

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ЗАЗЕМЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ПРОВОДЯЩИМ КОНИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В. П. Беличенко

УДК 537.212

С помощью конечного интегрального преобразования типа Меллина и метода Винера—Хопфа задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода с быстро убывающими элементами матричного оператора. Показано, что решение системы существует единственно в  $L_2$  и может быть получено методами редукции или итераций. С использованием последнего способа найдены полный заряд на конусе, поддерживаемом при постоянном потенциале, и емкость структуры. В частном случае включения в виде диска продемонстрирована эффективность полученного приближенного выражения для расчета емкости. Указан класс задач, допускающих строгое решение на основе развитого подхода.

В [1] подробно описано, в частности, применение метода парных уравнений для определения электростатического поля, производимого заряженными сферическим сегментом или диском внутри заземленной сферической оболочки. При использовании этого метода такие важные характеристики, как суммарная плотность заряда на сегменте (диске) и емкость структуры, выражаются через вспомогательную функцию, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Задача, указанная в заглавии, в принципе может быть решена методом парных уравнений с привлечением разрывных интегралов несколько более общего вида, чем использованные в [2]. Однако в этом случае приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма вследствие сложного вида его ядра сопряжено с большими трудностями и не эффективно при произвольных длине образующей конического включения и угле при его вершине.

В то же время известно [3] строгое и эффективное решение неосесимметричной задачи электростатики для конечного конуса, расположенного в свободном пространстве, основанное на использовании интегрального преобразования Меллина и метода Винера—Хопфа. Поэтому естественной представляется попытка применить метод Винера—Хопфа в сочетании с обобщением интегрального преобразования Меллина на случай конечного промежутка для решения поставленной задачи. Такой подход интересен и с методической точки зрения, так как при решении краевых задач со смешанными условиями, задаваемыми в ограниченном интервале изменения пространственной координаты, метод Винера—Хопфа в сочетании с конечными интегральными преобразованиями, насколько нам известно, не применялся.

### 1. Постановка задачи.

#### Формулировка функционального уравнения

В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  размещена заземленная сферическая оболочка радиуса  $r=b$ , внутри которой в точке с координатами  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  расположен точечный заряд  $q$ . Коническое включение  $\theta=\gamma, r < a < b, \varphi \in (0, 2\pi)$ , поддерживаемое при постоянном потенциале  $V$ , возмущает поле, вы-

ываемое зарядом в отсутствие включения (см. рисунок). Поэтому потенциал полного электростатического поля  $U_{\Sigma}(r, \theta, \varphi)$  можно представить в виде суперпозиции потенциала  $U_0(r, \theta, \varphi)$ , описывающего поле в отсутствие конического включения, и потенциала  $U(r, \theta, \varphi)$ , вызванного наличием включения.

Постановка краевой задачи сводится к следующему: требуется найти гармоническую в области, ограниченной сферической оболочкой, функцию

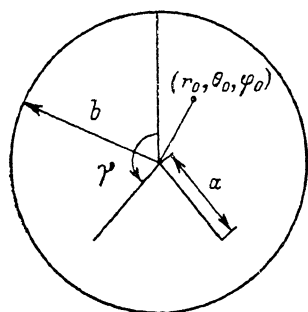
$$\Delta U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

обращающуюся в нуль при  $r=b$ , удовлетворяющую на поверхности конуса граничному условию

$$U_0(r, \gamma, \varphi) + U(r, \gamma, \varphi) = V, \quad r < a, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \quad (2)$$

и условию непрерывности нормальной производной на продолжении конической поверхности

$$\left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma-0} - \left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma+0} = 0, \quad a < r < b, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$



Геометрия структуры в сечении  $\varphi = \varphi_0$ .

Кроме этого, искомое решение должно обеспечивать выполнение условий типа Мейкснера [4] вблизи сингулярных точек включения

$$\sigma(r, \varphi) = O(r^{\beta-1}) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad (3)$$

$$\sigma(r, \varphi) = O((a-r)^{-1/2}) \quad \text{при } r \rightarrow a, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (4)$$

где  $\sigma(r, \varphi)$  — суммарная плотность заряда на конусе, определяемая соотношением

$$r\sigma(r, \varphi) = \varepsilon \left[ \left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma-0} - \left. \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\gamma+0} \right], \quad 0 < r < a, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (5)$$

$\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей сферическую оболочку.

