

УДК 535.317

**НУЛИ ВИДНОСТИ И ВЕТВЛЕНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОЛОС
ПРИ СУПЕРПОЗИЦИИ ИДЕНТИЧНЫХ СПЕКЛ-ПОЛЕЙ***И. С. Клименко, И. Р. Сатаев, В. П. Рябухо, Б. В. Федулеев*

Рассмотрены закономерности пространственного распределения нулей амплитуды комплексной функции видности и связанных с ними областей ветвления низкочастотных интерференционных полос в поле суперпозиции двух взаимно смещенных идентичных полей. Методом стационарной фазы исследован характер пространственного распределения поверхностей нулевой видности в объеме суперпозиционного спекл-поля. Показано, что в характерных поперечных и продольных сечениях суперпозиционного поля эффект сбоя фазы и ветвления интерференционных полос проявляются по-разному в зависимости от формы апертуры, ограничивающей входной зрачок наблюдательной оптической системы. Результаты экспериментов показали хорошее согласие с выводами теории.

Свойства спекл-полей играют определяющую роль при образовании картины интерференционных полос в голографической и спекл-интерферометрии [1-3]. В частности, тонкая амплитудно-фазовая структура спекл-полей проявляется при их суперпозиции в осцилляциях видности и изменении знака фазы низкочастотной (модулированной спеклами) картины интерференционных полос, отражающей взаимное смещение этих полей [4].

Изменение знака фазы интерференционной картины, проявляющееся в появлении сбоя полос на половину периода, сопровождается, как показано в [5], ветвлением интерференционных полос. Этот эффект, связанный с существованием в интерференционном поле областей с нулевой видностью, внешне во многом аналогичен эффекту рождения и исчезновения высокочастотных (модулирующих спеклы) интерференционных полос [6-8] в точках нулевой амплитуды (дислокациях спекл-поля), наблюдаемому при наложении на это спекл-поле гладкой опорной волны. В настоящей работе рассматриваются закономерности пространственного распределения точек ветвления низкочастотных интерференционных полос в поле суперпозиции двух идентичных спекл-полей и их связь с нулями амплитуды комплексной функции видности.

1. Нули видности в низкочастотной интерференционной картине

Рассмотрим в соответствии с экспериментом [5] световое поле, восстановленное в плоскости x_0y_0 двухэкспозиционной френелевской голограммой диффузно рассеивающего объекта с комплексным коэффициентом отражения $t(\mathbf{r}_0)$, который в промежутке между экспозициями был поступательно смещен в собственной плоскости. Пусть это поле переотображается в плоскость наблюдения x_1y_1 (рис. 1) тонкой положительной линзой с функцией пропускания зрачка $P(\mathbf{r})$.

Интенсивность поля, возникающего в плоскости наблюдения вследствие когерентной суперпозиции спекл-полей с комплексными амплитудами $U_1(\mathbf{r}_1, z)$ и $U_2(\mathbf{r}_1, z)$, будет

$$I(\mathbf{r}_1, z) = |U_1|^2 + |U_2|^2 + U_1U_2^* + U_1^*U_2. \quad (1)$$

Ненормированная функция взаимной когерентности двух спекл-полей $v_{\text{сн}} = U_1 U_2^*$ является случайной функцией координат. Для выделения низкочастотной составляющей произведем усреднение по пространственной области $G_1(\mathbf{r})$, являющейся окрестностью точки (x_1, y_1)

$$v(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{S_G} \int_{G(\mathbf{r}_1)} V_{\text{сн}}(\mathbf{r}_1, z) d\mathbf{r}_1, \quad (2)$$

где S_G — площадь области G .

Выбирая область G большей, чем область корреляции спекл-поля (т. е. большей, чем размер спеклов), и меньшей, чем период ожидаемой низкочастотной интерференционной картины (тогда $v_{\text{сн}}$ можно считать в пределах этой области однородным случайным полем), перейдем от усреднения по реализации в (2) к усреднению по ансамблю и запишем функцию видности низкочастотных интерференционных полос в виде

$$v(\mathbf{r}_1, z) = \langle U_1(\mathbf{r}_1, z) U_2^*(\mathbf{r}_1, z) \rangle. \quad (3)$$

