

УДК 53 8.56.02 9.6

ХАОС И БИФУРКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ТОРОВ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ФЕРРИТОВЫМ РЕЗОНАТОРОМ

И. С. Арансон, Н. Ф. Рудков

Экспериментально, численно и аналитически исследованы переходы к хаосу в автогенераторе с ферритовым резонатором. Показано, что причиной возникновения хаоса является резонансное взаимодействие близких по частоте мод ферритового резонатора. Непосредственно из уравнений Максвелла для электромагнитных полей и уравнений Ландау—Лифшица для ферромагнетиков получена математическая модель, описывающая процесс такого взаимодействия. Численное исследование этой модели показало, что в ней возможен переход к хаосу путем удвоения двумерных торов. Произведено экспериментальное исследование генератора, работающего в диапазоне 2—4 ГГц, и показано, что в типичной ситуации переход к хаосу осуществляется путем удвоения двумерных торов. Исследованы также бифуркации торов размерности три и выше.

Автогенераторы с ферритовыми резонаторами (АФР) широко используются в технике СВЧ диапазона 0.5—40 ГГц в качестве широкодиапазонных источников синусоидальных колебаний. Основными их достоинствами являются быстрая электрическая перестройка частоты в полосе более октавы, малый вес, размеры и т. д. [1].

Известно [2, 3], что АФР могут излучать стохастически модулированные колебания. В данной работе показывается, что причиной стохастичности в АФР является резонансное взаимодействие близких по частоте мод ферритового резонатора. Непосредственно из уравнений Ландау—Лифшица для ферромагнетиков и Максвелла для электромагнитных полей получена математическая модель, описывающая процесс такого взаимодействия. Показано, что хаос может возникать в результате взаимодействия всего трех мод резонатора, причем переход к стохастичности осуществляется путем удвоения двумерных торов.

Произведено экспериментальное исследование АФР, работающего в диапазоне 2—4 ГГц, и показано, что в типичной ситуации автономный АФР также переходит к хаосу через удвоение торов. В экспериментах исследованы наблюдавшиеся бифуркации торов размерности два и три. Рассмотрено влияние на переход к хаосу слабой НЧ периодической внешней модуляции частоты АФР. Полученные экспериментальные результаты демонстрируют качественное соответствие с теоретическими.

1. Математическая модель АФР

На рис. 1 представлена упрощенная схема АФР. Он состоит из шарообразного ферритового резонатора, помещенного в однородное магнитное поле H_0 , создаваемое управляющими катушками. Величина H_0 определяет частоту автоколебаний. Связь активного элемента (транзистора или диода Ганна) с резонатором осуществляется круговым витком тонкого провода, плоскость которого параллельна силовым линиям H_0 .

Упрощенно работу АФР можно представить следующим образом: изменения тока витка связи I создают магнитное поле, которое вызывает колебания намагниченности в феррите. Собственная частота этих колебаний близка к гиромагнитной: $\omega_g = \gamma H_0$ (γ — гиромагнитная постоянная). Колебания намагничен-

ности приводят к появлению в витке напряжения самоиндукции U , от которого зависит ток через виток I . Если в рабочей точке активный элемент обладает достаточно большой отрицательной проводимостью S_1 , то в рассматриваемой системе возможно установление автоколебаний с частотой, близкой к гиромагнитной.

Будем считать активный элемент точечным, а зависимость тока через активный элемент от напряжения на нем U аппроксимируем в рабочей точке полиномом третьей степени

$$I(U) = -S_1 U + b S_1 U^3/3 + \dots, \quad (1)$$

где b — нелинейная проводимость. Введем следующие обозначения: m — магнитный момент единицы объема, H — напряженность магнитного поля, h —

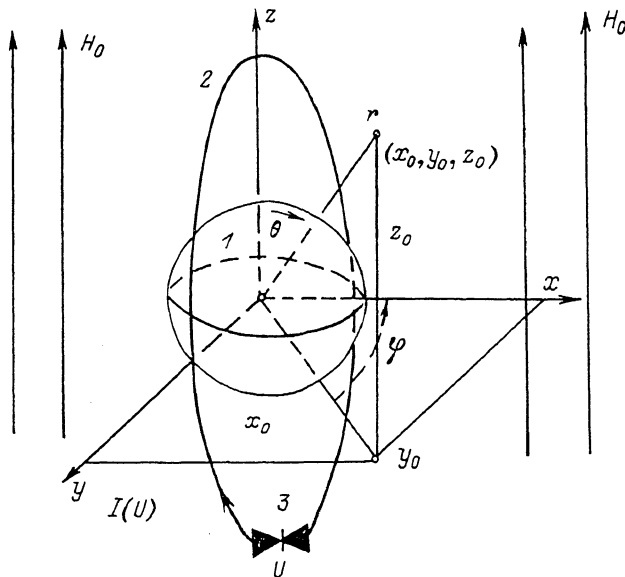


Рис. 1. Упрощенная схема АФР.

1 — ферритовый резонатор, 2 — виток связи, 3 — активный элемент.

переменная составляющая магнитного поля, H_i — постоянное внутреннее магнитное поле феррита, M_0 — остаточная намагниченность, c — скорость света, j — плотность тока. Будем выводить замкнутую систему уравнений для напряжения U непосредственно из исходных уравнений Максвелла и Ландау—Лифшица [4]. При выводе математической модели используем то, что характерные размеры АФР (радиус витка R и радиус резонатора a) много меньше длины волны, на которой происходит генерация. Поэтому в дальнейшем все поля будем считать квазистатическими. В этом приближении уравнения для феррита запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{m} / \partial t &= -\gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}], \\ \text{rot}(\mathbf{h}) &= 0, \quad \text{div}(\mathbf{B}) = 0, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} + \mathbf{h} + \mathbf{H}_i, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 - M_0/3, \end{aligned} \quad (2)$$

а для свободного пространства

$$\text{rot}(\mathbf{h}) = 4\pi \mathbf{j} / c, \quad \text{div}(\mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{h} + \mathbf{H}_0. \quad (3)$$

Напряжение U , создаваемое вихревым электрическим полем \mathbf{E} , определяется из выражения (S_v — площадь поверхности витка, L_v — контур витка)

$$U = \oint_{L_v} \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_v} B_n dS / c, \quad (4)$$

где $E_i = (\mathbf{E}, \mathbf{l})$, $B_n = (\mathbf{B}, \mathbf{n})$, \mathbf{n} — вектор нормали к витку, \mathbf{l} — касательный к витку вектор. Для замыкания уравнений (2)–(4) необходимо добавить также граничные условия для соответствующих компонент полей.