Что касается потенциала  $U_0(r, \theta, \varphi)$ , то представление для него получается элементарно и записывается в виде

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^n - \frac{1}{b} \left( \frac{r_0 r}{b^2} \right)^n \right] P_n(\cos \beta_0), \quad (6)$$

где  $r_{>} = \max(r, r_0)$ ,  $r_{<} = \min(r, r_0)$ ,  $P_n(\cos \beta_0)$  — полином Лежандра,  $\cos \beta_0 = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ .

Сформулированные выше требования обеспечивают существование и единственность решения задачи.

Для решения задачи воспользуемся формулами конечного интегрального преобразования типа Меллина

$$F(\nu) = \int_0^b \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^{\nu} - \left( \frac{r}{b} \right)^{-\nu} \right] f(r) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (7)$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{r}} \int_L \left( \frac{b}{r} \right)^{\nu} F(\nu) d\nu, \quad (8)$$

впервые формально установленного в [5] и строго обоснованного в [6]. В (8) путь интегрирования  $L$  проходит в полосе регулярности функции  $F(\nu)$ .

Учтем симметрию задачи относительно плоскости  $\varphi = \varphi_0$  и подставим в (4) и (5) разложения в ряды Фурье

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(r, \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad \sigma(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m(r) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (9)$$

Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций в интервале  $(0, 2\pi)$ , получим уравнение, которому удовлетворяют коэффициенты Фурье  $U_m(r, \theta)$ , и соотношение для коэффициентов Фурье  $\sigma_m(r)$ , к которым применим преобразование (7). Общее решение полученного при этом уравнения Лежандра для трансформанты  $\bar{U}_m(\nu, \theta)$  функции  $U_m(r, \theta)$  подставим в соотношение для трансформанты функции  $r\sigma_m(r)$ , учитывая при этом естественное требование ограниченности потенциала при  $\theta=0$  и  $\pi$  и его непрерывность при  $\theta=\gamma$ . Тогда получим следующее, справедливое в полосе  $|\operatorname{Re} \nu| < < 1/2$ , представление:

$$\bar{U}_m(\nu, \theta) = \frac{1}{\varepsilon} F_m(\nu) L_m(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm \cos \theta)}{P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm \cos \gamma)}, \quad (10)$$

где

$$F_m(\nu) = \int_0^a \sqrt{r} \sigma_m(r) \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^\nu - \left( \frac{r}{b} \right)^{-\nu} \right] dr, \quad (11)$$

$$L_m(\nu) = \frac{\pi (-1)^m \sin \gamma}{2 \cos \pi \nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + \nu\right)} P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos \gamma), \quad (12)$$

верхние знаки относятся к области  $0 < \theta < \gamma$ , нижние — к  $\gamma < \theta < \pi$ .

Определим далее трансформанту  $\bar{U}_{0m}(\nu, \theta)$  функции  $U_{0m}(r, \theta)$ , являющейся коэффициентом Фурье для  $U_0(r, \theta, \varphi)$ . С этой целью применим преобразование (7) к (6), полученный ряд просуммируем с использованием формулы Дуггола [7], а входящую в выражение для суммы функцию  $P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos \beta_0)$  заменим представлением, выражающим теорему сложения для функции Лежандра [7]. В результате получим

$$\bar{U}_{0m}(\nu, \theta) = \frac{\varepsilon m!}{2\pi \varepsilon \sqrt{r_0} \sin \gamma} \left[ \left( \frac{r_0}{b} \right)^\nu - \left( \frac{r_0}{b} \right)^{-\nu} \right] L_m(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}^{-m}(\mp \cos \theta) P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm \cos \theta_0)}{P_{\nu-1/2}^{-m}(\cos \gamma) P_{\nu-1/2}^{-m}(-\cos \gamma)}, \quad (13)$$

где  $|\operatorname{Re} \nu| < 1/2$ ,  $\varepsilon_m$  — символ Неймана, верхние знаки относятся к случаю  $\theta > \theta_0$ , нижние — к  $\theta < \theta_0$ .