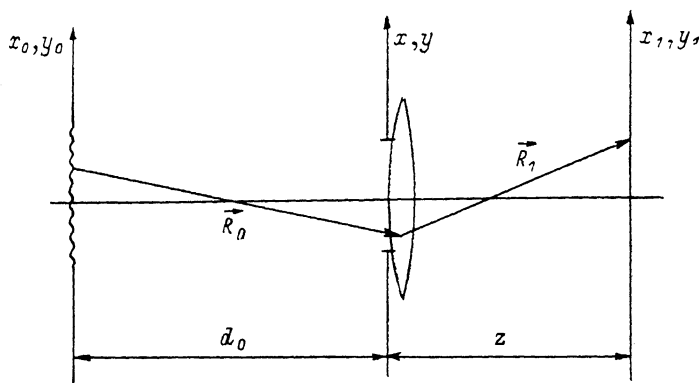


Рис. 1. Схема наблюдения суперпозиционного спекл-поля.

Выразим поле в плоскости наблюдения с помощью интеграла Кирхгофа

$$U_1(\mathbf{r}_1) = \int U_0(\mathbf{r}_0) h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (4)$$

где

$$h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = \int P(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{ik}{2f} |\mathbf{r}|^2\right) \frac{\exp[ik(|\mathbf{R}_0| + |\mathbf{R}_1|)]}{|\mathbf{R}_0||\mathbf{R}_1|} d\mathbf{r} \quad (5)$$

— переходная функция оптической системы.

В (5) использованы следующие обозначения: $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны излучения, f — фокусное расстояние линзы, $R_0 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + d_0^2]^{1/2}$, $R_1 = [(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + z^2]^{1/2}$ (см. рис. 1).

При коллимированном освещении восстановленное поле можно записать в виде

$$U_0(\mathbf{r}_0) = t(\mathbf{r}_0) \exp(ik|\mathbf{r}_0|). \quad (6)$$

Выражение (3) для функции видности с учетом (4)—(6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} v &= \langle \int h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \exp[ik(a\mathbf{r}_0)] t(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0 \int h^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \exp[-ik(a\mathbf{r}_0)] t^*(\mathbf{r}_0 - \mathbf{g}) d\mathbf{r}_0 \rangle = \\ &= \int \int h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) h^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_0) \exp[ika(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0)] \langle t(\mathbf{r}_0) t^*(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{g}) \rangle d\mathbf{r}_0 d\mathbf{r}'_0, \quad (7) \end{aligned}$$

где \mathbf{g} — вектор смещения объекта, \mathbf{a} — единичный вектор нормали к волновому фронту.

Для диффузно рассеивающего объекта можно записать

$$\langle t(\mathbf{r}_0) t^*(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{g}) \rangle = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0 + \mathbf{g}).$$

Тогда, используя фильтрующее свойство дельта-функции и опуская несущественные фазовые множители, получим

$$v = \int h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) h^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0 + \mathbf{g}) d\mathbf{r}_0. \quad (8)$$

Далее, используя для $h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)$ приближение Френеля [9], приведем интеграл (8) к виду

$$v(\mathbf{g}, z) = \exp\left[\frac{ik}{z}(\mathbf{r}_1 \mathbf{g})\right] \int P(\mathbf{r}) P^*(\mathbf{r} - \mathbf{g}) \exp\left[-ik\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)(\mathbf{r} \mathbf{g})\right] d\mathbf{r}, \quad (9)$$

или, если величина сдвига $|\mathbf{g}|$ мала по сравнению с размером апертуры входного зрачка и ее пропускание равно единице,

$$v(\mathbf{g}, z) = \exp\left[\frac{ik}{z}(\mathbf{r}_1 \mathbf{g})\right] \int P(\mathbf{r}) \exp\left[-ik\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)(\mathbf{r} \mathbf{g})\right] d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что функция видности принимает свое максимальное значение при $z=f$ (в фокальной плоскости) и убывает при выходе из фокальной плоскости в ту или другую стороны.

Для круговой апертуры радиуса R видность низкочастотных полос выражается через функцию Бесселя первого рода первого порядка, т. е.

$$v \propto \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}, \quad \text{где } \rho = \frac{|\mathbf{g}|}{\lambda} R \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right). \quad (11)$$

Отсюда следует наличие областей интерференционной картины с нулевой видностью. Поскольку в аргументе функции Бесселя переменной величиной является только координата z , то можно ожидать, что видность полос обращается в нуль во всей плоскости $z = \text{const}$. Однако эксперимент этого не подтверждает. Поэтому рассмотрим поведение функции видности в окрестности точки, которой соответствует нулевое значение видности, вводя функцию кросс-корреляции.