Поскольку поля считаем квазистатическими, то переменное магнитное поле \mathbf{h} выражается через магнитоэлектрический потенциал p : $\mathbf{h} = \nabla p$. Предполагая теперь, что все величины изменяются по закону $\sim e^{i\omega t}$, из (2) для p получим известное уравнение Уолкера [5]

$$(\chi + 1)(\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2) + \partial^2 p / \partial z^2 = 0 \quad (5)$$

с условиями непрерывности p , $\partial p / \partial n$ на границе феррита. Здесь

$$\chi = \Omega_h / (\Omega_h^2 - \Omega^2), \quad \Omega = \omega / 4\pi\gamma M_0, \quad \Omega_h = H_i / 4\pi M_0,$$

x, y, z — декартовы координаты, причем ось z параллельна H_0 . Общее решение (5) выражается через сферические функции. Внутри феррита оно имеет следующий вид:

$$p = \sum P_n^m(g) P_n^m(q) (G_n^m \cos(m\varphi) + iH_n^m \sin(m\varphi)), \quad (6)$$

вне феррита

$$p = \sum P_n^m(\cos\theta) (r^n (A_n^m \cos(m\varphi) + iB_n^m \sin(m\varphi)) + r^{-(n+1)} (D_n^m \cos(m\varphi) + iF_n^m \sin(m\varphi)), \quad (7)$$

где $P_n^m(\dots)$ — присоединенные полиномы Лежандра; $A_n^m, B_n^m, G_n^m, H_n^m, D_n^m, F_n^m$ — неизвестные коэффициенты; r, θ, φ — сферические координаты (рис. 1); g, q, φ — специальные координаты, связанные с x, y, z выражениями

$$x = a(-\chi)^{1/2} (1 - q^2) (1 - g^2)^{1/2} \cos(\varphi), \quad y = a(-\chi)^{1/2} (1 - q^2) (1 - g^2)^{1/2} \sin(\varphi),$$

$z = a(\chi / (1 - \chi))^{1/2} qg$ [6]. Отметим, что для пространства вне феррита члены, содержащие r в положительной степени, обусловлены внешними источниками, а в отрицательной — намагниченностью феррита. Используя граничные условия на поверхности феррита, можно выразить $D_n^m, G_n^m, H_n^m, F_n^m$ через A_n^m, B_n^m , т. е. решить задачу о возбуждении ферритового резонатора внешними полями. В свою очередь A_n^m, B_n^m определяются через магнитное поле витка связи. Это поле выражается через ток $I(U)$, поэтому, используя (1), (4), (6), (7), можно получить замкнутую систему уравнений для напряжения U .

Рассмотрим вначале простейший случай: радиус резонатора много меньше радиуса витка ($a/R \ll 1$), т. е. создаваемое витком поле в центре резонатора можно считать однородным: $\mathbf{h}_e = 2\pi I(U) / cR \mathbf{x}_0$ (\mathbf{x}_0 — орт x). Соответствующий потенциал p_e запишется в виде

$$p_e = 2\pi I(U) P_1^1(\cos\theta) \cos(\varphi) / cR = A_1^1 P_1^1(\cos\theta) \cos(\varphi). \quad (8)$$

Из сравнения (8) с (7) следует, что в этом случае отличен от нуля лишь один коэффициент с $m=n=1$: $A_1^1 = 2\pi I(U) / cR$. Соответствующий тип колебаний для ферритового резонатора является простейшим и называется однородной прецессией. Для АФР же эта мода является рабочей, и ее коэффициент возбуждения, как правило, наибольший.

Используя (8), выразим все величины через I и U . В силу (6) внутри феррита имеем

$$p = (G_1^1 x + iH_1^1 y) / a (-\chi)^{1/2} \quad [6].$$

Для нормальной компоненты индукции B_x поэтому получаем

$$B_x = \partial p / \partial x + 4\pi m_x = ((1 + \chi) G_1^1 + s H_1^1) / a (-\chi)^{1/2}, \quad \text{где } s = \Omega / (\Omega_h^2 - \Omega^2).$$

Напряжение U вычислим по формуле (4), разбивая интеграл площади витка на две части: I_1 — интеграл по сечению резонатора S_r , I_2 — интеграл по остальной площади S_0 . Для I_1 получаем

$$I_1 = \iint_{S_r} B_x dS = \pi a ((1 + \chi) G_1^1 + s H_1^1) / (-\chi)^{1/2}.$$

Учитывая теперь, что члены с коэффициентами D_1^1, F_1^1 существенного вклада в I_2 не дают, так как содержат спадающие r^{-2} поля, для I_2 имеем

$$I_2 = \iint_{S_0} B_x dS = \iint_{S_0} A_1^1 dS = \pi A_1^1 (R^2 - a^2) = 2\pi^2 I(U) (R^2 - a^2) cR.$$

Учитывая теперь связь между коэффициентами [6]

$$G_1^1 = \frac{3a(3 + \chi)(-\chi)^{1/2} A_1^1}{(3 + \chi)^2 - s^2}, \quad H_1^1 = \frac{3a(-\chi)^{1/2} s A_1^1}{(3 + \chi)^2 - s^2},$$

для I_1 окончательно получаем выражение

$$I_1 = \frac{3\pi a^2 ((1 + \chi)(3 + \chi) - s^2)}{(3 + \chi)^2 - s^2} A_1^1 = \frac{2\pi a^2}{cR} \left(\frac{2\Omega_r}{3(\Omega_r^2 - \Omega^2)} + 1 \right) I(U),$$

где $\Omega_r = \Omega_{11} = \Omega_h + 1/3$. Подставляя I_1, I_2 в (4), получим в операторном виде связь величин I, U (здесь и далее подразумевается, что $i\Omega = d/dt$)

$$U = -8\pi^3 \gamma M_0 i \Omega (a^2 \Omega_r / (\Omega_r^2 - \Omega^2) + R^2) I(U) / c^2 R. \quad (9)$$

Слагаемое $\sim 8\pi^3 \gamma M_0 i \Omega R I(U) / c^2$ в (9) имеет физический смысл эффективной индуктивности витка. Как правило, для АФР эта величина очень мала, и ей можно пренебречь. Учитывая (1), из (9) получаем уравнение Ван-дер-Поля

$$d^2 U / dt^2 + \Omega_r^2 U = \epsilon (1 - U^2) dU / dt. \quad (10)$$

Здесь сделаны замены: $U \rightarrow bU, t \rightarrow 4\pi \gamma M_0 t$; $\epsilon = 16\pi^3 \gamma M_0 a^2 \Omega_r S_l / 3c^2 R$ — безразмерный малый параметр, характеризующий величину нелинейности. Поскольку для АФР типичны следующие значения параметров: $a \sim 1$ мм, $S_l = 0,1$ Ом $^{-1}$, $a/R \sim 1/2$, $4\pi \gamma M_0 \sim 1$ ГГц, то ϵ получаем порядка 0.01—0.06. Малость ϵ позволяет при анализе процессов в АФР использовать асимптотические методы усреднения [7].

Рассмотрим теперь многомодовую модель АФР. Очевидно, что в реальных условиях отношение a/R не может быть очень мало, так как при этом резко падает связь резонатора с активным элементом (обычно $a/R \sim 1/2$). Поэтому поле витка нельзя считать однородным. Неоднородность же этого поля приводит к возбуждению высших мод резонатора ($m, n > 1$). Действительно, потенциал витка задается выражением [4]

$$p(x_0, y_0, z_0) = -\frac{x_0 I}{c} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty (z_0^2 + R_0^2 + r_0'^2 - 2R_0 r_0' \cos(\varphi))^{-1/2} r_0' dr_0' d\varphi, \quad (11)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки наблюдения; $R_0^2 = y_0^2 + z_0^2$; $r_0^2 = x_0^2 + R_0^2$.

