

УДК 537.533.33

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИАФРАГМИРОВАННОЙ ЭМИССИОННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНЗЫ

И. В. Богданов, Н. П. Занадворов, Ю. А. Флегонтов

Приведено решение электронно-оптической задачи о расчете поля типовой электростатической катодной линзы. Применяется новый численно-аналитический метод, позволяющий получить потенциал в виде гармонических рядов, коэффициенты которых выражены через решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Анализируется значение данного решения как «ключевого» для определения потенциала более сложных систем.

Введение

Приборы для электронно-оптического преобразования и усиления изображения являются необходимым звеном большинства современных оптических, телевизионных и других систем для передачи, преобразования и записи информации. Требования к их информационной емкости задают и основную оптическую точность, с которой необходимо вычислять параметры электронных траекторий, а следовательно, и высокую точность определения электростатического поля. Требования к точности расчета поля еще выше для эмиссионных линз, в которых траектории неустойчивы вблизи эмиттера (катода).

В различных методах, разработанных для расчета поля таких систем [1-3], большую роль играют решения «ключевых» задач расчета поля модельных конструкций, достаточно близких по форме электродов к типовым, но допускающих получение решения в аналитической либо численно-аналитической форме. Каждый пример получения таких решений, допускающих строгое вычисление поля, служит, кроме того, для последующей оценки сходимости численных алгоритмов, разработанных для определения поля в более сложных случаях.

В большинстве опубликованных работ аналитические либо численно-аналитические методы, из которых наиболее эффективными являются метод парных интегральных либо сумматорных уравнений [3-6], развивались для расчета поля моделей сравнительно простой формы: систем плоских либо сферических диафрагм, плоских, сферических, цилиндрических конденсаторов и т. п. (см., например, [7-9]).

В последнее время разрабатывались и новые эффективные методы «сшивания» решений в частичных областях (метод связанных интегральных уравнений), допускающие численно-аналитические алгоритмы при достаточно сложных краевых условиях (подобласти ограничены координатными поверхностями некоторых, вообще говоря, различных ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении Лапласа) [3, 10-12].

В данной статье приводится решение таким методом задачи о потенциале электростатической катодной линзы с диафрагмой. Общая форма электродов модели (меридиональное сечение их представлено на рисунке) соответствует широко применяющимся типовым конструкциям [1-3]. Поле в каждой подобласти представлено в виде гармонических рядов, коэффициенты которых вычисляются через решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Решение допускает выделение особенности

в поверхностной плотности заряда, возникающей на кантах бесконечно тонких электродов.

В статье приводятся также некоторые новые результаты по суммированию цилиндрических функций.

Построение решения уравнения Лапласа

В осесимметричной области (см. рисунок, где указаны и оси цилиндрической системы координат) поверхность $S_0 = \{z=0, r \leq R; z < l, r=R\}$ служит катодом и потенциал на ней $U(r, z)|_{S_0}$ принят равным нулю. Поверхность $S_1 = \{c < z < l, r=r_0; z=b, a < r < r_0; z=l, r \leq r_0\}$ служит анодом и $U(r, z)|_{S_1} = 1$. Для того чтобы замкнуть область, на поверхности $S_2 = \{r=l, r_0 < r < R\}$ задан потенциал цилиндрического конденсатора.

Строгое решение краевой задачи Дирихле — электростатический потенциал $U(r, z)$ — удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \text{а) } \Delta U = 0, \quad \text{б) } U|_{S_0} = 0, \quad \text{в) } U|_{S_1} = 1, \\ & \text{д) } U|_{S_2} = \ln(r/R)/\ln(r_0/R). \end{aligned} \quad (1)$$

Кроме того, должны выполняться условия непрерывности функции $U(r, z)$ вместе с ее первыми производными во всех внутренних точках области.