Наконец, применим преобразование (7) к соотношению для коэффициентов Фурье, получаемому после подстановки в (2) разложений типа (9). Тогда с учетом (10) и (13) приходим к следующему функциональному уравнению для функции  $F_m(\nu)$ :

$$\begin{aligned} L_m(\nu) \left\{ F_m(\nu) + \frac{\varepsilon m!}{2\pi \sqrt{r_0} \sin \gamma} \left[ \left( \frac{r_0}{b} \right)^\nu - \left( \frac{r_0}{b} \right)^{-\nu} \right] \frac{P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm \cos \theta_0)}{P_{\nu-1/2}^{-m}(\pm \cos \gamma)} \right\} = \\ = \delta_{0m} \varepsilon V \left[ \frac{a^{\nu+1/2} b^{-\nu}}{\nu+1/2} + \frac{a^{-\nu+1/2} b^\nu}{\nu-1/2} \right] + Q_m(\nu), \quad |\operatorname{Re} \nu| < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\delta_{0m}$  — символ Кронекера; при  $\theta_0 < \gamma$  выбираются верхние знаки, а при  $\theta_0 > \gamma$  — нижние;  $Q_m(\nu)$  — неизвестная целая нечетная функция, имеющая в полуплоскости  $\operatorname{Re} \nu < 0$  асимптотику вида  $Q_m(\nu) \sim a^{\nu+1/2} b^{-\nu} q_m(\nu)$ ,  $q_m(\nu) \rightarrow 0$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в отличие от задачи, рассмотренной в [3], мы получили не обычное, а обобщенное уравнение типа Винера—Хопфа [8]. Соответственно этому его решение не выражается в замкнутом виде. Однако с использованием характерных для метода Винера—Хопфа построений это уравнение может быть преобразовано в эквивалентную ему бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, удобную для решения методом редукции или методом итераций.

## 2. Сведение функционального уравнения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Функция  $F_m(\nu)$ , определяемая равенством (11), допускает представление

$$F_m(\nu) = b^{-\nu} a^{\nu+1/2} F_m^+(\nu) - b^{\nu} a^{-\nu+1/2} F_m^-(\nu),$$

$$F_m^+(\nu) = \int_0^a \sigma_m(r) \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu+1/2} dr, \quad F_m^-(\nu) = F_m^+(-\nu), \quad (15)$$

причем функции  $F_m^{\pm}(\nu)$  вследствие справедливости оценки (3) регулярны в полуплоскостях  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} - \beta$  и  $\operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2} + \beta$  соответственно, и в силу (4) имеет место оценка  $F_m^+(\nu) = O(\nu^{-1/2})$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} - \beta$ . Поскольку функция  $L_m(\nu)$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Re} \nu| < \frac{1}{2} + m$ , мы видим, что уравнение (14) справедливо по крайней мере в полосе  $|\operatorname{Re} \nu| < \frac{1}{2}$ . Считая факторизацию  $L_m(\nu) = L_m^+(\nu) L_m^-(\nu)$  выполненной (соответствующие формулы приведены в [3]), подставим выражение (15) в уравнение (14) и разделим обе его части на  $b^{-\nu} a^{\nu+1/2} L_m^-(\nu)$ . В результате получим

$$L_m^+(\nu) F_m^+(\nu) - H_m(\nu) = T_m(\nu) + S_m(\nu) + \delta_{0m} \varepsilon V \frac{(b/a)^{2\nu}}{\left(\nu - \frac{1}{2}\right) L_m^-(\nu)} + \frac{q_m(\nu)}{L_m^-(\nu)}, \quad (16)$$

где

$$H_m(\nu) = (b/a)^{2\nu} L_m^+(\nu) F_m^-(\nu), \quad (17)$$

$$T_m(\nu) = -\frac{\varepsilon_m q L_m^+(\nu)}{2\pi \sqrt{ar_0} \sin \gamma} \left[ \left(\frac{r_0}{a}\right)^{\nu} - \left(\frac{ar_0}{b^2}\right)^{-\nu} \right] \frac{P_{\nu-1/2}^m(\pm \cos \theta_0)}{P_{\nu-1/2}^m(\pm \cos \gamma)}, \quad (18)$$

$$S_m(\nu) = \frac{\delta_{0m} \varepsilon V}{(\nu + 1/2) L_m^-(\nu)}. \quad (19)$$

Необходимые для дальнейшего представления каждой из функций (17), (18) в виде сумм двух функций, регулярных в перекрывающихся правой и левой полуплоскостях, могут быть получены с помощью интегралов типа Коши. Вычисляя вычеты в простых полюсах соответствующих подынтегральных функций, найдем, что

$$H_m^+(\nu) = \frac{\sin \gamma}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(a/b)^{2n+1}}{(n+1/2+\nu) L_m^+(n+1/2)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} F_m^+(n+1/2) [P_n^m(\cos \gamma)]^2 \quad (20)$$