Разлагая подынтегральное выражение (11) в ряд по степеням r_0/r_0' , с точностью до $O((r_0/r_0')^3)$ получим

$$\begin{aligned} p(x_0, y_0, z_0) &= -2\pi I / c \cdot (x_0 - x_0^3 / 3R^3 + 3x_0 R_0^2 / 4R^2 + \dots) = \\ &= -2\pi I / cR \cdot P_1^1(\cos(\theta)) + \cos(\varphi) + \pi I r^3 / cR^3 (P_3^1(\cos(\theta)) \cos(\varphi) - \\ &\quad - P_3^3(\cos(\theta)) \cos(3\varphi) / 24). \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (12), во втором приближении уже возбуждаются две паразитные моды с индексами $m=1, n=3$ и $n=m=3$. Однако с ростом m, n коэффициенты возбуждения паразитных мод быстро стремятся к нулю. Например, для значения $a/R=1/2$ максимальный среди паразитных колебаний коэффициент возбуждения имеет мода с $m=1, n=3$, но и он примерно в восемь раз меньше, чем у основного колебания. Это очень важное обстоятельство позволяет в дальнейшем не учитывать взаимодействие всех мод резонатора, а ограничиться конечным числом мод (причем не очень большим), которые имеют относительно высокие коэффициенты возбуждения.

Запишем общее уравнение движения многомодового генератора. Обозначим через $L_n^m(i\Omega)$ квазилинейный дифференциальный оператор, выражающий

связь между величинами U и I для каждой из мод. Подставляя p_n в виде (12) и вычисляя интеграл в (4), по аналогии с (9) получим

$$U = -i\Omega \sum L_n^m(i\Omega) I(U). \quad (13)$$

Оператор $L_n^m(i\Omega)$ удобно представить в виде

$$L_n^m(i\Omega) = L_n^m(i\Omega) / (\Omega_{mn}^2 - \Omega^2), \quad (14)$$

где Ω_{mn} — резонансная частота моды с индексами m, n , а оператор $L_n^m(i\Omega)$ не содержит резонансных особенностей на этой частоте. Используя теперь (14), общее уравнение генератора запишем в виде

$$U = -i\Omega \sum L_n^m(i\Omega) / (\Omega_{mn}^2 (1 + w_{mn} U^2) + i g_{mn} \Omega - \Omega^2) I(U). \quad (15)$$

Каждое слагаемое в (15) эквивалентно колебательному контуру, поэтому (15) описывает взаимодействие бесконечного набора связанных слабонелинейных колебательных контуров. В (15) введены феноменологические факторы: g_{mn} — коэффициент затухания; $w_{mn} U^2$ — нелинейный сдвиг частоты, порожденный нелинейностью феррита. Эти факторы в принципе могут быть получены непосредственно из исходных уравнений, однако это очень громоздкая процедура, и ее приводить здесь не будем.

2. Хаотические колебания в маломодовой модели АФР

Поведение решений бесконечномерного уравнения (15) существенно зависит от резонансных соотношений между частотами Ω_{mn} . На рис. 2 приведены зависимости Ω_{mn} от величины H_0 . Из этого рисунка видно, что моды с $m=n$ (следовательно, и рабочее колебание с $m=n=1$) имеют линейную зависимость Ω_{mn} от H_0 , а моды с m/n преимущественно нелинейную. Вследствие этого существуют значения поля H' , при которых частоты резонанса паразитных и рабочего типов колебаний совпадают (внутренний резонанс), что приводит к их эффективному взаимодействию.¹ Более того, ввиду высокой степени симметрии резонатора частоты резонанса паразитных колебаний, как правило, вырождены. Поэтому в типичном случае происходит взаимодействие сразу с несколькими паразитными модами (минимум с двумя).

Известно [8], что точное совпадение частот резонанса Ω_{mn} нетипично — произвольно малые дефекты резонатора приводят к перезамыканию зависимостей $\Omega_{mn}(H_0)$. На рис. 2, б показано влияние дефектов на пару взаимодействующих мод. Видно, что вместо двух независимых типов колебаний возникает одно совместное [8]. Аналогичное явление имеет место и при взаимодействии трех мод.

В точках внутреннего резонанса могут реализоваться нетривиальные режимы генерации. Для правильного качественного описания этих явлений преобразуем (15) следующим образом: а) ограничимся анализом взаимодействия всего трех мод — основной и двух паразитных, — а влиянием всех остальных нерезонансных пренебрежем; б) заменим операторы на постоянные $K_n^m = L_n^m(i\Omega_{mn} = i\Omega_0)$, ($\Omega_0 = \Omega_{mn}(H')$), поскольку в точке внутреннего резонанса они — медленно изменяющиеся функции от Ω ; в) учтем эффект перезамыкания и расщепления частот Ω_{mn} , введя в (15) новые параметры $d_{1,2}$, характеризующие связь между резонансными модами. Тогда уравнение (15) запишется в следующем виде:²

$$U = -i\Omega (\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 K / ((\Omega_0^2 - \Omega^2)^3 + d_1 + d_2 (\Omega_0^2 - \Omega^2) + (\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 (\Omega_0^2 w U^2 + i\Omega g')) I(U). \quad (16)$$

¹ Если частоты Ω_{mn} далеки от внутреннего резонанса, то, поскольку у рабочего колебания коэффициент возбуждения значительно выше, чем у паразитных, в общем случае в силу эффекта конкуренции будет реализоваться квазисинусоидальный режим генерации на основной частоте.

² Очевидно, что при $d_{1,2} = 0$ имеем трехмодовый аналог уравнения (15).

Уравнение (15) удобно записать в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} (d^2/dt^2 + \Omega_0^2) U &= V, & (d^2/dt^2 + \Omega_0^2) V &= W, \\ (d^2/dt^2 + \Omega_0^2) W &= \varepsilon (K(1 - W^2) dW/dt - wW^3 - g' dW/dt) + d_1 U + d_2 V. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь сделаны следующие обозначения и замены: $K = 1 + (K_n^n + K_n^{m'})/K_1$ — нормированный суммарный коэффициент возбуждения; $g' = (g_{11} + g_{mn} + g_{m'n'})$; $w = (w_{11} + w_{mn} + w_{m'n'})$ — суммарные коэффициенты затухания и нелинейности; $U \rightarrow bU$. Будем считать рассматриваемый резонанс сильным $d_{1,2} \ll 1$, т. е.

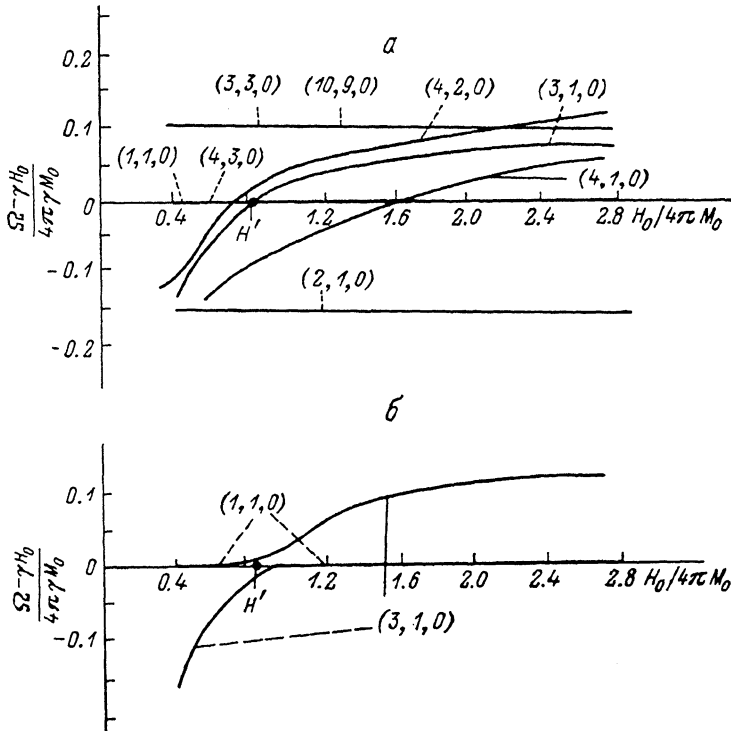


Рис. 2. Зависимость собственных частот ферритового резонатора от магнитного поля H_0 (третий индекс на рисунке означает номер корня дисперсионного уравнения).