Область определения $U(r, z)$ разбита на три подобласти, как это указано на рисунке. Если $U_i(r, z)$ — потенциал в подобласти с номером i ($i = 1, 2, 3$), то условия непрерывности (условия сшивания) принимают вид

$$U_1(r_0, z)|_{z < c} = U_2(r_0, z)|_{z < c}, \quad (2a)$$

$$\partial U_1(r, z)/\partial r|_{r=r_0, z < c} = \partial U_2(r, z)/\partial r|_{r=r_0, z < c}, \quad (2б)$$

$$U_1(r, b)|_{r < a} = U_3(r, b)|_{r < a}, \quad (2в)$$

$$\partial U_1(r, z)/\partial z|_{z=b, r < a} = \partial U_3(r, z)/\partial z|_{z=b, r < a}. \quad (2г)$$

Решения в областях 1, 2, 3 ищем в виде

$$U_1(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n) \frac{I_0(n\pi r/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} \sin \frac{n\pi z}{b} + \frac{z}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n J_0(\beta_n r) \frac{\text{sh } \beta_n z}{\text{sh } \beta_n b},$$

$$U_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{W_0(n\pi r/l)}{W_0(n\pi r_0/l)} \sin \frac{n\pi z}{l} + f(r) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_0(\gamma_n r) \frac{\text{sh } \gamma_n (l-z)}{\text{sh } \gamma_n l},$$

$$U_3(r, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n J_0(\beta_n r) \frac{\text{sh } \beta_n (l-z)}{\text{sh } \beta_n (l-b)}. \quad (3)$$

Здесь $f(r) = \ln(r/R)/\ln(r_0/R)$, J_0 — функция Бесселя, I_0 — модифицированная функция Бесселя,

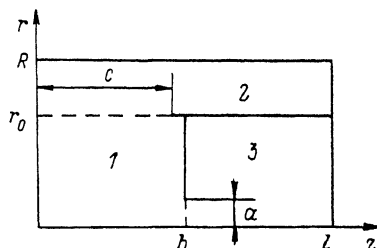
$$W_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right) = I_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right) K_0\left(\frac{n\pi R}{l}\right) - I_0\left(\frac{n\pi R}{l}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right), \quad (4)$$

где K_0 — функция Макдональда,

$$\omega_0(\gamma_n r) = N_0(\gamma_n r) J_0(\gamma_n r_0) - N_0(\gamma_n r_0) J_0(\gamma_n r), \quad (5)$$

где N_0 — функция Неймана, γ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) — корни уравнения $\omega_0(\gamma_n R) = 0$; β_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) — корни уравнения

$$J_0(\beta_n r_0) = 0, \quad (6)$$



Сечение электронной линзы в плоскости r, z . В зазоре (последний не показан) между катодом и анодом потенциал электрического поля логарифмический.

R — радиус катода, r_0 — радиус анода, a — радиус диафрагмы, l — длина линзы, b — координата анода, c — координата «закрайки».

b_n, c_n — коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье соответственно функций $-f(r), 1 - z/b$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_0(\gamma_n r) = -f(r), \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi z}{b} = 1 - \frac{z}{b}. \quad (7)$$

Коэффициенты a_n, d_n и e_n подлежат определению из условий сшивания. Заметим при этом, что краевые условия (1) выполняются в формулах (3) на внешнем контуре области тождественно.

В дальнейшем введены следующие обозначения: $W_1(x) = -W'_0(x)$, $\omega_1(x) = -\omega'_0(x)$, с учетом которых получаем

$$b_n = \frac{2r_0 \omega_1(\gamma_n r_0)}{[\gamma_n \{R^2 \omega_1^2(\gamma_n R) - r_0^2 \omega_1^2(\gamma_n r_0)\}]}, \quad c_n = \frac{2}{n\pi}. \quad (8)$$

Аналогично тому, как это делается в методе парных уравнений, представим искомые коэффициенты в виде интегральных преобразований неизвестных непрерывных, имеющих интегрируемые производные функций $\varphi(t), \psi(t)$

$$a_n = b \int_0^c dt J_1\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \psi(t), \quad (9)$$

$$d_n = l \int_0^c dt J_1\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \psi(t), \quad (10)$$

$$e_n = \frac{\xi_n}{\beta_n^2} \int_0^a dt (\cos \beta_n t - \cos \beta_n a) \varphi(t), \quad (11)$$

где нормировочные постоянные равны $\xi_n = 2r_0^{-2} J_1^{-2}(\beta_n r_0)$.

