумерных решения, асимптотика которых в окрестности этих точек имеет вид

$$\psi = (\psi_{wi} + 1)y - 1 \pm \sqrt{B_i(u_0 - u)} \operatorname{sh} k_i y \cos k_i x + (u_0 - u)(D_i y + F_i + E_i \operatorname{sh} 2k_i y \cos 2k_i x) + \dots, \quad (23)$$

где  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $F_i$ ,  $E_i$  — некоторые постоянные, выражения для которых для краткости не приводятся.

Два решения, ответвляющиеся в первой точке ветвления, монотонны по  $x$ . Эти решения тождественны с точностью до симметрии относительно плоскости  $x=1$ ; можно сказать, что они представляют собой одну и ту же полуволну, но в одном решении это полуволна убывания, а в другом — полуволна роста. Два решения, ответвляющиеся во второй (третьей) точке ветвления, можно рассматривать как последовательности двух (трех) таких чередующихся полуволн убывания и роста; в одном решении первой идет полуволна убывания, в другом — полуволна роста; форма полуволн убывания и роста одинакова; каждая из этих полуволн совпадает с двумерным решением аналогичной задачи для электрода шириной 1 (2/3), ответвляющимся в первой точке ветвления. Решения, ответвляющиеся в четвертой, пятой и шестой точках ветвления, имеют аналогичный характер.

Если одномерное решение описывает режим распределенного протекания тока на электрод, то двумерные решения, ответвляющиеся в первой и шестой, второй и пятой, третьей и четвертой точках ветвления, описывают соответственно первую, вторую, третью моды контрагированного протекания.

В численных расчетах двумерные решения ищутся в виде ряда Фурье по переменной  $x$

$$\psi = -1 + \frac{a_0}{2} y + \sum_{q \geq 1} \frac{2a_q}{q\pi \operatorname{ch}(q\pi/2)} \cos \frac{q\pi x}{2} \operatorname{sh} \frac{q\pi y}{2}. \quad (24)$$

Для определения коэффициентов  $a_q$  имеем нелинейную систему уравнений, для решения которой при каждом значении параметра  $u$  организуется итерационный процесс по методу Ньютона. Расчет каждого решения начинается

со значений  $u$ , близких к  $u_0$ , при этом начальное приближение для первых трех коэффициентов  $a_q$  задается с помощью (23), остальные коэффициенты полагаются равными нулю. Заметим, что даже небольшое отклонение от (23) при задании начального приближения может привести к тому, что итерации сойдутся к одномерному решению или разойдутся. При расчете для каждого следующего значения напряжения  $u$  в качестве начального приближения используется решение, полученное для предыдущего значения. В расчетах учитывалось 35 членов ряда (24).

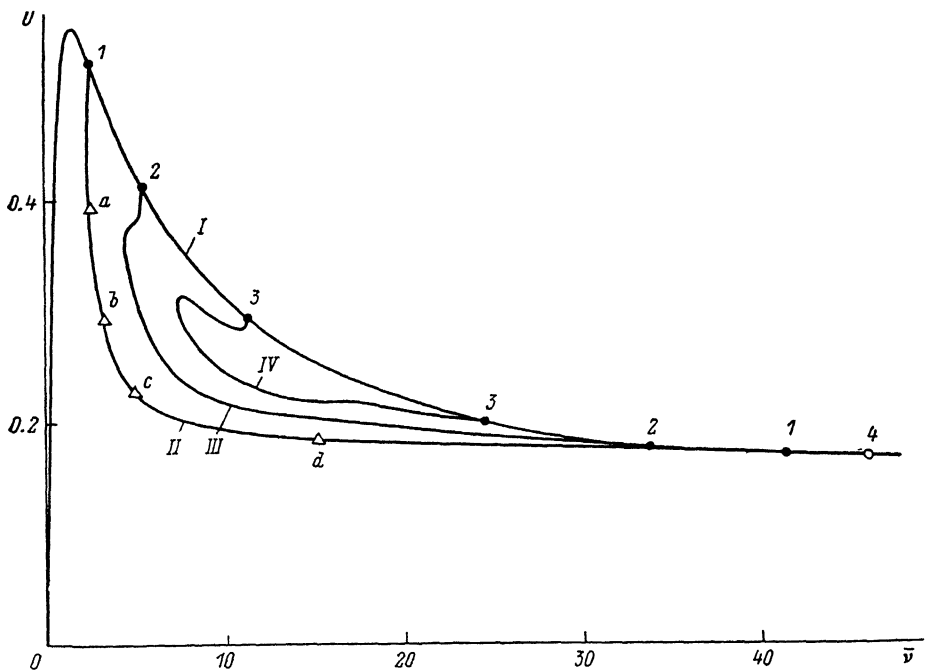


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики.