а — зависимости Ω_{mn} от H_0 в идеальном феррите, б — пере замыкание зависимостей Ω_{mn} от H_0 в феррите с дефектами.

параметры $d_{1,2}$, характеризующие расстройки между модами, малы. Тогда, отыскивая при $|\varepsilon| \ll 1$ решение (17) в виде

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = (K(K - g'))^{1/2} \exp(-i\Omega_0 t) \begin{pmatrix} \varepsilon^2 (K - g') C_1 \\ \varepsilon C_2 \\ (K - g')^{-1} C_3 \end{pmatrix} + \text{к. с.},$$

после усреднения по «высокой» частоте Ω_0 получим

$$\begin{aligned} dC_1/dt &= iC_2, & dC_2/dt &= iC_3, \\ dC_3/dt &= C_3 - (1 - i\beta) |C_3|^2 C_3 + id_2 C_2 + id_1 C_1, \end{aligned} \quad (18)$$

где $t \rightarrow \varepsilon t (K - g')/2\Omega_0$, $\beta = -3w/K$, $d_2 \rightarrow d_2/(\varepsilon (K - g'))^2$, $d_1 \rightarrow d_1 (\varepsilon (K - g'))^3$. В силу предположения о сильном резонансе нормированные расстройки $d_{1,2}$ удовлетворяют соотношению $d_{1,2} \sim 1$. В противоположном случае ($d_{1,2} \gg 1$, т. е. «слабого» резонанса) в (18) можно выделить две «быстрые» фазовые переменные и после усреднения по ним получить уравнение Ландау

$$dC_3/dt = C_3 - (1 - i\beta) |C_3|^2 C_3.$$

Это означает, что в случае «слабого» резонансного взаимодействия возможны лишь тривиальные режимы генерации — периодические или квазипериодические. Хаотические же колебания, как будет показано далее, возможны лишь при достаточно сильном резонансе трех мод.

Рассмотрим сначала взаимодействие всего двух мод. Оно описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} iC_2/dt &= id_1^{1/2}C_3, \\ dC_3/dt &= C_3 - (1 - i\beta) |C_3|^2 C_3 + id_1^{1/2}C_2, \end{aligned} \quad (19)$$

которые получаются из (18), если положить $d_1=0$ и обозначить $C_2 \rightarrow C_2/d_1^{1/2}$. В отсутствие диссипативных членов $C_3 - |C_3|^2 C_3$ это уравнение имеет два независимых интеграла: $H(C_2, C_3) = i(-\beta |C_3|^2/2 + d_1^{1/2}(C_3 C_2^* + C_3^* C_2)) = \text{const}$ — гамильтониан, имеющий смысл «полной энергии», и дополнительный интеграл $P(C_3, C_2) = |C_3|^2 + |C_2|^2 = \text{const}$ — «полное число квантов». Поэтому при отсутствии диссипации двухмодовая модель полностью интегрируема и хаос в ней не возможен. Подробное численное исследование (19) показало, что и при наличии диссипативных слагаемых эта система обладает лишь тривиальной динамикой, демонстрируя периодические либо квазипериодические колебания.

Вернемся к трехмодовой модели (18). В отсутствие диссипативных членов она также обладает двумя интегралами: гамильтонианом и «полным числом квантов». Однако для полной интегрируемости их недостаточно, и в общем случае (18) может обладать хаотическим поведением. Естественно ожидать, что стохастичность сохранится и при наличии диссипации. При этом хаотическое множество станет асимптотически устойчивым и его образом в фазовом пространстве (18) будет странный аттрактор. Эти предположения были проверены в численном эксперименте.

Порядок (18) можно понизить на единицу, если перейти к новым переменным: $C_j \rightarrow A_j \exp(iu_j)$, $j=1, 2, 3$, $f_1=u_3-u_2$, $f_2=u_2-u_1$. Тогда получим систему уравнений пятого порядка

$$\begin{aligned} dA_1/dt &= -A_2 \sin(f_2), & dA_2/dt &= -A_3 \sin(f_1), \\ dA_3/dt &= A_3(1 - A_3^2) + d_1 A_1 \sin(f_1 + f_2) + d_2 A_2 \sin(f_1), \\ df_2/dt &= A_3 \cos(f_1)/A_2 - A_2 \cos(f_2)/A_1, \\ df_1/dt &= \beta A_3^2 + d_1 A_1 \cos(f_1 + f_2)/A_3 + (d_2 A_2/A_3 - A_3/A_2) \cos(f_1), \end{aligned}$$

которая интегрировалась на ЭВМ. Численный анализ (20) показал, что при достаточно малых значениях расстройек d_1, d_2 действительно возможны хаотические колебания, причем переход к стохастичности осуществляется через последовательность удвоений периода.

В заключение этого раздела выделим два важных обстоятельства: во-первых, поскольку (18) получена путем усреднения исходных уравнений по «высокой» частоте Ω_0 , в исходных уравнениях переход к хаосу будет осуществляться через удвоение двумерных инвариантных торов; во-вторых, нелинейность феррита (ее относительная величина пропорциональна β) не принципиальна для стохастизации (хаос наблюдался и при $\beta=0$).

3. Методика проведения эксперимента

Функциональная схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Эксперимент ставился следующим образом: на управляющие катушки АФР с блока развертки подавалось напряжение, пропорционально которому менялось магнитное поле H_0 . Выходной сигнал АФР подавался на панорамный анализатор спектра и на амплитудный детектор для выделения сигнала модуляции U_m , который поступал на вертикальные отклоняющие пластины осциллографа. На горизонтальные отклоняющие пластины подавалось либо напряжение с блока развертки, пропорциональное H_0 (для получения бифуркационной диаграммы), либо дифференцированный сигнал модуляции \dot{U}_m (для получения фазового портрета).³

³ Фазовый портрет на экране осциллографа является проекцией бесконечномерного фазового пространства усредненных по несущей частоте переменных на плоскость (U_m, \dot{U}_m) .

Для получения на экране осциллографа отображений Пуанкаре использовался блок отображений. Он позволял подсвечивать лишь те точки на фазовом портрете, которые удовлетворяли условию: $\dot{U}_m = 0$, $\dot{U}_m \geq 0$. Для исследования АФР в неавтономном режиме блок отображений позволял также подсвечивать точки через период сигнала, подаваемого с внешнего генератора.