Используя [13] интегральное представление для функции Бесселя

$$J_1(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z dt \frac{t}{z} (z^2 - t^2)^{-1/2} \sin t$$

и рассматривая его в качестве коэффициентов в разложении Фурье разрывной функции

$$q(t) = \begin{cases} (t/z)(z^2 - t^2)^{-1/2}, & 0 < t < z, \\ 0, & l > t > z, \end{cases}$$

нетрудно получить указанное разложение в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \begin{cases} (x/t)(t^2 - x^2)^{-1/2}, & 0 < x < t, \\ 0, & t \leq x < l \end{cases} \quad (12)$$

и аналогичное разложение с заменой l на b .

Условие сшивания (2а) с учетом равенств (5)–(7) принимает вид

$$\sum_n d_n \sin \frac{n\pi z}{b} = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi z}{l} \equiv p(z), \quad 0 \leq z \leq l. \quad (13)$$

Подстановка (9) и (10) в (13) с использованием равенства (12) и аналогичного ему с заменой l на b приводит к соотношению

$$\frac{lb}{\pi^2} \int_z^c dt (z/t)(t^2 - z^2)^{-1/2} \psi(t) = p(z), \quad z < c, \quad (14)$$

которое позволяет удовлетворить условию (2а) тождественно относительно функции $\psi(t)$.

Из разложения (12) следует также, что

$$p(z) = 0, \quad z \geq c. \quad (15)$$

Это позволяет удовлетворить краевому условию (1с) тождественно относительно функции на боковой поверхности цилиндра $r=r_0$.

Для того чтобы в явном виде выделить в плотности заряда на поверхности цилиндра $r=r_0$ слабо сингулярную часть, имеющую особенность в точке $z=c$, выделим в выражении $dU_1(r, z)/dr_{r=b}$ ряд

$$Q(z) = \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \sin \frac{n\pi z}{b}. \quad (16)$$

Подставим в (16) коэффициенты d_n из равенства (10) и выполним интегрирование по частям. Кроме того, заметим, что функция $\psi(t)$ — решение полученных ниже интегральных уравнений, из которых непосредственно следует, что $\psi(0)=0$, а производная $\psi'(t) \in L_1(0, c)$. Тогда находим

$$Q(z) = \psi(c) \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{n\pi c}{b}\right) \sin \frac{n\pi z}{b} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{b} \int_0^c dt J_0\left(\frac{n\pi t}{b}\right) \psi'(t). \quad (17)$$

Свойства производной $\psi'(t)$ обеспечивают абсолютную сходимость второго из рядов (17), а для первого из них, который является разрывным рядом, можно получить равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{n\pi c}{b}\right) \sin \frac{n\pi z}{b} = \begin{cases} (2\pi)^{-1} (z^2 - c^2)^{-1/2}, & b > z > c \\ 0, & 0 < z < c \end{cases} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda e^{-\lambda b} \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{sh } \lambda b} \times \\ \times I_0(\lambda c) |_{c < b, z < b}. \quad (18)$$

Подобные преобразования с потенциалом $U_2(r, z)$ позволяют, как видно на примере (18), окончательно выделить слагаемое, имеющее особенность в плотности заряда на поверхности анода $r=r_0$.