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1, z_2) = \langle U_1(\mathbf{r}_1, z_1) U_2^*(\mathbf{r}_2, z_2) \rangle. \quad (12)$$

Эта функция удовлетворяет в параксиальном приближении параболическому волновому уравнению по каждой из переменных \mathbf{r}_1, z_1 и \mathbf{r}_2, z_2

$$(-1)^{n+1} 2ik \frac{\partial V}{\partial z_n} + \Delta_{\perp n} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1, z_2) = 0, n = 1, 2. \quad (13)$$

Функция видности связана с функцией кросс-корреляции очевидным соотношением

$$v(\mathbf{r}, z) = V(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z, z). \quad (14)$$

Предположим, что функция v обращается в нуль в точке $(0, 0)$. В силу непрерывности функцию V можно разложить в ряд в окрестности точки $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = 0$ по степеням отклонений $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z_1, z_2$, ограничившись начальными членами

$$V = \mathbf{A}\mathbf{R} + B_{jm} R_j R_m + C_j z_j, \quad (15)$$

где $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — вектор, компонентами которого являются компоненты отклонений \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Функция (15) является решением уравнения (13) при условии

$$2ikC_1 = B_{11} + B_{22}, \quad 2ikC_2 = -B_{33} - B_{44}.$$

Подставим (15) в соотношение (14), тогда

$$v(\mathbf{r}, z) = \mathcal{A}\mathbf{r} + \mathcal{B}_{jm} r_j r_m + Cz, \quad (16)$$

где компоненты вектора \mathcal{A} и матрицы \mathcal{B}_{jm} выражены через компоненты \mathbf{A} и B_{jm} .

В малой окрестности точки $\mathbf{r}=0$ можно ограничиться линейными членами, т. е.

$$v(\mathbf{r}, z) = \mathcal{A}\mathbf{r} + Cz = \mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2y + Cz. \quad (17)$$

В работе [6] было показано, что при обходе вокруг точки $(0, 0)$ в плоскости $(x, y, z=0)$ функция вида (17) приобретает дополнительный набег фазы 2π , что соответствует рождению или исчезновению интерференционной полосы.

Если в выражении (17) обращаются в нуль обе компоненты вектора \mathcal{A} , то это решение становится вырожденным и описывает нуль на всей плоскости $z=0$. Однако нуль такого типа неустойчив по отношению к малым возмущениям. Рассмотрим этот случай с учетом слагаемых, пропорциональных r_j, r_m .

$$v(\mathbf{r}, z) = \mathcal{B}_{jm}r_jr_m + Cz + v_0, \quad (18)$$

где $v_0 = u + iv$ — малое возмущение.

Если один из коэффициентов B_{jm} , например $B_{11} \neq 0$, то сдвигом системы координат в плоскости x, z можно привести $V(\mathbf{r}, z)$ к виду (16). Следовательно, функция вида (18) описывает решение по крайней мере с одним изолированным нулем, сдвинутым относительно начала координат.

2. Приближение стационарной фазы

Вернемся к выражению (10) для видности низкочастотных полос, из которого следует обращение видности в нуль на всей плоскости $z = \text{const}$, и рассмотрим его возмущенное решение в виде следующего приближения интеграла Кирхгофа (4). Можно ожидать, что при этом снимется вырожденный характер решения.

Выражение (5) для переходной функции запишем приближенно в виде

$$h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, z) \approx \frac{1}{zd_0} \int_{P(x, y)} \exp \left\{ ik \left[-\frac{x^2 + y^2}{2f} + \sqrt{d_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{z^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \right] \right\} dx dy \approx \int_P \exp [ik\mathcal{F}(x, y)] dx dy. \quad (19)$$

Оценим интеграл (19) методом стационарной фазы. Стационарные точки найдем из уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

При малых отклонениях от оптической оси в плоскостях x_0y_0, xy, x_1y_1 , т. е. при $x_0, y_0, x, y, x_1, y_1 \ll R \ll d_0 \sim f \sim z$ уравнение (20) можно приближенно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \approx -\frac{x}{f} + \frac{x - x_0}{d_0} + \frac{x - x_1}{z} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \approx -\frac{y}{f} + \frac{y - y_0}{d_0} + \frac{y - y_1}{z} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Отсюда найдем приближенные выражения для координат стационарной точки

$$x = l(x_0/d_0 + x_1/z), \quad y = l(y_0/d_0 + y_1/z), \quad (22)$$

где $\frac{1}{l} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d_0} + \frac{1}{z}$.