В экспериментах регулируемые параметрами выбирались магнитное поле H_0 и напряжение смещения на активном элементе \dot{U}_c .⁴

Блок развертки позволял изменять H_0 как в автоматическом, так и в ручном режимах. В первом случае H_0 менялось по пилообразному закону с периодом, регулируемым от 0.03 до 80 с. Режим быстрого изменения H_0 использовался для получения бифуркационной диаграммы,⁵ медленного — для наблюдения последовательных перестроек в фазовом пространстве и спектре. Ручной режим применялся для снятия стационарных характеристик сигнала АФР.

4. Переход к хаосу в автономном АФР

На рис. 4, а приведено разбиение плоскости параметров (H_0 , U_c) на области, соответствующие различным режимам работы АФР. При переходе из области I в 2 синусоидальная генерация мягко или скачком сменялась режимом автомодуляции с частотой от 2 до 10 МГц. При дальнейшем изменении параметров наблюдалось усложнение автомодуляции и переход к стохастическому режиму (область 3). При изменении параметров вдоль линии I (рис. 4, а) регистрировался переход к хаосу через удвоения периода автомодуляции, т. е. через удвоения двумерных торов (рис. 5).

Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 4, б. Отметим, что именно такой переход к хаосу реализовался в трехмодовой модели АФР (17), рассмотренной в разделе 2.

При движении вдоль линии II (рис. 4, а) регистрировались последовательное исчезновение хаоса, появившегося в результате удвоений периода T (в «окнах синхронизации» с периодами $3T$, $4T$, $5T$...), и возникновение хаоса на базе удвоенных каждого из периодов (рис. 6). Это явление принято называть последовательностью сложений периода [10]. При обратном движении вдоль линии II наблюдалось последовательное возникновение хаоса в «окнах синхронизации» через перемежаемость [11].

Изменению параметров вдоль линии III (рис. 4, а) соответствовал переход к хаосу через последовательность удвоений трехмерных торов (рис. 7). На соответствующей бифуркационной диаграмме (рис. 4, б) видны также полосы синхронизации на торе. При более подробном анализе бифуркационной диаграммы регистрировалась тонкая структура полос синхронизации, соответствующих резонансам более высоких порядков (рис. 4, г), что качественно согласуется с представлениями о квазипериодическом переходе к хаосу [12, 13].

5. Хаос и синхронизмы на торах в неавтономном АФР

В этом случае на управляющие катушки АФР дополнительно подавалось напряжение с внешнего синусоидального НЧ генератора, что вызывало периодическое изменение собственных частот ферритового резонатора.

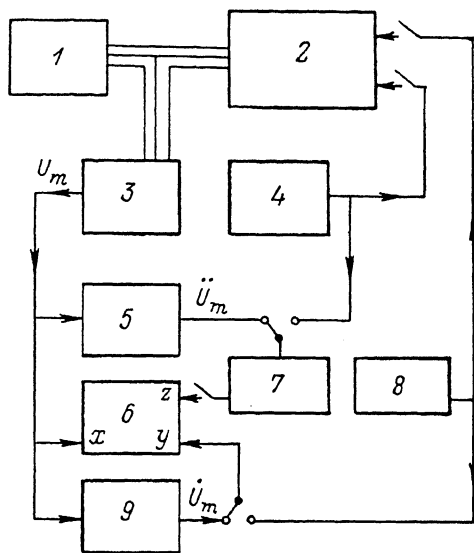


Рис. 3. Функциональная схема экспериментальной установки.

1 — анализатор спектра, 2 — АФР, 3 — амплитудный детектор, 4 — внешний НЧ генератор, 5 — двойной дифференцирующий усилитель, 6 — осциллограф, 7 — блок отображений, 8 — блок развертки, 9 — дифференцирующий усилитель.

⁴ Численные значения всех параметров приводятся в относительных единицах.

⁵ Аналогичным образом бифуркационные диаграммы строились в [9].

В областях параметров, где автономный АФР переходил к хаосу через удвоения двумерных торов (рис. 5), слабое внешнее воздействие на частотах от 1 до 200 кГц не оказывало существенного влияния — оно просто «наклады-

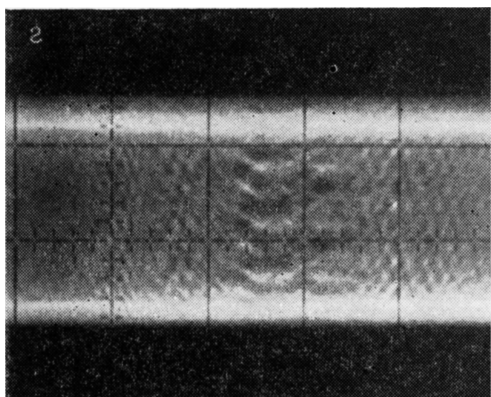
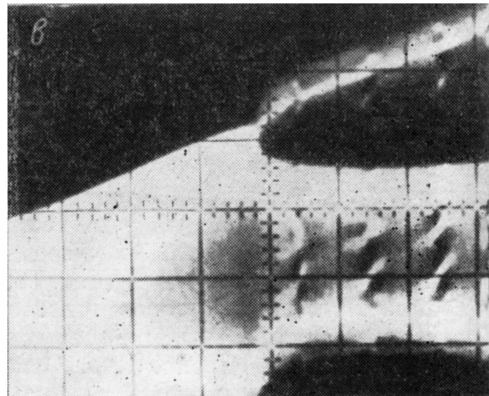
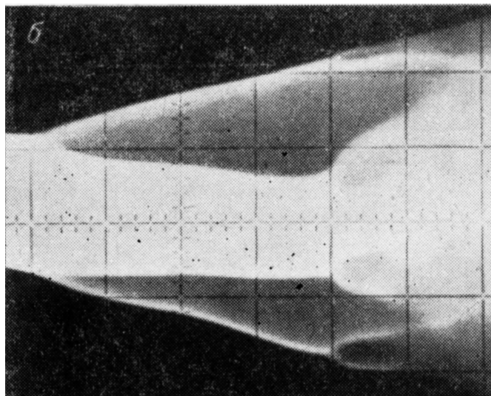
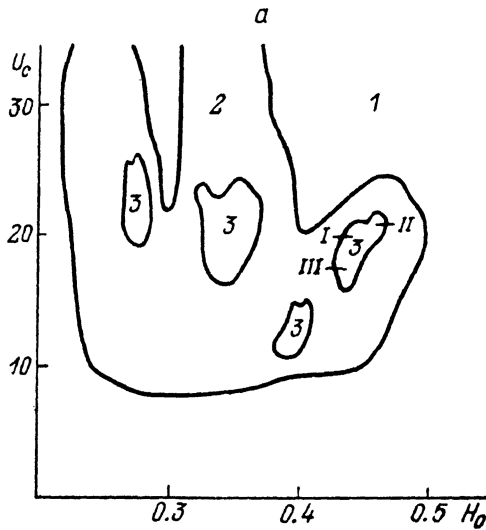


Рис. 4. Плоскость параметров (H_0 , U_c) (а) и бифуркационные диаграммы удвоения периода (б), удвоения торов (в), синхронизации на торе (г).

1 — синусоидальные, 2 — модулированные, 3 — хаотические колебания.

валось» на картину удвоений двумерных торов (рис. 8). Однако здесь имеют место уже удвоения трехмерных торов, так как частоты внешнего воздействия и автомодуляции в общем случае несоизмеримы.