регулярна и стремится к нулю в полуплоскости  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$  при всех  $m$ . Аналогичными свойствами в левой полуплоскости обладает функция  $H_m^-(\nu) = H_m(\nu) - H_m^+(\nu)$ . При разложении функции  $T_m(\nu)$  следует различать два случая:  $r_0 \geq a$  и  $r_0 < a$ . В первом случае

$$T_m^+(\nu) = -\frac{\varepsilon_m q}{4\pi} \sum_{n=m}^{\infty} \left[ \frac{1}{r_0} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n - \frac{1}{b} \left(\frac{r_0 a}{b^2}\right)^n \right] \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \gamma)}{(1/2+n+\nu) L_m^+(n+1/2)},$$

$$T_m^-(\nu) = T_m(\nu) - T_m^+(\nu). \quad (21)$$

Функция  $T_m^+(\nu)$  регулярна при  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} - m$  и стремится к нулю при  $|\nu| \rightarrow \infty$ . При  $r_0 < a$  получаем

$$\begin{aligned}
T_m^+(\nu) = & -\frac{\varepsilon_m q}{2\pi a \sin \gamma} L_m^+(\nu) \left(\frac{r_0}{a}\right)^{\nu-1/2} \frac{P_{\nu-1/2}^m(\pm \cos \theta_0)}{P_{\nu-1/2}^m(\pm \cos \gamma)} + \\
& + \frac{\varepsilon_m q}{2\pi a \sin \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{\nu_{nm}} \frac{L_m^+(\nu_{nm} + 1/2)}{(\nu - \nu_{nm} - 1/2)} \frac{P_{\nu_{nm}}^m(\pm \cos \theta_0)}{\left. \frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}^m(\pm \cos \gamma) \right|_{\nu=\nu_{nm}}} + \\
& + \frac{\varepsilon_m q}{4\pi b} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{r_0 a}{b^2}\right)^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \gamma)}{(1/2 + n + \nu) L_m^+(n + 1/2)}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Здесь  $\nu_{nm}$  равно  $\alpha_n^m(\gamma) - 1/2$  или  $\alpha_n^m(\pi - \gamma) - 1/2$  в зависимости от того, расположен заряд в области  $\theta < \gamma$  или  $\theta > \gamma$ , причем  $\alpha_n^m(\gamma)$  и  $\alpha_n^m(\pi - \gamma)$  являются нулями по индексу функций  $P_{\nu-1/2}^m(\cos \gamma)$  и  $P_{\nu-1/2}^m(-\cos \gamma)$  соответственно. Функция (22) регулярна и стремится к нулю при  $|\nu| \rightarrow \infty$  в полуплоскости  $\text{Re } \nu > -1/2$ .

Разложение функции  $S_m(\nu)$  (19) легко производится непосредственно

$$S_m^+(\nu) = \frac{\delta_{0m} \varepsilon V}{(\nu + 1/2) L_0^+(1/2)}, \quad S_m^-(\nu) = \frac{\delta_{0m} \varepsilon V}{\nu + 1/2} \left[ \frac{1}{L_m^-(\nu)} - \frac{1}{L_0^+(1/2)} \right]. \quad (23)$$

Объединяя теперь с учетом разложений (20)–(23) члены с разными областями регулярности, находящиеся порознь в правой и левой частях уравнения (16), и используя принцип аналитического продолжения и обобщенную теорему Лиувилля, получим новое функциональное уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию  $F_m^+(\nu)$ . Полагая в этом уравнении последовательно  $\nu = p + 1/2$ ,  $p = m, m + 1, \dots$  и производя замену

$$x_{pm} = \left(\frac{a}{b}\right)^{p+1/2} F_m^+\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