Аналогично доказывается выполнение условия (2b) тождественно относительно функции $\varphi(t)$ на основании равенства

$$\int_0^z dr r (z^2 - r^2)^{-1/2} J_0(\beta_n r) = \sin \beta_n z / \beta_n.$$

Этот факт приводит к известному разложению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin \beta_n t}{\beta_n} J_0(\beta_n r) = \begin{cases} (t^2 - r^2)^{-1/2}, & r < t < r_0, \\ 0, & r > t \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (11) в условие (2b), используя (3) и проводя интегрирование по частям, получим, имея в виду разложение (19),

$$U_1(r, b) = U_3(r, b) = \begin{cases} \int_r^a dt (t^2 - r^2)^{-1/2} F(t), & r < a, \\ 0, & a < r < r_0, \end{cases} \quad (20)$$

где обозначено через $F(t) \equiv \int_0^t dt \varphi(t)$.

Нетрудно, как и в (17), выделить особенность в плотности заряда на поверхности $S_1^* = (r=b, a < r < r_0)$, имея в виду [5] следующее разложение (разрывный ряд):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\cos \beta_n t - \cos \beta_n a}{\beta_n} J_0(\beta_n r) = \begin{cases} (r^2 - t^2)^{-1/2}, & t < r < a \\ 0, & a > t > r \end{cases} + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda (\operatorname{ch} \lambda a - \operatorname{ch} \lambda t) \frac{K_0(\lambda r_0)}{I_0(\lambda r_0)} I_0(\lambda r). \quad (21)$$

Условия сшивания (2б) и (2г) с использованием разложений (18) и (21) приводят к системе двух линейных неоднородных интегральных уравнений второго рода с ядрами Фредгольма относительно неизвестных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Проследим процесс получения указанных уравнений на примере выполнения условия (2г), где объем принципиально несложных, но громоздких, промежуточных вычислений меньше.

После подстановки интегрального представления (11) в (3) условие сшивания (2г) приводит к равенству

$$\pi \sum_n (-1)^n n d_n \frac{I_0(n\pi r/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} + \left\{ b \int_0^a dt \varphi(t) \sum_n \frac{\xi_n}{\beta_n} [\operatorname{cth} \beta_n b + \operatorname{cth} \beta_n (l-b) - 2] + \right. \\ \left. + 2b \int_0^a dt \varphi(t) \sum_n \frac{\xi_n}{\beta_n} \right\} (\cos \beta_n t - \cos \beta_n a) J_0(\beta_n r) = -1 - \pi \sum_n (-1)^n n c_n \frac{I_0(n\pi r/b)}{I_0(n\pi r_0/b)}.$$

Используя (21) для преобразования второго из интегралов левой части последнего равенства и применяя линейное преобразование Шлемильха [14] к функции $I_0(n\pi r/b)$ и к единице, находим

$$\int_0^x dx (x^2 - t^2)^{-1/2} \left\{ \int_0^a \varphi(t) dt \left[\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\lambda (\operatorname{ch} \lambda a - \operatorname{ch} \lambda t) \frac{K_0(\lambda r_0)}{I_0(\lambda r_0)} \operatorname{ch} \lambda x + \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\xi_n}{\beta_n} [\operatorname{cth} \beta_n b + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{cth} \beta_n (l-b) - 2] (\cos \beta_n t - \cos \beta_n a) \cos \beta_n \right\} + \frac{1}{\pi b} + \frac{1}{b} \sum_n (-1)^n n (c_n + \right. \\ \left. + d_n) \frac{\operatorname{ch}(n\pi x/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} + \varphi(x) \right\} = 0. \quad (22)$$

Для выполнения последнего равенства достаточно, чтобы функция $\varphi(t)$ удовлетворяла интегральному уравнению

$$\varphi(x) + \int_0^a dt K(x, t) \varphi(t) = \Phi(x), \quad (23)$$

где значения ядра и «свободного члена» вытекают из (22). В «свободный член» здесь входят еще неизвестные коэффициенты d_n .