Более сложные явления возникали при подаче НЧ (~ 20 кГц) сигнала от носителя большой амплитуды. Например, регистрировалась последователь-

ность бифуркаций удвоения седлового тора внутри странного аттрактора (рис. 9). Наблюдение такого седлового движения было возможно лишь потому, что фазовая траектория за период внешнего воздействия совершала много оборотов в его окрестности. При некоторых значениях параметров

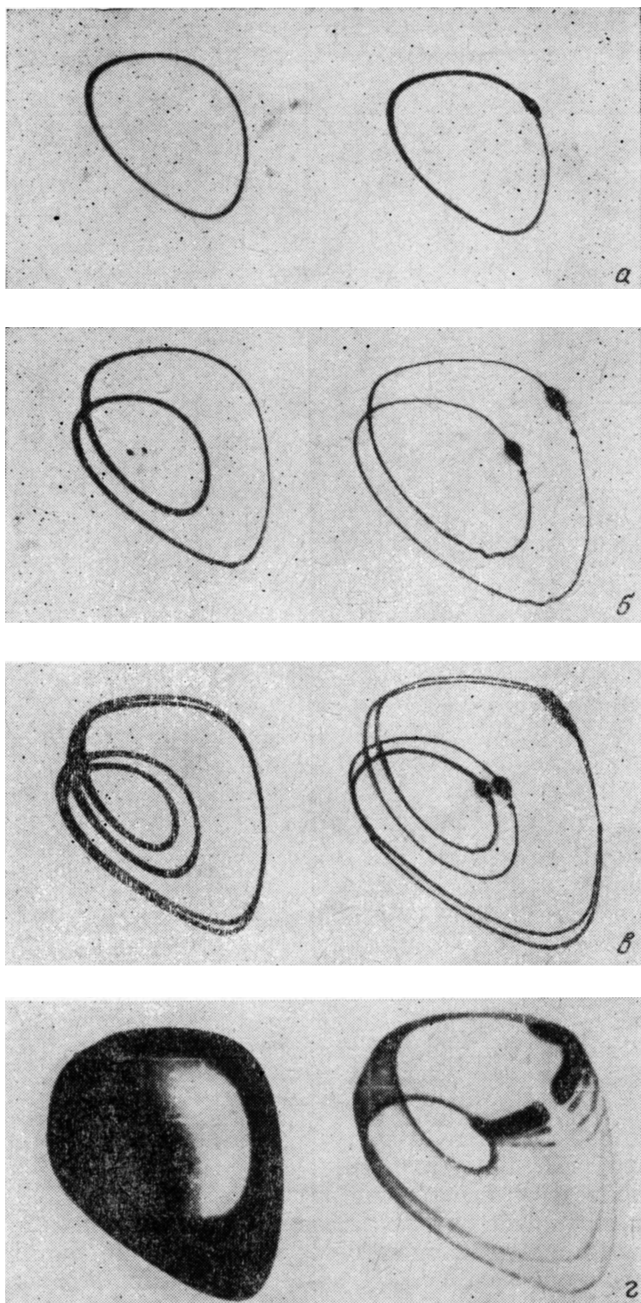


Рис. 5. Фазовые портреты и отображения Пуанкаре для различных значений H_0 .

В результате последовательности удвоений седлового тора появлялось хаотическое множество, напоминающее аттрактор Фейгенбаума [14] (ср. рис. 5, г), которое сливалось с имевшимся ранее. В этой ситуации, по-видимому, должен наблюдаться скачок размерности странного аттрактора.

Таким образом, в многомерных системах возможны последовательности удвоений седловых циклов или торов внутри уже имеющих страных аттрак-

торов, что является одним из механизмов скачкообразного изменения их размерности.

В экспериментах наблюдались бифуркации синхронизмов различных порядков на трех- и четырехмерных торах. Для исследования таких явлений применялось стробоскопирование через период внешнего воздействия. На рис. 10 приведен один из вариантов перехода от синхронизма $1:2$ к синхронизму $1:1$; видно возникновение трехмерного тора, одна из частот которого находится в синхронизме $1:2$ с внешним сигналом. При дальнейшем изменении пара-

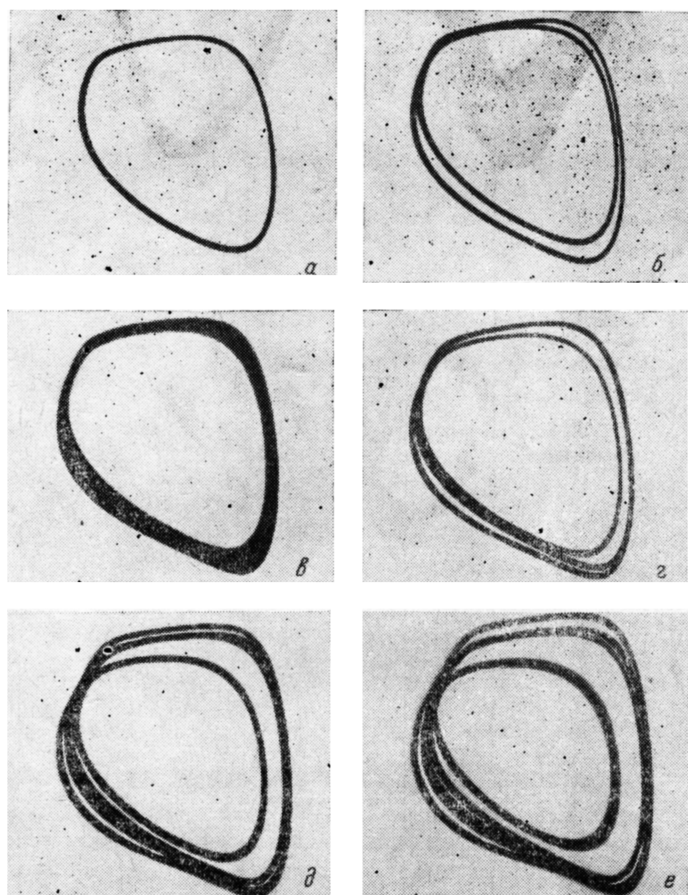


Рис. 6. Фазовые портреты для последовательности сложений периода.

а, б — последовательность удвоений периода T ; *в* — странный аттрактор; *г-е* — циклы периодов $3T$, $4T$, $5T$ соответственно.

метров происходит разрушение этого тора через складчатость (рис. 10, *в*) [15] и переход к синхронизму $1:1$ (рис. 10, *г*).

На рис. 11 приведены бифуркации двух синхронизмов высокого порядка. Здесь разрушение синхронизмов происходит путем потери устойчивости квазипериодическим движением с образованием гетероклинических структур [16].⁶ В первом случае (рис. 11, *а-в*) происходит образование развитого хаотического множества, во втором — «распрямление» гетероклинической структуры и появление трехчастотного квазипериодического движения. При подходе к точке возникновения этого трехмерного тора регистрировались синхронизмы еще более высоких порядков (рис. 11, *в*). С ними происходили аналогичные бифуркации, но уже в значительно более узких областях изменения параметров.

⁶ Образом двухчастотного квазипериодического движения после усреднения и стробоскопирования являются неподвижные точки, число которых определяется соотношением базисных частот.

Заключение

К настоящему времени изучены и экспериментально подтверждены все основные типы переходов к хаосу, реализующиеся в простых системах [9]. Однако в конкретных физических системах могут встречаться особенности.