*I* — ВАХ, соответствующая одномерному решению; *II*, *III*, *IV* — ВАХ, соответствующие двумерным решениям. 1, 2, 3 — точки ветвления, соответствующие второму, третьему и четвертому собственным значениям; 4 — точка минимума одномерной ВАХ.

Результаты расчетов представлены на рис. 2—6. Прежде всего отметим справедливость для данных условий высказанного выше предположения о том, что в точках ветвления, соответствующих одному  $k_i$ , ответвляется и присоединяется одно и то же двумерное решение. Таким образом, в данной задаче имеются три пары двумерных решений, причем каждой паре соответствует одна ВАХ. Эти ВАХ показаны на рис. 2 ( $\bar{v} = \langle v \rangle / S$ , где  $S$  — площадь области  $G$ ). На рис. 3 в крупном масштабе показан вид ВАХ вблизи шестой точки ветвления.

Рассмотрим характер эволюции вдоль ВАХ распределений плотности тока и температуры по поверхности электрода для одного из решений, ответвляющихся в первой точке ветвления, например того, которое представляет полуволну убывания. На рис. 4 представлено распределение плотности тока по поверхности электрода для шести состояний, показанных треугольниками на рис. 2, 3. Видно, что на участке крутого падения двумерной ВАХ (состояния *a*, *b*, *c*) происходит формирование узкого токового пятна с большой плотностью тока (из-за того, что это пятно является весьма узким, по оси  $x$  выбран специальный неравномерный масштаб, растягивающий окрестность точки  $x=0$ ). По мере уменьшения наклона ВАХ максимальная плотность тока быстро уменьшается, а размер пятна растет. На пологом участке ВАХ распределение плотности тока в пятне близко к однородному, а сама ее величина вдоль ВАХ меняется медленно, т. е. увеличение тока на электрод обеспечивается за счет увеличения размеров пятна (например, при переходе от состояния *d* к состоянию *e* ток возрастает более чем в два раза, в то время как максимальная плотность тока умень-



шается примерно на 30 %). При этом величина плотности тока в пятне порядка плотности, соответствующей точке минимума одномерной ВАХ (рис. 4, штриховая линия). В целом распределение тока по электроду на пологом участке

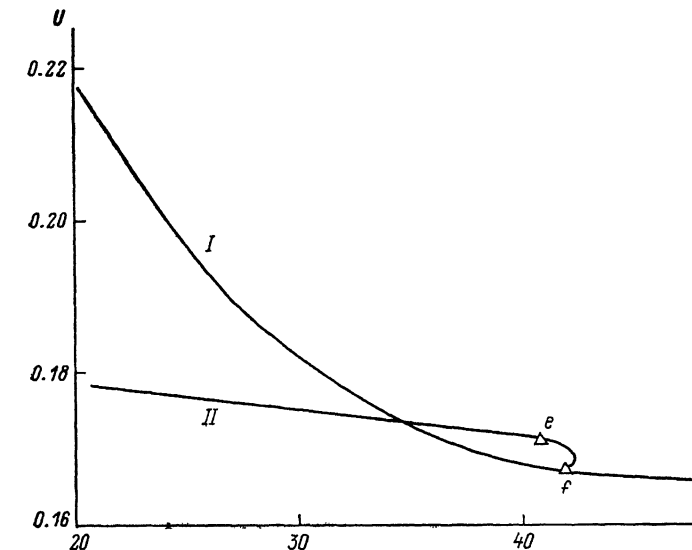


Рис. 3. Присоединение ВАХ, соответствующей двумерному решению, отщепляющемуся в первой точке ветвления.

ВАХ, по-видимому, соответствует тому, которое подразумевают, говоря об эффекте нормальной плотности тока или о режиме с нормальным пятном. Возникновение таких режимов в данной модели связано с насыщением проводимости плазмы с ростом температуры. Это хорошо видно из рис. 5, на котором показана