Вторые производные $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} \approx \frac{1}{l}$. Это означает, что в плоскости изображения, где $\frac{1}{l} = 0$, существует вырожденная критическая точка. Следовательно,

приближение стационарной фазы справедливо вне окрестности плоскости изоб-
ражения.

Поскольку $x, y \leq R$, из (22) имеем

$$l \frac{x_0}{d_0} \sim l \frac{y_0}{d_0} \leq R.$$

Следовательно, $l \leq d_0$, т. е. приближение (22) справедливо вблизи фокаль-
ной плоскости линзы и за ней. Отметим, что ошибка в (22) составляет

$$\delta \partial \mathcal{F}'_{xy} \sim \left(\frac{R}{d_0}\right)^3. \quad (23)$$

Интеграл (19) в соответствии с [10] можно записать в виде

$$h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = K l \exp \left\{ ik \mathcal{F} [x(x_0, x_1), y(y_0, y_1)] + i \frac{\pi}{4} \text{sign } l \right\}, \quad (24)$$

где K — множитель, зависящий от λ , d_0 и z .

Тогда для видности (8) имеем

$$v = \iint_G \exp \{ ik [\mathcal{F}(x_0, y_0) - \mathcal{F}(x_0 + g_x, y_0 + g_y)] \} dx_0 dy_0, \quad (25)$$

где g_x, g_y — компоненты смещения по соответствующим осям, а область G опре-
деляется из условия

$$[x(x_0, x_1)]^2 + [y(y_0, y_1)]^2 \leq R^2. \quad (26)$$

Преобразуем выражение для фазы экспоненты под интегралом следующим
образом

$$\begin{aligned} \psi(x_0, y_0) &= \mathcal{F}[x(x_0), y(y_0)] - \mathcal{F}[x(x_0 + g_x), y(y_0 + g_y)] \approx \\ &\approx \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_0} g_x - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0} g_y = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \frac{\partial x(x_0)}{\partial x_0} g_x - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \frac{\partial y(y_0)}{\partial y_0} g_y + \\ &+ \frac{[x(x_0) - x_0] g_x + [y(y_0) - y_0] g_y}{\sqrt{d_0^2 + [x(x_0) - x_0]^2 + [y(y_0) - y_0]^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу стационарности (см. (20)) имеем

$$\psi(x_0, y_0) = \frac{[x(x_0) - x_0] g_x + [y(y_0) - y_0] g_y}{\sqrt{d_0^2 + [x(x_0) - x_0]^2 + [y(y_0) - y_0]^2}}. \quad (28)$$

Оценим ошибку, возникающую вследствие использования приближения (24).
С учетом (23) имеем $k \delta \psi \sim k \delta \mathcal{F}'_x x(x_0) g_x \sim k \delta \mathcal{F}'_x g_x \sim k g_x (R/d_0)^3$. Для реальных
условий эксперимента $g_x \approx 10 \text{ мкм}^{-1}$, $k \approx 10 \text{ мкм}^{-1}$, $R/d_0 \approx 10^{-1}$, ошибка $k \delta \psi \sim 10^{-1} \ll$
 $\ll 1$.

Ошибка, возникающая вследствие замены в (27) разности дифференциалом,
равна

$$k \delta \psi \sim k \mathcal{F}''_x g_x^2 \sim k g_x \frac{g_x}{d_0}$$

и при $d_0 \approx 10$ см имеем $k \delta \psi \sim 10^{-2} \ll 1$.

Функция (28) не имеет стационарных точек внутри G . Без утраты общности
можно принять, что вектор смещения объекта \mathbf{g} направлен вдоль оси x , тогда

$$\psi(x_0, y_0) = \frac{x(x_0) - x_0}{\sqrt{d_0^2 + [x(x_0) - x_0]^2 + [y(y_0) - y_0]^2}} g. \quad (29)$$

В фокальной плоскости $\psi(x_0, y_0) = \text{const}$, и интеграл (25) легко берется.
Вне фокальной плоскости интеграл

$$v \sim \int_G \exp [ik \Psi(x_0, y_0)] dx_0 dy_0$$

сводится к интегралу вдоль контура G вблизи точек, которые являются стационарными для ограничения ψ на границу области интегрирования [10].

Параметризация границы для круговой апертуры имеет вид

$$\begin{cases} x_0 = \frac{d_0}{l} R \sin t - \frac{d_0}{z} y_1, \\ y_0 = \frac{d_0}{l} R \cos t - \frac{d_0}{z} x_1, \end{cases} \quad (30)$$

где t — параметр, $0 < t < 2\pi$.