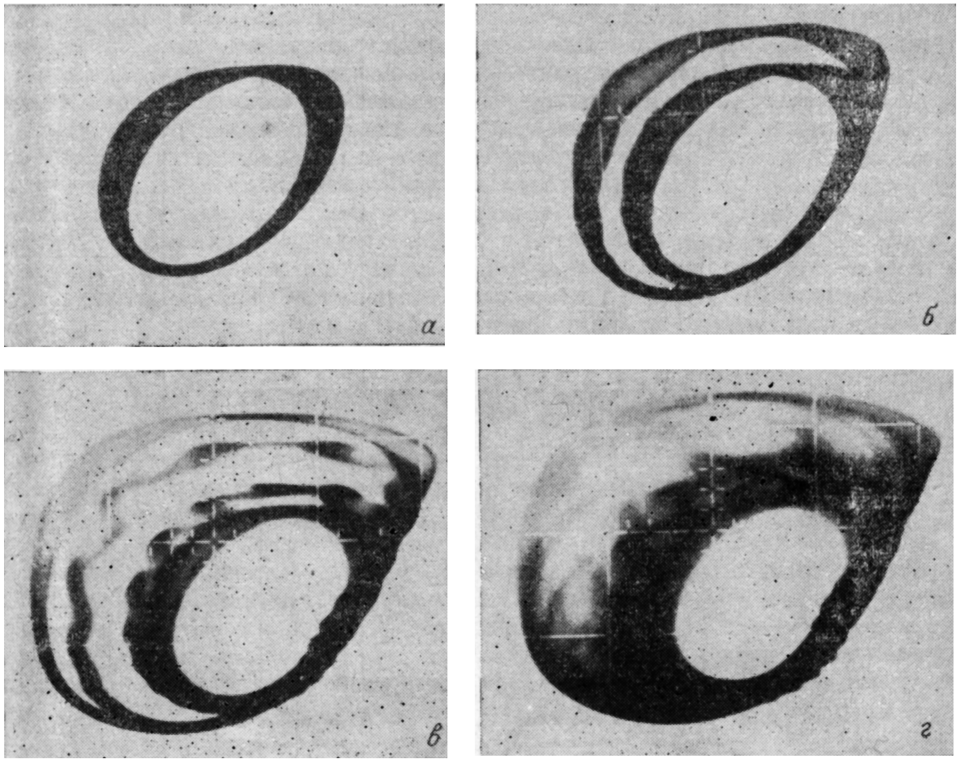


Рис. 7. Фазовые портреты для последовательности удвоений трехмерных торов в автономном АФР.

Например, в известных экспериментах с релей-бенаровской конвекцией [17] наблюдались переходы к хаосу, содержащие одновременно черты двух основных

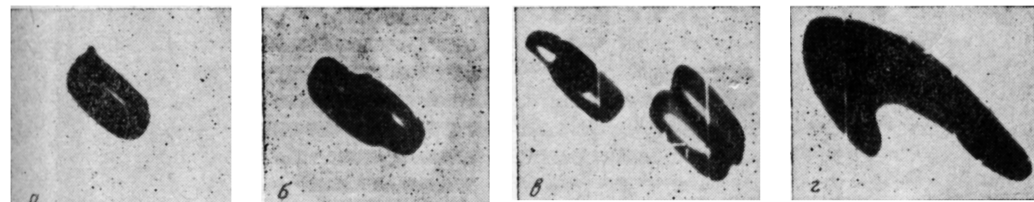


Рис. 8. Отображения Пуанкаре для последовательности удвоений трехмерных торов в неавтономном АФР.

сценариев — через удвоения и квазипериодичность. Аналогичные явления имели место и в АФР (рис. 4, в, z; 5). Поэтому изучение таких систем представляет большой интерес.

Экспериментальное исследование хаоса в конкретных физических системах в отличие от модельных также имеет свои особенности. Как правило, поведение таких систем зависит от большого числа параметров и априорно неизвестно, какие из них существенны. Поэтому их исследование будет достаточно эффек-

тивно лишь при наличии соответствующей методики, позволяющей получать в реальном масштабе времени бифуркационные диаграммы, фазовые портреты,

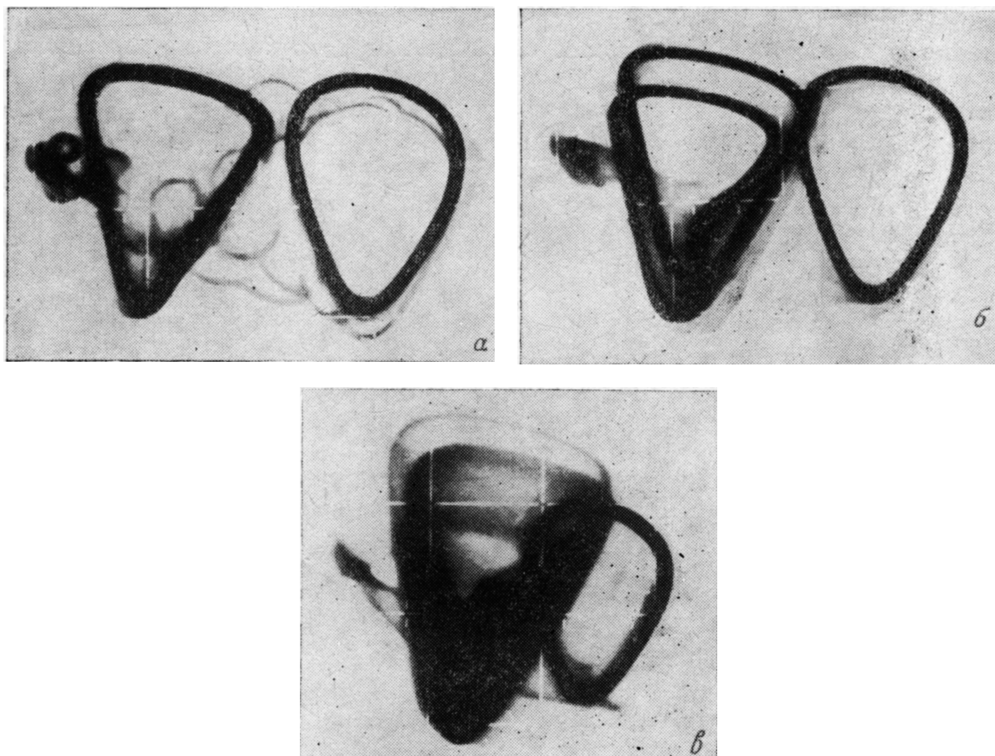


Рис. 9. Фазовые портреты для удвоений седлового тора в странном аттракторе.

отображения Пуанкаре и т. д. Впервые эксперименты подобного типа были поставлены на простой модельной системе — неавтономном нелинейном осцил-

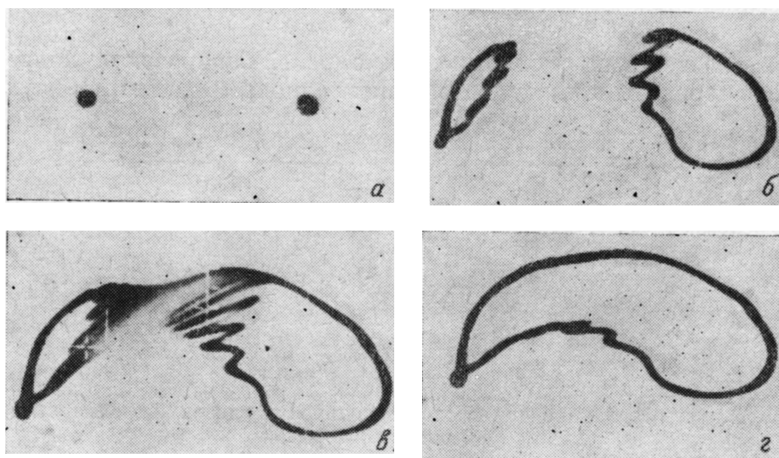


Рис. 10. Разрушение трехмерного тора через складчатость при переходе от синхронизма 1 : 2 к синхронизму 1 : 1.