Аналогичные, но более громоздкие выкладки, проделанные при выполнении условия сшивания (2б), позволяют в итоге свести задачу к системе двух линейных интегральных уравнений второго рода с ядрами Фредгольма. В стандартной форме полученная система интегральных уравнений имеет вид

$$\varphi(x) + \int_0^a du K(x, u) \varphi(u) + \int_0^c dv L(x, v) \psi(v) = f(x), \\ \psi(y) + \int_0^c dv M(y, v) \psi(v) + \int_0^a du N(y, u) \varphi(u) = g(y), \quad (24)$$

$$L(x, v) = \frac{l}{b} \sum_n (-1)^n n \frac{J_1(n\pi v/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b},$$

$$M(y, v) = M_1 + M_2 + M_3,$$

$$M_1 = \frac{y}{2bl} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \frac{e^{-\lambda}}{\text{sh } \lambda} \left[\frac{l}{b} I_1\left(\frac{\lambda y}{b}\right) I_1\left(\frac{\lambda v}{b}\right) + \frac{b}{l} I_1\left(\frac{\lambda y}{l}\right) I_1\left(\frac{\lambda v}{l}\right) \right],$$

$$M_2 = \frac{\pi^2}{2b^2} y \sum_n n \left[\frac{I_1(n\pi r_0/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} - 1 \right] J_1\left(\frac{n\pi y}{b}\right) J_1\left(\frac{n\pi v}{b}\right),$$

$$M_3 = \frac{\pi^2}{2l^2} y \sum_n n \left[\frac{W_1(n\pi r_0/l)}{W_0(n\pi r_0/l)} - 1 \right] J_1\left(\frac{n\pi y}{l}\right) J_1\left(\frac{n\pi v}{l}\right),$$

$$N(y, u) = -\frac{\pi y}{r_0^2 b l} \sum_n \frac{I_1(\beta_n y)}{J_1(\beta_n r_0)} \frac{\cos \beta_n u - \cos \beta_n a}{\beta_n \text{sh } \beta_n b},$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi b} - \frac{1}{b} \sum_n (-1)^n n c_n \frac{\text{ch}(n\pi x/b)}{I_0(n\pi r_0/b)},$$

$$g(y) = \frac{\pi^3 y}{2bl} \left\{ -\frac{1}{b} \sum_n n c_n \frac{I_1(n\pi r_0/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} J_1\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_n b_n \gamma_n \omega_1(\gamma_n r_0) \left[\frac{2}{\pi} + \right. \right. \\ \left. \left. + L_1(\gamma_n y) - I_1(\gamma_n y) \text{cth } \gamma_n l \right] + \frac{2}{\pi^2} \left(r_0 \ln \frac{r_0}{R} \right)^{-1} \right\}. \quad (25)$$

Здесь L_1 — модифицированная функция Струве.

Ряды, входящие в выражения для M_2 , M_3 и g , сходятся медленно, и их практическое вычисление в приведенной форме затруднительно. Однако эти ряды можно представить в модифицированной форме, выделив медленно сходящуюся часть.

Для численного расчета удобно использовать следующие оригинальные формулы суммирования и интегрирования цилиндрических функций:

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\frac{n\pi x}{b}\right) J_1\left(\frac{n\pi t}{b}\right) = \frac{b}{\pi^2} \frac{1}{xt(x+t)} \left[(x^2 + t^2) K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) - \right. \\ \left. - (x+t)^2 E\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right) \right], \quad x, t \in [0, \pi), \quad (26)$$

$K(k)$, $E(k)$ — эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода,

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\frac{n\pi x}{b}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \text{ctg } \theta \left(\frac{\pi x}{2b} \sin \theta \right) \sin \theta, \quad (27)$$

$$\int_0^{\infty} d\lambda \lambda \frac{e^{-\lambda}}{\text{sh } \lambda} I_1\left(\frac{\lambda x}{b}\right) I_1\left(\frac{\lambda t}{b}\right) = \\ = 6b^3 x t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[4b^2 n^2 - (x-t)^2]^{5/2}} F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 3; \frac{4xt}{4b^2 n^2 - (x-t)^2}\right), \quad (28)$$

${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $x, t \in [0, b)$.

Отметим, что методы решения интегральных уравнений (24) хорошо разработаны, а сами решения устойчивы относительно погрешности вычисления.