приходим к нормальной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $x_{pm}$

$$x_{pm} + \sum_{n=m}^{\infty} a_{pn} x_{nm} = b_{pm}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{pn} = & -\frac{\sin \gamma}{2} \frac{(a/b)^{n+p+1}}{(n+p+1) L_m^+(n+1/2) L_m^+(p+1/2)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos \gamma)]^2, \\
b_{pm} = & \delta_{0m} \frac{\varepsilon V (a/b)^{p+1/2}}{(p+1) L_0^+(1/2) L_m^+(p+1/2)} + \frac{(a/b)^{p+1/2}}{L_m^+(p+1/2)} T_m^+(p+1/2).
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\{b_{pm}\}_{p=0}^{\infty} \in l_2$ , а матричный оператор  $\mathcal{A}$  с элементами  $a_{pn}$  вполне непрерывен в этом пространстве. Поскольку справедлива оценка  $F_m^+(\nu) = 0$  ( $\nu^{-1/2}$ ) при  $|\nu| \rightarrow \infty$ , то  $\{x_{pm}\}_{p=0}^{\infty}$  также принадлежит  $l_2$ . Это означает, что вследствие единственности решения исходной задачи и допустимости всех произведенных при выводе (24) преобразований эта система имеет единственное нетривиальное решение, которое может быть найдено методом редукции. Кроме того, при  $\gamma = \pi/2$  (в этом случае функция  $L_m^+(\nu)$  выражается в виде отношения гамма-функций) можно строго показать, что норма  $\|\mathcal{A}\|$  матричного оператора меньше единицы при любом соотношении величин  $a$  и  $b$ . Следовательно, при  $\gamma = \pi/2$  система (24) может решаться и методом итераций. Последний вывод справедлив, по-видимому, и для произвольных  $\gamma$ , так как функция  $L_m^+(\nu)$  весьма слабо зависит от  $\gamma$ . Однако его строгое обоснование при  $\gamma \neq \pi/2$  затруднено ввиду сложного представления функции  $L_m^+(\nu)$  через бесконечные произведения [3].

### 3. Представления для потенциала. Емкость структуры

Искомая функция  $U(r, \theta, \varphi)$  может быть представлена бесконечными рядами, содержащими коэффициенты  $F_m^+(n+1/2)$ ,  $n = m, m + 1, \dots$ , определяемые из решения системы (24). Для этого необходимо подставить (15) в (10) и резуль-

тирующее выражение в (8). Тогда для  $U_m(r, \theta)$  получится выражение в виде суммы двух интегралов: первый из них содержит  $F_m^+(v)$  в подынтегральной функции, а второй —  $F_m^-(v)$ . При  $a < r < b$  в интегралах допустимо замыкание контуров интегрирования в правой и левой полуплоскостях соответственно. Вычисляя вычеты в простых полюсах и подставляя затем  $U_m(r, \theta)$  в (9), находим

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{\sin \gamma}{2z} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{n=m}^{\infty} F_m^+\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ \times \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} - \frac{a}{b} \left(\frac{ar}{b^2}\right)^n \right] P_n^m(\cos \gamma) P_n^m(\cos \theta). \quad (25)$$

Если  $0 < r < a$ , то вычисление первого из упомянутых интегралов производится иным образом. С помощью функционального уравнения для  $F_m^+(v)$ , рассматриваемого как определяющее для этой функции, осуществляется ана-

#### Емкость структуры

$b/a$	$\gamma = \pi/2$		$\gamma = 120^\circ$	$\gamma = 140^\circ$	$\gamma = 160^\circ$
2	0.946	0.934	0.810	0.618	0.385
3	0.811	0.808	0.714	0.561	0.361
4	0.759	0.757	0.673	0.536	0.351
5	0.730	0.729	0.651	0.522	0.345
6	0.713	0.712	0.638	0.513	0.341
7	0.701	0.700	0.628	0.507	0.338
8	0.692	0.692	0.621	0.502	0.336
9	0.686	0.685	0.616	0.494	0.335
10	0.680	0.680	0.612	0.496	0.333
$\infty$	$2/\pi$	$2/\pi$	0.577	0.472	0.323

литическое продолжение  $F_m^+(v)$  в левую полуплоскость, а затем вычисляются вычеты в полюсах, лежащих в этой полуплоскости. В окончательном виде удобнее записать выражение для потенциала полного поля

$$U_{\Sigma}(r, \theta, \varphi) = V \left[ 1 + \frac{1}{L_0^+\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_{n0}} \frac{L_0^+\left(\nu_{n0} + \frac{1}{2}\right)}{\nu_{n0}} \frac{P_{\nu_{n0}}(\pm \cos \theta)}{\frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}(\pm \cos \gamma) \Big|_{\nu=\nu_{n0}}} \right] - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_{km}} L_{\nu_{km}}^+\left(\nu_{km} + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times \frac{P_{\nu_{km}}^+(\pm \cos \theta)}{\frac{\partial}{\partial \nu} P_{\nu}^+(\pm \cos \gamma) \Big|_{\nu=\nu_{km}}} \left\{ H_m^+\left(-\nu_{km} - \frac{1}{2}\right) + T_m^+\left(-\nu_{km} - \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (26)$$