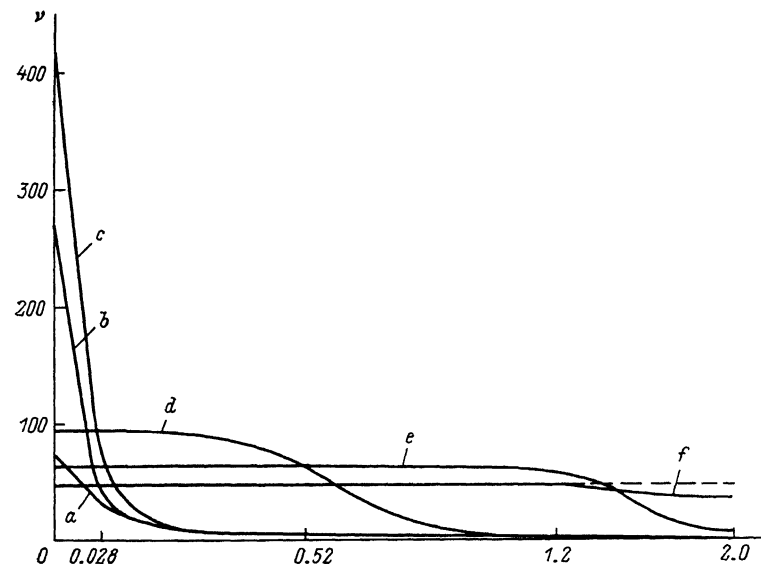


Рис. 4. Распределение нормированной плотности тока по поверхности электрода.

максимальная плотность тока  $\nu_m$  и моделирующая кулоновские столкновения величина  $0.01 \cdot \exp(2\psi_m)$  ( $\psi_m$  — максимальная температура поверхности). По мере того как величина  $0.01 \exp(2\psi_m)$  становится сравнимой с единицей, т. е. становятся существенными кулоновские столкновения,  $\nu_m$  проходит через максимум и затем начинает убывать; по мере дальнейшего увеличения этой

величины, т. е. насыщения проводимости, формируется нормальное пятно. Из рис. 2, 5 видно, что нормальное напряжение несколько превышает напря-

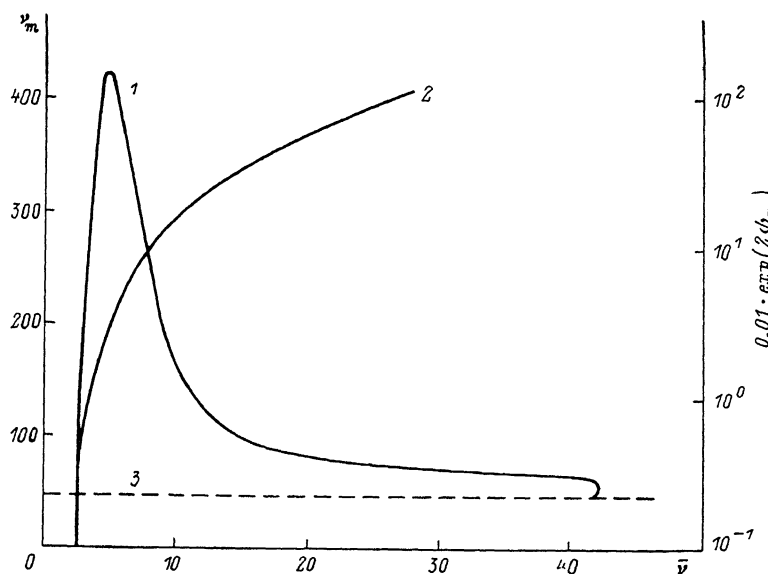


Рис. 5. Зависимость максимальной плотности тока  $v_m$  и величины  $0.01 \exp(2\psi_m)$  от среднего тока на электрод  $\bar{v}$ .

1 —  $v_m$ ; 2 —  $0.01 \exp(2\psi_m)$ ; 3 — значение плотности тока, соответствующее минимуму одномерной ВАХ.

жение, соответствующее точке минимума одномерной ВАХ, а нормальная плотность тока превышает плотность тока в минимуме одномерной ВАХ примерно в полтора раза. Отметим, что в расчетах, проводившихся в рамках модели