При расчетах электронно-оптических параметров первого порядка, характеризующих свойства изображения, а также абберационных интегралов, достаточно вычислять распределение потенциала лишь на оси симметрии линзы. Такое распределение особенно просто выражается через решения интегральных уравнений (24), а именно:

$$U_1(0, z) = l \int_0^c dt \psi(t) \sum_n \frac{J_1(n\pi t/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} \sin \frac{n\pi z}{b} + \frac{z}{b} + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \frac{\sin(n\pi z/b)}{I_0(n\pi r_0/b)} + \frac{2}{r_0^2} \int_0^a dt \varphi(t) \sum_n \frac{\cos \beta_n t - \cos \beta_n a}{\beta_n^2 J_1^2(\beta_n r_0) \text{sh } \beta_n b} \text{sh } \beta_n z. \quad (29)$$

$$U_3(0, z) = 1 + \frac{2}{r_0^2} \int_0^a dt \varphi(t) \sum_n \frac{\cos \beta_n t - \cos \beta_n a}{\beta_n^2 J_1^2(\beta_n r_0)} \frac{\text{sh } \beta_n (l-z)}{\text{sh } \beta_n (l-b)}. \quad (30)$$

Поскольку ряды (29), (30) сходятся экспоненциально быстро во внутренних точках областей I и 3 , они допускают почленное дифференцирование, что особенно важно при вычислении абберационных интегралов. Напомним, что при $z=b$ потенциал выражается в виде одной квадратуры (20).

Заключение

Приведенное здесь решение краевой задачи теории потенциала является «ключевым» для расчета широкого класса электронных линз. Оно может быть положено в основу итерационных процессов, построенных методами теории возмущений для областей более сложного вида, вписанных в данную [15]. Кроме того, найденное решение позволяет исследовать поле диафрагмы, которое при малом ее радиусе трудно поддается определению численными методами, позволяет выяснить влияние особенностей производной вблизи «кантов» области, оценить сходимость численных методов.

Методические способы применения техники парных уравнений для областей сложной формы с осевой симметрией, а также полученные формулы для суммирования и интегрирования специальных функций представляют, по мнению авторов, интерес не только для решения рассмотренной в настоящей статье краевой задачи, но и более широкий интерес.

Литература

- [1] Баранова Л. А., Явор С. Я. Электростатические электронные линзы. М.: Наука, 1986. 191 с.
- [2] Ильин В. П. Численные методы решения задач электрооптики. Новосибирск: Наука, 1974. 202 с.
- [3] Власов А. Г., Шапиро Ю. А. Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем. Л.: Машиностроение, 1974. 183 с.
- [4] Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 167 с.
- [5] Sneddon J. Mixed boundary value problem of potential theory. Amsterdam, North Holland, 1968. 373 p.
- [6] Цейтлин А. И. ПММ, 1966, т. 30, № 2, с. 259—270.
- [7] Лебедев Н. Н. ДАН СССР, 1957, т. 114, № 3, с. 513—516.
- [8] Минков И. М. ЖТФ, 1962, т. 32, № 12, с. 1409—1412.
- [9] Шапиро Ю. А. ЖТФ, 1962, т. 32, № 6, с. 686—694.
- [10] Флегонтов Ю. А. В кн.: Методы расчета электронно-оптических систем. Новосибирск, 1982, с. 144—149.
- [11] Занадворов Н. П., Флегонтов Ю. А. Опт. и спектр., 1984, т. 57, № 3, с. 527—531.
- [12] Флегонтов Ю. А., Петрова И. Ю. РИЭ, 1986, т. 31, № 7, с. 1422—1429.
- [13] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 1095 с.
- [14] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. т. 1. М.: ИЛ, 1949. 800 с.
- [15] Флегонтов Ю. А. В кн.: Алгоритмы и методы расчета электронно-оптических систем. Новосибирск, 1983, с. 29—33.

Поступило в Редакцию
30 июля 1987 г.