Интеграл вдоль границы в этом случае имеет вид

$$\int_{\partial G} \exp\{ik\Psi[x_0(y_0)]\} dy_0 = \frac{d_0}{l} R \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{ik\Psi[x_0(t), y_0(t)] \cos t\} dt \quad (31)$$

и уравнение для определения стационарных точек

$$\frac{\partial \Psi[x_0(t), y_0(t)]}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Вычислив производную, имеем

$$\begin{aligned} & \left[R \cos t \left(1 - \frac{d_0}{l}\right) + \frac{d_0}{z} x_1 \right] \left[R \sin t \left(1 - \frac{d_0}{l}\right) + \frac{d_0}{z} y_1 \right] \frac{d_0}{l} R \cos t + \\ & + \left[R \sin t \left(1 - \frac{d_0}{l}\right) + \frac{d_0}{z} y_1 \right]^2 \frac{d_0}{l} R \sin t = - \frac{d_0}{l} R \sin t d_0^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку в левой части равенства стоят члены, пропорциональные R^2 , а в правой — пропорциональные d_0^2 , то коэффициент при d_0^2 должен быть пропорционален $(R/d_0)^2$, тогда

$$\sin t \propto (R/d_0)^2 \ll 1, \quad \cos t \approx \pm 1.$$

Приближенное решение для (33) имеет вид

$$\sin t_{1,2} = \mp \frac{y_1}{d_0 z} \left[\pm R \left(1 - \frac{d_0}{l}\right) + \frac{d_0}{z} x_1 \right]. \quad (34)$$

Таким образом, для области G , границей которой является окружность, ограничение фазы на границу имеет две стационарные (критические) точки. В соответствии с методом стационарной фазы видность интерференционных полос определяется суммой вкладов от всех критических точек.

3. Точки ветвления низкочастотных интерференционных полос

Рассмотрим распределение видности в интерференционной картине при ограничении суперпозиционного поля апертурами разной формы.

К р у г о в а я а п е р т у р а. Для нее видность можно представить в виде суммы двух комплексных экспонент

$$v(\mathbf{r}_1, z) = A_1(\mathbf{r}, z) \exp[i\Psi_1(\mathbf{r}_1, z)] - A_2(\mathbf{r}_1, z) \exp[i\Psi_2(\mathbf{r}_1, z)]. \quad (35)$$

Функция v обращается в нуль при выполнении условия равенства амплитуд и фаз комплексных экспонент, т. е.

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{r}_1, z) &= A_2(\mathbf{r}_1, z), \\ \Psi_1(\mathbf{r}_1, z) &= \Psi_2(\mathbf{r}_1, z) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Вычислив производную от $\psi[x_0(t_1, 2), y_0(t_1, 2)]$, имеем с точностью до членов $\sim (R/d_0)^2$

$$\frac{1}{\sqrt{\Psi''_{tt}(t_1, 2)}} \propto \left[1 \pm \frac{3}{2} \frac{R x_1 \left(1 - \frac{d_0}{l}\right)}{l z} \right]. \quad (37)$$

Равенство амплитуд обеспечивается при $x_1=0$ или $d_0/l=1$, т. е. при $z=f$. Для фаз с точностью до членов $\sim (R/d_0)^5$ имеем

$$-\frac{kg}{d_0} \left[\frac{R}{b} + \frac{d_0}{z} x_1 \right] \left[1 - \frac{\left(\frac{R}{b} + \frac{d_0}{z} x_1 \right)^2}{2d_0^2} - \frac{\left(\frac{d_0}{z} y_1 \right)^2}{2d_0^2} \right] + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{kg}{d_0} \left[\frac{R}{b} - \frac{d_0}{z} x_1 \right] \left[1 - \frac{\left(-\frac{R}{b} + \frac{d_0}{z} x_1 \right)^2}{2d_0^2} - \frac{\left(\frac{d_0}{z} y_1 \right)^2}{2d_0^2} \right] - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad (38)$$

где $\frac{1}{b} = 1 - \frac{d}{l} = \frac{1}{f} - \frac{1}{z}$.

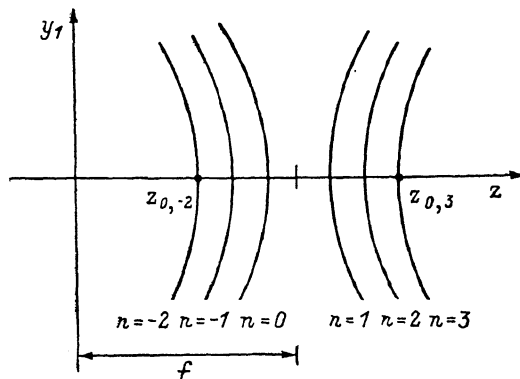


Рис. 2. Линии нулевой видности в плоскости y_1, z .