Первый член в (26) описывает поле уединенного (т. е. находящегося в свободном пространстве) конуса, заряженного до потенциала  $V$  [3]. Второй член учитывает конечность конуса и его «взаимодействие» со сферической оболочкой. Если  $r_0 < a$  и точки наблюдения и расположения заряда находятся по одну сторону от поверхности конуса, то (после подстановки в (26) выражения (22) для  $T_m^+(v)$ ) из (26) выделяется в явном виде член, представляющий потенциал поля, создаваемого точечным зарядом, помещенным над полубесконечным конусом  $\theta = \gamma$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

Ряды (25) и (26) сходятся абсолютно и равномерно в соответствующих областях внутри сферической оболочки и удовлетворяют всем условиям задачи. В качестве примера приложения полученного решения вычислим емкость структуры в том случае, когда заряд отсутствует ( $q=0$ ), а конус поддерживается при потенциале  $V$ . Полный заряд конуса определяется нулевой азимутальной гармоникой суммарной плотности распределения зарядов

$$Q = \sin \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(r, \varphi) r dr = 2\pi \sin \gamma \int_0^a \sigma_0(r) r dr = 2\pi a \sin \gamma F_0^+ \left( \frac{1}{2} \right).$$

Величину  $F_0^+(1/2)$  определим из системы (24), решая ее методом итераций. Ограничиваясь в третьем приближении метода итераций членами порядка  $(a/b)^3$ , получим в окончательном виде следующее выражение для емкости  $C$  структуры:

$$C = \frac{2\pi\epsilon a \sin \gamma}{\left[ L_0^+ \left( \frac{1}{2} \right) \right]^2 - \frac{\sin \gamma}{2} \left( \frac{a}{b} \right)}. \quad (27)$$

Более простое выражение для емкости получается при  $\gamma = \pi/2$

$$C \Big|_{\gamma = \frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi\epsilon a}{\pi/2 - a/b}. \quad (28)$$

В таблице приведены результаты расчета величины  $C/4\pi\epsilon a$  по формулам (27), (28) и взятые из [1] (первая строка таблицы). Значения функции  $L_0^+(1/2)$  при  $\gamma \neq \pi/2$  рассчитывались по формулам из [3] с использованием алгоритмов, описанных в [9]. Отметим, что в [1] при расчете емкости потребовалось численное решение интегрального уравнения. В то же время полученное простое приближенное выражение для случая  $\gamma = \pi/2$  позволяет достаточно точно рассчитать емкость при  $b/a \geq 2$ .

Хотя в работе рассмотрена задача электростатики, ясно, что предложенная методика применима к любым неосесимметричным краевым задачам для уравнения Лапласа (или Пуассона) в сферической области с коническим или биконическим разрезом. Кроме того, она применима при решении двумерных задач в цилиндрической области с клиновидным разрезом. Методика допускает обобщение на задачи электродинамики и акустики, если вместо преобразования (7), (8) использовать конечное интегральное преобразование типа Конторовича—Лебедева [10] или родственное ему (в зависимости от типа граничного условия на сфере  $r=b$ ).

#### Литература

- [1] Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [2] Лебедев Н. Н., Скальская И. П. ЖВМиМФ, 1969, т. 9, № 6, с. 1336—1346.
- [3] Вайслейб Ю. В. ЖТФ, 1970, т. 40, № 9, с. 1785—1798.
- [4] Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- [5] Naylor D. J. Math. and Mech., 1963, v. 12, N 2, p. 265—274.
- [6] Harrington W. J., Patel K. A. SIAM J. Math. Anal., 1973, v. 4, N 1, p. 1—7.
- [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
- [8] Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
- [9] Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Кравченко Г. Г. ЖВМиМФ, 1984, т. 24, N 7, с. 1102—1106.
- [10] Уфлянд Я. С. В кн.: Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976, с. 93—106.

Сибирский физико-технический институт им. В. Д. Кузнецова при Томском государственном университете

Поступило в Редакцию  
13 июля 1987 г.