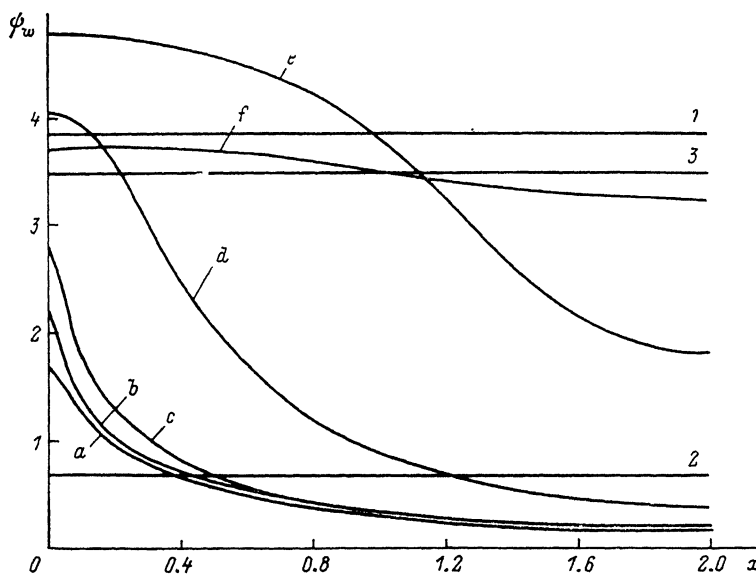


Рис. 6. Распределение нормированной температуры  $\phi_w$  по поверхности электрода. 1, 2, 3 — значения температуры для точки минимума одномерной ВАХ, точек ответвления и присоединения двумерного решения.

(19)—(21), токовое пятно, сформировавшись, продолжает оставаться очень узким и переход к режиму с нормальным пятном отсутствует.

На рис. 6 представлены распределения температуры поверхности электрода для тех же шести состояний. Даже на участке крутого падения ВАХ, где рас-

пределение плотности тока резко неоднородно, температура вдоль поверхности электрода меняется достаточно плавно. Сначала максимальная температура растет вдоль ВАХ, а на последнем участке (при переходе от состояния  $e$  к состоянию  $f$ ) убывает. При переходе от состояния  $c$  к  $d$  и от  $d$  к  $e$  максимальная температура возрастает, а  $v_m$  падает. Это связано с уменьшением напряжения, которое влияет на  $v_m$  сильнее, чем возрастание  $\psi_m$  (вследствие насыщения проводимости).

Характер результатов в общем согласуется с представлениями о неоднородных структурах в нелинейных диссипативных системах, полученными из одномерного или квазиодномерного рассмотрения. Есть, однако, и заметные отличия: например, вольт-амперные характеристики на рис. 2 заметно отличаются от характеристик, полученных в [10] при квазиодномерном рассмотрении задачи о балансе тепла в приэлектродном слое плазмы.

Вопрос об устойчивости стационарных состояний, описываемых полученными решениями, может быть решен относительно просто лишь для одномерных состояний. Неустойчивыми могут быть только состояния на падающем участке ВАХ. Во-первых, возможна неустойчивость к одномерным возмущениям; критерием ее появления является выполнение неравенства

$$-1 < \left[ 1 - \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_j^{-1} \right] \frac{DU/Dj + R}{U|j - R} < 0, \quad (25)$$

где  $R$  — сопротивление нагрузки. Во-вторых, состояния между первой и последней точками ветвления неустойчивы к возмущениям вида  $\text{sh}k_2y\Phi_2(x, z)$ . В-третьих, состояния между второй и предпоследней точками ветвления неустойчивы к возмущениям вида  $\text{sh}k_3y\Phi_3(x, z)$  и т. д.

Таким образом, состояния на растущих участках одномерной ВАХ устойчивы, состояния на участках между максимумом и первой точкой ветвления и между последней точкой ветвления и минимумом могут быть стабилизированы выбором нагрузки (величина  $R$  должна быть такой, чтобы неравенство (25) не выполнялось ни в одной точке этих участков). Состояния на участке между первой и последней точками ветвления неустойчивы. Следовательно, в диапазоне значений тока между первой и последней точками ветвления могут быть стационарными только состояния, описываемые каким-либо из неоднородных решений. Не рассматривая устойчивость этих состояний, заметим лишь, что в большей части указанного диапазона наименьшей мощности для своего поддержания требуют состояния, соответствующие первой моде контрагированного протекания тока (рис. 2, кривая II), затем идут состояния, соответствующие второй моде (кривая III), третьей моде (кривая IV), затем состояния, соответствующие распределенному протеканию (кривая I).

#### Литература

- [1] Николис Ж., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
- [2] Гуревич А. В., Минц Р. Г. УФН, 1984, т. 142, с. 61—98.
- [3] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985. 423 с.
- [4] Юэн Г., Лэйж Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.
- [5] Асиновский Э. И., Бронин С. Я., Залкинд В. И. и др. В сб.: Физико-технические проблемы создания МГДЭС. М.: ИВТ АН СССР, 1985, ч. 1, с. 41—45.
- [6] Мильман М. В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 237—251.
- [7] Бенилов М. С. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1986, № 4, с. 153—163.
- [8] Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1979. 168 с.
- [9] Артемов В. И., Руткевич И. М., Сынжевич О. А. ТВТ, 1980, т. 18, № 6, с. 1126—1136.
- [10] Khaït V. D., Nedospasov A. V. In: IX Intern. Conf. on MHD Electrical Power Generation. Tsukuba, 1986, v. 2, p. 827—836.