Это выражение приводится к виду

$$\frac{3x_1^2}{s^2(z)} + \frac{y_1^2}{s^2(z)} = 1, \quad (39)$$

где

$$s^2(z) \approx z^2 \frac{2kg \frac{R}{bd_0} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n}{kg \frac{R}{bd_0}}.$$

Уравнение (39) является уравнением поверхности минимальной видности. Пересечений с фокальной плоскостью эта поверхность не имеет, следовательно нули видности расположены на линиях, являющихся сечениями семейства поверхностей (39) плоскостью $x_1=0$.

Уравнение

$$y_1^2 = s^2(z) \quad (40)$$

описывает семейство линий нулевой видности, расположенных в плоскости y_1, z (рис. 2). Условие касания плоскостью $z=z_{0n}=\text{const}$ поверхности (39) имеет вид

$$s^2(z_{0n}) = 0 \text{ или } 2kg \frac{R}{d_0} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z_{0n}} \right) = \frac{\pi}{2} - 2\pi n. \quad (41)$$

В сечении интерференционной картины плоскостью $z=\text{const}$ по мере удаления от фокальной плоскости появляется вначале пятно нулевой видности, которое затем превращается в эллипс минимальной видности с соотношением полуосей, равным $\sqrt{3}$. На сечении этого эллипса плоскостью $x_1=0$ находятся точки с нулевой видностью, которым, как показано выше, соответствуют точки ветвления полос. Поскольку рассогласование амплитуды происходит во втором порядке малости по x_1/d_0 , видность будет близка к нулю по всему эллипсу, и, несмотря на то что точек ветвления всего две, сбой полос будет распределен

по всему перименту эллипса. Обе точки ветвления полос принадлежат одной линии нулевой видности и отличаются знаками направления вектора касательной к этой линии t_z . Соответственно и знаки (направления) ветвления в плоскости x_1y_1 , как показано в [6], будут противоположными.

На рис. 3 приведена интерференционная картина, полученная при $n=0$ (в нулевом порядке ветвления). В качестве наблюдательной системы использовался объектив с фокусным расстоянием $f=210$ мм и относительным отверстием $1:4.5$. Расстояние от объектива до плоскости восстановленного изображения объекта составляло $d_0=300$ мм. На рис. 3 отчетливо видны эллипс минимальной видности и сбой полос по его периметру.

Кольцевая апертура. В этом случае граница апертуры состоит из двух окружностей, которые дают четыре стационарные точки. Поэтому видность представляется в виде суммы четырех комплексных экспонент с различными амплитудами, что существенно усложняет анализ.

Покажем, что имеется семейство линий нулей видности в плоскости y_1z

$$v \propto A_1(R_1) \exp[ik\Psi(t_1, y_1, R_1)] + A'_1(R_1) \exp[ik\Psi(t_2, y_1, R_1)] + A_2(R_2) \exp[ik\Psi(t_1, y_1, R_2)] + A'_2(R_2) \exp[ik\Psi(t_2, y_1, R_2)], \quad (42)$$

где R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) — радиусы внутренней и внешней границ кольцевой апертуры, t_1 и t_2 определяются соотношением (34).

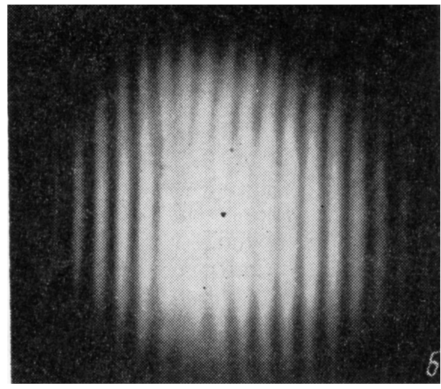
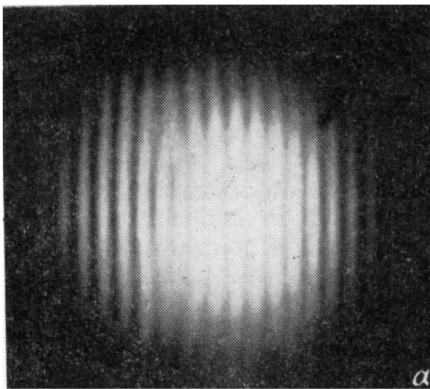


Рис. 4. Поперечные сечения интерференционной картины перед (а) и за (б) фокальной плоскостью, полученные при использовании кольцевой апертуры.