ляторе [9, 10]. В нашем случае эту методику пришлось видоизменить для анализа относительно низкочастотной огибающей сигнала (так как АФР работает в СВЧ диапазоне). Очевидно, что такой способ проведения эксперимента будет

эффективен применительно к другим физическим и радиоэлектронным системам, работающим в оптическом и СВЧ диапазонах (лазеры, ЛОВ, ЛБВ и т. д.).

В настоящее время интенсивно рассматривается вопрос о практическом использовании динамического хаоса в генераторах шума. Известно несколько типов таких генераторов, работающих, как правило, в низкочастотном диапа-

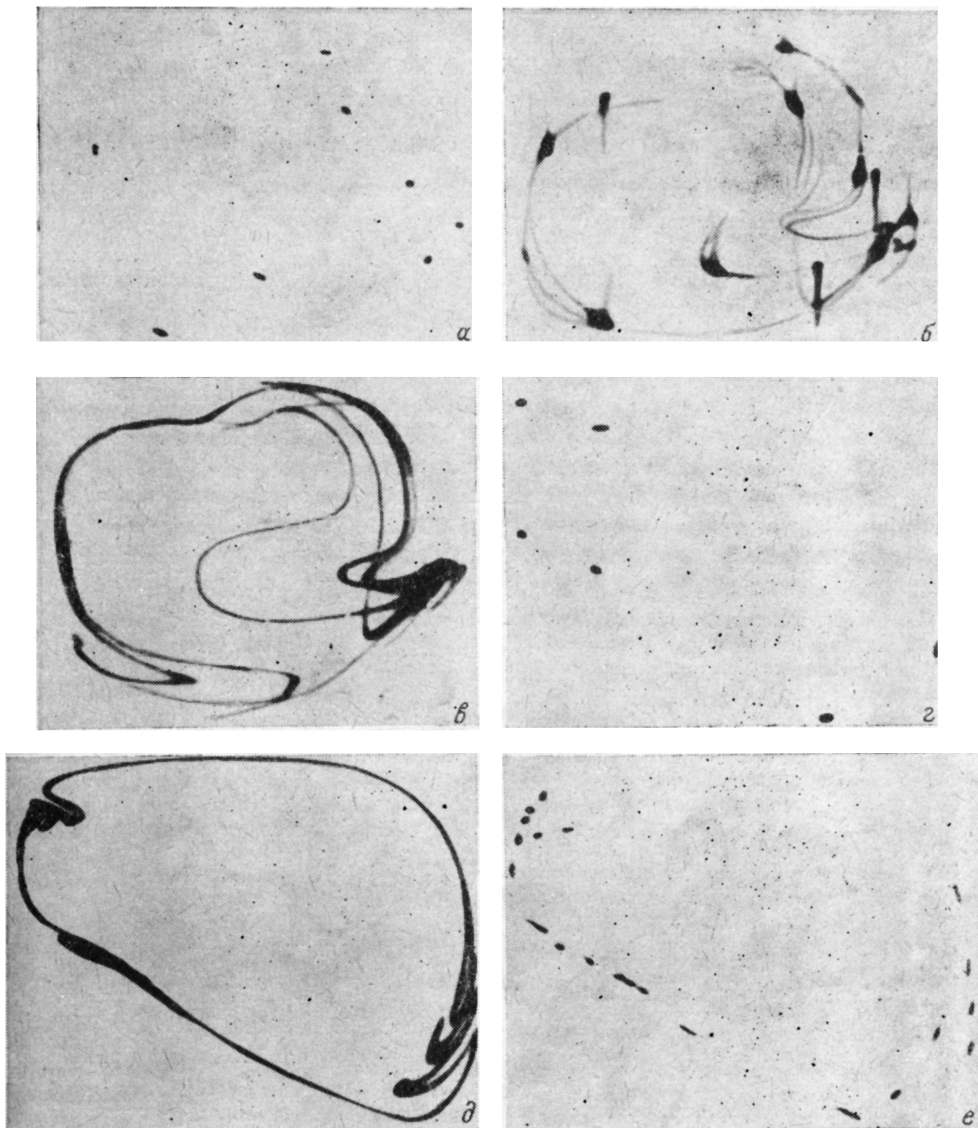


Рис. 11. Бифуркации синхронизмов высокого порядка.

зоне [18, 19]. В этом плане АФР представляет интерес как малогабаритный СВЧ источник узкополосного шума, несущую частоту которого можно электрически перестраивать в широких пределах. Возможно, что это в будущем позволит создавать на базе АФР источники шума с регулируемыми параметрами (размерностью, энтропией, спектром мощности и т. д.).

Авторы благодарят В. С. Афраймовича и В. П. Реутова за полезные дискуссии и М. И. Рабиновича за помощь в работе.

Литература

- [1] *Sistron Donner*. *Microwaves*, 1982, v. 2, N 3, p. 10—11.
- [2] *Арансон И. С., Павлов Д. А.* Письма в ЖТФ, 1985, т. 11, № 6, с. 993—996.
- [3] *Арансон И. С., Павлов Д. А.* Радиофизика, 1986, т. 29, № 3, с. 781—789.

- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [5] Уокер Л. В кн.: Ферриты в нелинейных СВЧ устройствах. М.: ИЛ, 1961, с. 470—496.
- [6] Флетчер П., Белл Р. Там же, с. 497—528.
- [7] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.
- [8] Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973, с. 371—372.
- [9] Jeffries C., Perez J., Testa J. Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, N 4, p. 714—717.
- [10] Buskirk R., Jeffries C. Phys. Rev. A, 1985, v. 31, N 8, p. 3332—3357.
- [11] Manneville P., Pomeau Y. Physica D., 1980, v. 1, p. 219—230.
- [12] Farmer J. D., Satiya I. I. Phys. Rev. A, 1985, v. 31, N 5, p. 3520—3522.
- [13] Rand D., Oslund S., Sethna J., Siggia E. D. Physica D, 1983, v. 8, p. 303—342.
- [14] Feigenbaum M. J. J. Stat. Phys., 1978, v. 19, N 1, p. 25—28.
- [15] Афраймович В. С. Тр. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1983, с. 118—120.
- [16] Афраймович В. С., Шильников Л. П. В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983, с. 3—26.
- [17] Gollub J. P., Venson S. V. J. Fluid. Mech., 1980, v. 100, p. 449—470.
- [18] Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. РпЭ, 1980, т. 25, № 2, с. 336—343.
- [19] Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. В кн.: Вопросы электроники СВЧ. Саратов, 1983, с. 31—45.

Институт прикладной физики
АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
8 октября 1986 г.
В окончательной редакции
20 октября 1987 г.