При $x_1=0$ фазы комплексных экспонент, соответствующие t_1 и t_2 , отличаются, как и амплитуды A и A' , только знаками. Следовательно, (42) можно переписать в виде

$$v \propto A_1 \sin[k\Psi(y_1, R_1, z)] + A_2 \sin[k\Psi(y_1, R_2, z)]. \quad (43)$$

Условие $v=0$ задает семейство линий $y_1=f(z, n)$, которое определяется уравнением

$$A_1(R_1) \sin[k\Psi(y_1, R_1, z)] + A_2(R_2) \sin[k\Psi(y_1, R_2, z)] = 0. \quad (44)$$

Фаза Ψ зависит от квадрата y_1 . Это означает, что каждая линия из этого семейства имеет в сечении $z = \text{const}$ две точки $\pm y_1$. Как и в случае круговой апертуры, это означает, что точки ветвления в плоскости $z = \text{const}$ имеют противоположные знаки.

На рис. 4, а, б приведены интерференционные картины, полученные при использовании кольцевой апертуры, в сечениях перед и за фокальной плоскостью. В отличие от случая круговой апертуры точки ветвления достаточно четко локализованы. Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае при выходе из точек с нулевой видностью происходит быстрое рассогласование не только амплитуд, но и фаз суммируемых в (42) комплексных экспонент, т. е. амплитуда видности близка к нулю лишь в малой окрестности линии нулей.

Апертура, состоящая из нескольких щелей. С учетом закономерностей ветвления полос при использовании апертур, ограничен-

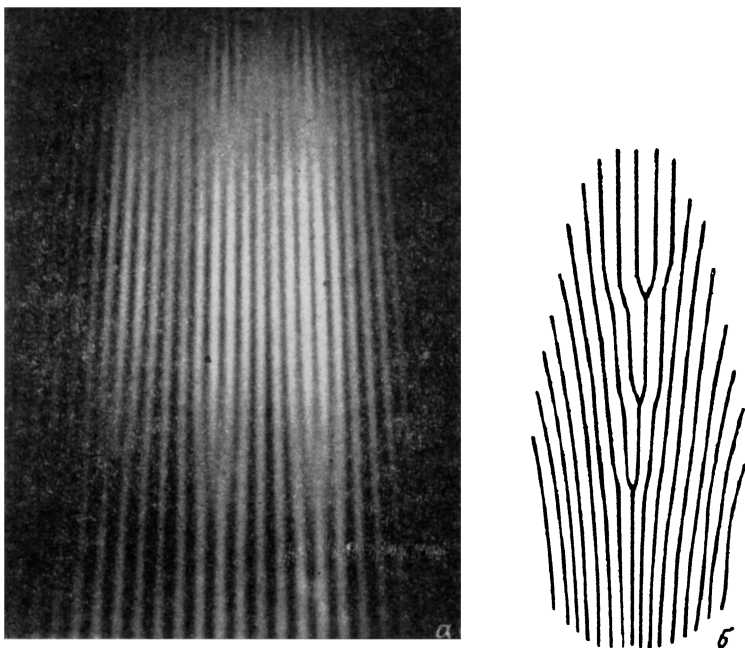


Рис. 5. Продольные сечения интерференционной картины в случае использования апертуры из четырех одинаковых щелей вблизи апертуры (а) и вблизи плоскости изображения объекта (б).

ных окружностями, проведем качественный анализ этого эффекта для случая апертуры, состоящей из двух и большего количества щелей.

Функция пропускания для двух бесконечно длинных щелей шириной l и расстоянием между ними L имеет вид

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x - L/2}{l}\right) + \text{rect}\left(\frac{x + L/2}{l}\right). \quad (45)$$

Подставляя (45) в (10), получим выражение для видности в приближении Френеля

$$v = \frac{\sin\left[\pi l \frac{g}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)\right]}{\pi l \frac{g}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)} \cos\left[\pi L \frac{g}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)\right]. \quad (46)$$

Положение плоскостей нулевой видности определяется из уравнения для быстро меняющегося множителя выражения (46)

$$\cos\left[\pi L \frac{g}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)\right] = 0. \quad (47)$$

В соответствии с определенным выше общим правилом каждая плоскость нулевой видности при снятии вырождения дает линию нулевой видности. Следовательно, в сечении интерференционной картины горизонтальной плоскостью xz наблюдается цепочка ветвлений вдоль оптической оси, проходящей через середину промежутка между щелями.

С увеличением количества щелей, когда в дальней зоне за апертурой имеет место суперпозиция полей от всех щелей, картина ветвления меняется. Так, для трех одинаковых щелей положение плоскостей нулевой видности определим, приравняв нулю быстро меняющийся множитель соответствующего выражения для видности

$$1 + 2 \cos \left[\pi L \frac{g}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right) \right] = 0. \quad (48)$$

Легко показать (например, графически), что корни этого уравнения группируются по парам вдоль оптической оси. Аналогично для четырех щелей линии нулевой видности группируются по три и т. д.

Следует однако подчеркнуть, что вблизи многощелевой апертуры суперпозируют световые поля только от соседних щелей, поэтому интерференционная картина представляет собой набор цепочек ветвления (аналогичных цепочке ветвлений, возникающей в случае двухщелевой апертуры), количество которых на единицу меньше числа щелей в апертуре. В качестве примера на рис. 5, а приведено продольное сечение интерференционной картины за апертурой, состоящей из четырех щелей ($L=1$ см, $l=0.2$ см), полученное по схеме эксперимента [5]. Здесь отчетливо видны три цепочки ветвлений.

Группировка линий нулей вдоль одной продольной оси наблюдается в дальней зоне (в окрестности изображения объекта). Для рассматриваемого случая четырех щелей картина выглядит так, как это показано схематически на рис. 5, б (ввиду невысокого контраста полос соответствующий снимок не приводится).

Заключение

Таким образом, характер ветвления интерференционных полос при суперпозиции идентичных спекл-полей существенно зависит от выбора апертуры, ограничивающей суперпозиционное спекл-поле. Проведенный качественный анализ хорошо объясняет особенности эффекта ветвления для различной формы апертур, наблюдавшихся в экспериментах [5] настоящей работы.

Установленная выше связь между нулями амплитуды комплексной функции видности и точками ветвления низкочастотных интерференционных полос позволяет путем вычисления функции видности определять пространственное положение точек ветвления и степень их локализации.

Следует отметить, что эффект ветвления интерференционных полос в поперечных и продольных сечениях суперпозиционных спекл-полей далеко не ограничен рассмотренным в настоящей работе случаем поперечного смещения идентичных спекл-полей. Ветвящиеся интерференционные полосы можно наблюдать и при других видах смещения идентичных спекл-полей, например вращательном (см. иллюстрации работ [4, 11]), суперпозируемых средствами голографической и спекл-интерферометрии, а также при суперпозиции неидентичных спекл-полей [12].

Полученные в настоящей работе закономерности ветвления полос носят достаточно общий характер и могут быть распространены на другие ситуации, связанные с проявлением этого эффекта.

Литература

- [1] Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1982. 504 с.
- [2] Шуман В., Дюба М. Анализ деформаций непрозрачных объектов методом голографической интерферометрии. М.: Машиностроение, 1983.
- [3] Клименко И. С. Голография фокусированных изображений и спекл-интерферометрия. М.: Наука, 1985. 224 с.
- [4] Клименко И. С., Рябухо В. П., Федулеев Б. В. ЖТФ, 1985, т. 55, № 7, с. 1338—1347.
- [5] Клименко И. С., Рябухо В. П., Федулеев Б. В. ЖТФ, 1985, т. 55, № 5, с. 980—983.

- [6] Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я. ЖЭТФ, 1981, т. 80, № 5, с. 1789—1797.
[7] Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В. и др. ЖЭТФ, 1982, т. 83, № 5, с. 1702—1710.
[8] Абдуллаев С. С., Ахмаджанов Т., Ташпулатов З. Т., Хабибуллаев П. Н. Квант. электр., 1986, т. 13, № 5, с. 1042—1044.
[9] Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970, с. 127.
[10] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1984, с. 125—130.
[11] Клименко И. С., Рябузо В. П., Федулеев Б. В. ЖТФ, 1986, т. 56, № 9, с. 1749—1756.
[12] Горбатенко Б. Б., Клименко И. С., Рябузо В. П. Опт. и спектр., 1987, т. 62, № 6, с. 1367—1372.

Институт повышения квалификации
руководящих работников и специалистов
Министерства промышленности средств связи
Москва

Поступило в Редакцию
16 июля 1987 г.